

White noise

— metrical automorphisms のクラスについて —

名大教養 野本 久夫

I. white noise

$E \subset H \cong H^* \subset E^*$ を rigged Hilbert space: H は (可分な) 実ヒルベルト空間, E は H で dense な nuclear space とする. H^*, E^* はそれぞれの conjugate spaces をあらわすものとする. E 上の関数 $C(\xi)$ が, 連続, positive-definite かつ $C(0) = 1$ をみたせば Bochner-Minlos の定理により, $(E^*, \mathcal{L})$ 上に唯一つの確率測度 μ が存在して, $C(\xi)$ はそのフーリエ変換となっている.

$$(1) \quad C(\xi) = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x)$$

こゝに, $\mathcal{L}$ は E^* の cylinder sets の生成する σ -algebra, $\langle x, \xi \rangle$ は $E^* \times E$ 上の canonical な bilinear form である. こゝに
つぎの C

$$(2) \quad C(\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \|\xi\|^2\right\}, \quad \|\xi\| = \xi \text{ の } H\text{-norm}$$

に対応する測度 μ を Gauss 測度, white noise 等と呼ぶ。

以下では white noise の空間 $(E^*, \mathcal{L}, \mu)$ 上に H の直交変換が induce する metrical automorphism に関する考察を行なう。

2. 直交群 $O(H)$ と metrical automorphisms.

$$L^2 = L^2(E^*, \mu)$$

$$O(H) = \{g: g \text{ は } H \text{ の直交変換}\}$$

$$O(E) = \{g: g \in O(H), g: E \rightarrow E \text{ なる homeomorphism}\}$$

$$O(E^*) = \{g^*: \langle g^*x, \xi \rangle = \langle x, g^{-1}\xi \rangle, g \in O(E)\}$$

$$\mathcal{O}(E^*) = \{T; T \text{ は } E^* \text{ 上の metrical automorphism}\}$$

とおく。(2)より $C(g\xi) = C(\xi)$ だから $O(E^*) \subset \mathcal{O}(E^*)$ であるが、 $O(H) \subset \mathcal{O}(E^*)$ であることも次のようにしてわかる。

$$1^\circ) \quad \text{map } r: E \ni \xi \rightarrow \langle \cdot, \xi \rangle \in L^2$$

は linear, isometric で H 上まで拡張できる。 $r(f)$ ($f \in H$) も $\langle \cdot, f \rangle$ とおくことにする。 $\langle \cdot, f \rangle$ は確率変数で、その分布は平均 0, 分散 $\|f\|^2$ の正規分布 $N(0, \|f\|^2)$ である。

2°) M を $e^{i\langle x, f \rangle}$, $f \in H$ の 1 次結合の全体とすると L^2 で dense なことが知られている。このとき、 M の元

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{i\langle x, f_k \rangle}$$

に対して,

$$(3) U_g \varphi(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{i\langle x, g f_k \rangle}, \quad g \in O(H)$$

は well-defined で, M の内積を保つ変換となっている. (1) かつ U_g は L^2 の unitary 変換に拡張できる. 定義から容易に,

$$(4) U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2}, \quad g_\nu \rightarrow g \text{ (strong)} \Rightarrow U_{g_\nu} \rightarrow U_g \text{ (strong)}$$

このとき, つぎの定理が成り立つ.

定理 $O(H)$ から $O(E^*)$ への変換 T で

$$(i) U_g \varphi(x) = \varphi(T_g^{-1} x), \quad T_g = T \cdot g, \quad \varphi \in L^2$$

$$(ii) T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2} \pmod{0}$$

をみたすものが存在し, $g \in O(E^*)$ に対しては $T_g = g^*$ になりたつ.

証明は各 U_g が有界可測関数 φ, ψ に対して multiplicative, $U_g(\varphi\psi) = U_g\varphi \cdot U_g\psi$ なること, (E^*, μ) が Lebesgue space なることから得られる.

3° Brown 運動の射影不変性

P. Lévy の Brown 運動に関する射影不変性についての [2] の

アプローチでは $O(E^*)$ を利用している。そのためには E のように方に工夫が必要になるが、 $O(H) \subset O(E^*)$ を用いるとそれをさけることができる。以下でそのことを簡単に述べよう。

$$E = \text{Schwartz の } \mathcal{S}, \quad H = L^2(\mathbb{R}, dx)$$

とる。 nonsingular な map $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$(5) \quad g_\varphi: H \ni f(u) \rightarrow f(\varphi u) \sqrt{\frac{d\varphi u}{du}}$$

とおけば、 $g_\varphi \in O(H)$ である。今、 φ は $[a, b] \rightarrow [c, d]$, $\varphi(a) = c$ なる射影変換とする。

$$(6) \quad \varphi: u \rightarrow \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$$

別に

$$\begin{aligned} X(t, x) &= \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} \langle x, \chi_{[a, t]}(u) \rangle \sqrt{\frac{b-a}{b-u}}, \\ Y(t, x) &= \sqrt{\frac{d-t}{t-c}} \langle x, \chi_{[c, t]}(u) \rangle \sqrt{\frac{d-c}{d-u}}, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \chi_A \text{ は } A \subset \mathbb{R} \text{ の} \\ \text{indicator} \end{array}$$

なる確率過程を考える。これは Brown 運動 $\langle x, \chi_{[a, t]}(u) \rangle$

$\langle x, \chi_{[c, t]} \rangle$ からの得られる linear interpolation を得られる (cf [1])。

さて、(6) の φ に対しては、少し計算すれば、

$$Y(t, T_\varphi^{-1}x) = X(\varphi^{-1}(t), x), \quad c < t < d,$$

$$T_\varphi = T_{g_\varphi}$$

なることがわかる。これは $X(t)$ の time change $X(\varphi^{-1}(t))$ が $Y(t)$,

$T_p(x)$ と, (T_0, τ) 上 T_0 は metrical automorphism τ があるから

$Y(t, x)$ と equivalent な process τ があることを示す。

引用文献

- [1] T. Hida; Stationary stochastic process, Lecture note in Princeton University, (1969).
- [2] T. Hida, I. Kubo, H. Nomoto and H. Yashizawa; On projective invariance of Braumian motion, Publ. RIMS, Vol 4, No. 3, (1969), 595-609.