

# 1D fingering model – 分裂する要素のつくるパターン –

狐崎 創 京大理

## 1 モデルの導入

結晶成長、viscous fingering、電析、バクテリアのコロニーなどの系で観察される fingering pattern は見かけ上の形態の違いから DLA(Diffusion Limited Agregation)、DBM(Dense Branching Morphorogy) 等と分類されているが、より深くこれらの形態を理解するには力学系の立場で現象をとらえ直すことが必要になるだろう。上記の系は微視的なメカニズムは全く異なるが以下の特徴は共通している。

- パターンの形成は各 finger の先端部分の比較的 localize した領域で行なわれ、finger のその他の部分はパターン形成のダイナミクスにほとんど寄与しない。各 finger の先端を1つの要素とみなすとパターンは運動、分裂する要素の軌跡と考えることができる。
- 要素同士は1つの場（多くの場合、拡散場かラプラス場）を介して互いの成長を抑制し、かつ互いに反発力を与えるように相互作用する。

以下では、上記の2つの特徴をもつ1次元空間での簡単な離散要素モデルを構成し、そのモデルが fingering pattern に見られる多くのパターンを再現すること報告する。

各要素は十分 localize した部分系であると考え、位置  $x_i$  と内部自由度  $C_i$  (部分系のオーダーパラメータ) をもつ点  $(x_i, C_i)$  とする。ここで、 $C_i$  はこの要素がつくる場のソースとし、全要素 ( $i = 1, \dots, N$ ) の重ね合わせとして場  $\Psi(x) = \sum f(x - x_i) C_i$  を作る。各要素は  $C_i$  があるしきい値  $C_{th}$  になるとその場で  $C_i$  の和（すなわち、場  $\Psi(x)$ ）が保存されるように2つに分裂して要素数を1増やし、 $C_i \leq 0$  で取り除かれるものとする。 $C_i, x_i$  のダイナミクスは  $\Psi(x)$  の1次まで考えて以下のようにとる。

$$\frac{dC_i}{dt} = g(C_i) - a\Psi(x_i), \quad \frac{dx_i}{dt} = -b \frac{\partial \Psi(x_i)}{\partial x_i} \quad (1)$$

簡単のため exponential 型の相互作用  $f(x) = e^{-\beta|x|}$  を使い、 $C$  の1次までとって、 $a, b = \text{constant}$ ,  $g(C) = \alpha - \gamma C$  とする。適当な無次元化をすると、

$$\frac{dC_i}{dt} = \alpha - \gamma C_i - F(x_i), \quad \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_i} \quad (2)$$

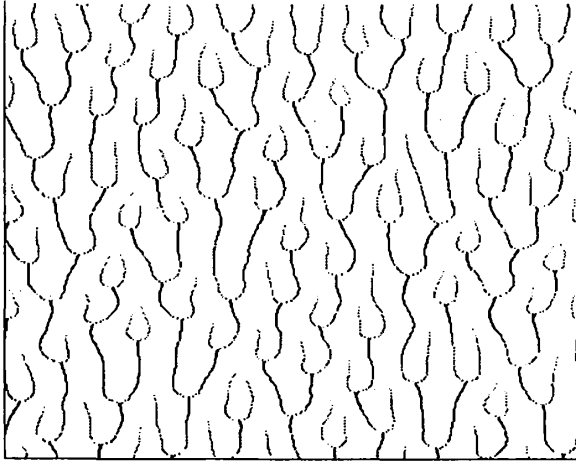


Figure 1:  $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0$  での時間発展。横軸が  $x$  ( $L = 20$ ) で黒が濃いほど  $C$  が大きい。縦軸が時間で下から上までで時間  $T = 75$ 。

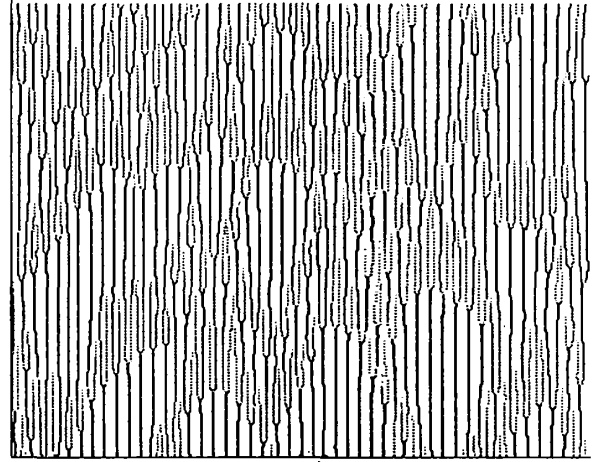


Figure 2:  $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0.275$  での時間発展。 $L = 100, T = 150$

$$F(x_i) = \sum_{j \neq i} e^{-\beta|x_i - x_j|} C_j$$

$$C_i \geq 2 \rightarrow \text{分裂。} N \text{ が } 1 \text{ 増 } (x_i, 1 + \delta), (x_i, 1 - \delta) \text{ ができる。} \quad (3a)$$

$$C_i \leq 0 \rightarrow \text{取り除く。} N \text{ が } 1 \text{ 減} \quad (3b)$$

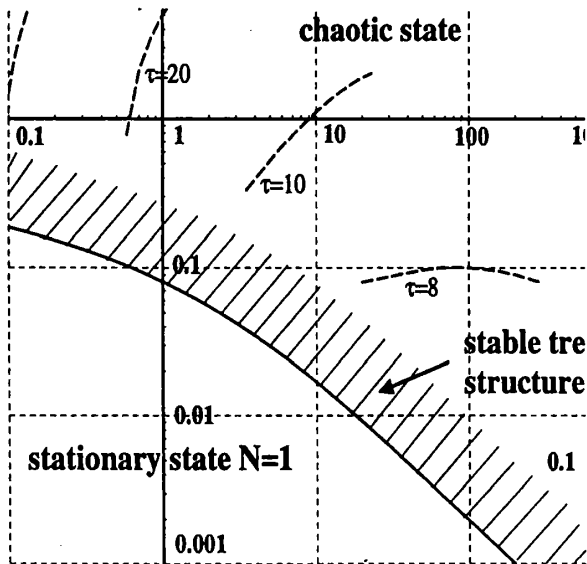
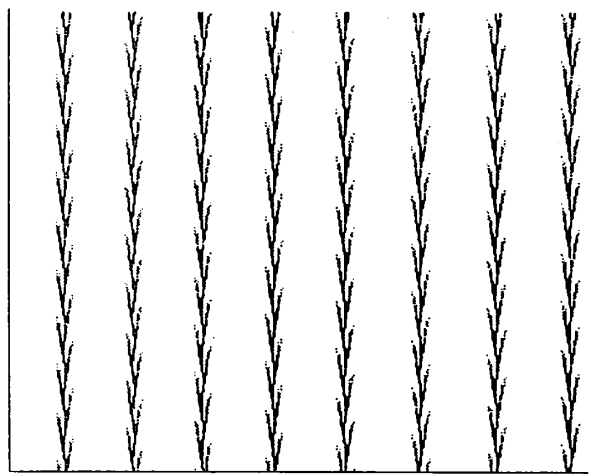
となる。 $\alpha, \gamma$  は 1 要素の成長の特性のパラメータで  $\beta^{-1}$  は相互作用の range をあらわす。 $\delta$  は分裂の異方性のパラメータであるが、ここでは等方的な分裂のみを考え、最大  $10^{-6}$  のごく小さな一様乱数のみを与えた。

系のサイズ  $L$  の周期境界条件で  $(L/2, 1)$  の 1 要素から始める。 $\alpha/\gamma \geq 2$  なら  $N = 1$  の状態は不安定で、要素は分裂をして数を増やす。十分時間が経つと、系は統計的な定常状態に落ち着く。

## 2 定常解

等間隔に同じ大きさの要素が並んだ状態  $\{(x_0 + l_0 m, C_0) \mid m = 1, \dots, N, l_0 = L/N\}$  はこの系の定常解である。ただし、式 2 から  $C_0 = \alpha/(\gamma + \tilde{F}(l_0))$  である。 $(\tilde{F}(x) = 2/(e^{\beta x} - 1))$

$(x_m, C_m) = (l_m, C_0) + (\delta x, \delta C) e^{\lambda t + i q m}$ ,  $q = \pi/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) として線形安定性を調べると、もっとも不安定なモードは  $(x_m, C_m) = (l_m, C_0 + \delta C e^{i \pi m})$  でその固有値は  $\lambda = -\gamma + 2/(1 + e^{\beta l})$  であることがわかる。従って、

Figure 3:  $\gamma = 0, L = 20$  での相図Figure 4:  $\alpha = 4.8, \beta = 0.1, \gamma = 0$  での時間発展。 $L = 100, T = 75$ 

$\gamma \geq 2/(1 + e^{\beta l})$  を満たす定常解は安定であるが、 $\gamma$ が減少するにつれて小さな  $l$  の定常解から不安定になり、ある  $\gamma_c \neq 0$  以下で安定な定常解はなくなる。

実際、シミュレーションを行なってみると  $\gamma = \gamma_c$  付近で図1のような乱流状態へ遷移する。逆に乱流状態から  $\gamma$  を大きくしていくと  $\gamma_c$  よりわずかに大きな  $\gamma$  で図2のような spacio-temporal intermittency (STI) が観察される。実際の系では directional viscous fingering の実験<sup>[1, 2]</sup>で乱流状態や STI が起きることが報告されている。

### 3 安定な tree 構造

$\gamma = 0, L = 20$  のシミュレーションで得られた相図は図3のようになる。 $\alpha, \beta$  がともに小さいと要素数  $N = 1$  の定常解のままであるが、この領域はシステムサイズ  $L \rightarrow \infty$  とともに消滅する。 $\alpha, \beta$  を大きくしていくと系は乱流状態に遷移するが、その過程でいくつかの安定な周期構造を通過する。安定な構造には大きく分けて、一定速度で1方向に伝播するものと、図4のように同じ場所に留まるものがあるが、これらの構造の安定領域は相図上で複雑に隣接している。 $\gamma = 0$  なのでこのパラメータ領域では要素数  $N$  の変化しない定常状態は不安定である。このような tree 構造はいくつかの要素が集まって内部自由度を大きくすることで集団の数が増えない一種の定常状態を実現しているとも見ることが出来るだろう。この種のパターンは結晶成長の実験で観察されている。

tree 構造の安定領域はシステムサイズ  $L$  を大きくしてもほとんど変化し

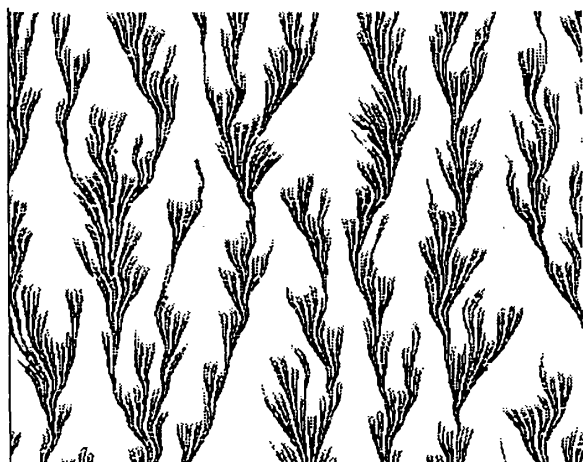


Figure 5:  $\alpha = 1000, \beta = 0.01, \gamma = 0$  での時間発展。  $L = 20, T = 75$

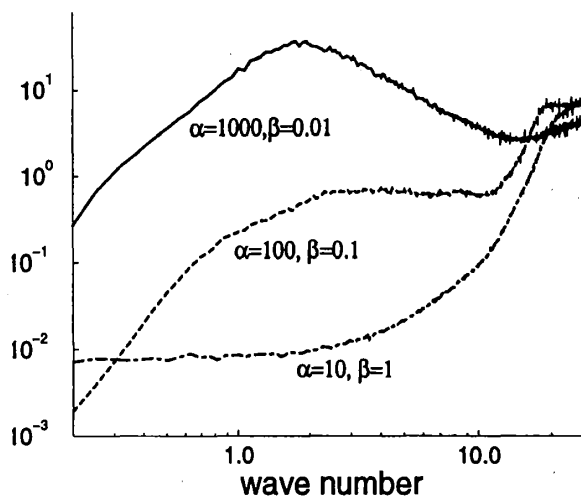


Figure 6: 空間パワースペクトル。  $\alpha\beta = 10, \gamma = 0, L = 100$

ないが、STI のように安定構造になるのに時間がかかるようになるのが観察された。

## 4 乱流状態と fractal への変化

乱流状態を空間、時間スケール特徴づけるもっとも基本的な統計量として

$$l \equiv \frac{1}{\langle \Sigma C_i / L \rangle}, \quad \tau \equiv \frac{\langle \Sigma C_i \rangle}{\text{単位時間当たりの分裂回数}}, \quad \langle \cdot \rangle \text{ は長時間平均} \quad (4)$$

を測定した。相図上で  $l = \text{constant}$  の線は周期  $l, C_0 \simeq 1$  の定常解の存在する線  $\tilde{F}(l) \simeq \alpha$  とほぼ一致し、 $\alpha, \beta$  が大きいほど  $l$  は短くなる。一方、1 要素当りの分裂周期に対応する  $\tau$  は相図上で等高線で示したように相互作用の range  $\beta^{-1}$  にはあまり依存せず、 $\alpha$  が大きくなるにつれて減少し一定値に近づく。

$l = \text{constant}$  の線は  $\alpha$  が大きいところでは  $\alpha\beta = \text{constant}$  に漸近する。この線に沿って相互作用の range  $\beta^{-1}$  を大きくしていくと時間-空間 plot は図 5 のような DLA 的なパターンへと変化する。このパターンは周期境界なので厳密な意味では fractal ではないが、空間のパワースペクトル (図 6) にも中間のスケールで巾的な領域があらわれることから  $L$  に比べて短いスケールでは fractal になっているものと考えられる。

## 5 今後の課題

- 現実の系との対応

現実の *fingering pattern* を点状の離散要素のダイナミクスに縮約する方法がまだわからない。バクテリアコロニーなど *finger* 間の距離に比べて *finger* の幅が狭いパターンが成長する幾つかの実験<sup>[3, 4]</sup>に対してこの縮約は有効なように思えるが、これらの現象に対してはまだ基礎方程式がまだ確立していないのが現状である。

- 現象のモデル依存

上記の現象は定性的には相互作用の形  $f(x)$  や要素の性質  $g(C)$  にはあまり依存しないと期待される。とくに、式1で  $g(C) = (\alpha - \gamma C)C$ ,  $\alpha = C_i$ ,  $\beta = \text{constant}$  として logistic 型の要素数の減少しないモデルにしても同様の現象が観察された。

- パターンの力学的な理解

*fingering pattern* の *tree* 構造、乱流状態、*fractal* の見た目の違いを力学系として特徴づけるのがこの研究の目標である。乱流状態については現在研究中である。

## References

- [1] M.Rabaud, S.Michalland and Y.Couder Phys.Rev.Lett. Vol.64 No.2(1990) 184
- [2] S.Michalland, M.Rabaud and Y.Couder Europhys.Lett. Vol.22(1) (1993) 17
- [3] M.Matsushita and T.Matsuyama 科学 Vol.64 No.2(1994) 104
- [4] M.Ohgiwari, M.Matsushita and T.Matsuyama J.Phys.Soc.Jpn. Vol.61 No.3(1992) 816