

単純な偶数次元 Fibered knot の分類

東大 理 小 島 定 吉

§1 序

(5) に於ける Levine の分類定理は, “simple” と云う強い仮定にもかかわらず, Seifert matrix が, 奇数次元 knot の isotopy type の complete invariant であることを示している点で注目すべき結果である。実際 Milnor fibration 等を見る時, Seifert matrix の持つ意味は深い。ここでは, 偶数次元の特に Fibered knot の場合に, このような complete invariant を与えると言う問題を考える。

§2 定義及び結果

Fibered knot とは, $f: S^{2m} \longrightarrow S^{2m+2}$ smooth embedding と, $\phi: S^{2m+2} - f(S^{2m}) \longrightarrow S^1$ smooth fibration の pair (f, ϕ) で, $f(S^{2m})$ の trivial tubular neighborhood $f(S^{2m}) \times D^2$ と, 明らかな projection p に対して,

$$\begin{array}{ccc}
 f(S^{2m}) \times (D^2 - 0) & \xrightarrow{\text{inclusion}} & S^{2m+2} - f(S^{2m}) \\
 & \searrow p & \swarrow \phi \\
 & S' &
 \end{array}$$

が可換であるものとする。これは S^{2m+2} 上, $f(S^{2m})$ を axis とする spinnable structure と考えてよい。(定義については (4) を参照)。したがって, $\theta \in S'$ に対し $F_\theta = \phi^{-1}(\theta) \cap (S^{2m+2} - f(S^{2m}) \times \text{Int } D^2)$ とすれば, covering homotopy によって $h: F_\theta \longrightarrow F_{2\pi}$ diffeomorphism と $g: F_\theta \times [0, 2\pi] \longrightarrow S^{2m+2} - f(S^{2m})$ なる map が得られ, これらを用いて S^{2m+2} 上 ϕ のつくる spinnable structure を $k = \{F_\theta, h, g\}$ と書くことが出来る。(h, g が (4) に於ける定義に全く一致している訳ではないが, このように考えても差し支えない)。したがって, 我々は k を, 前と混同させて Fibered knot と呼ぶことにする。

さて, 二つの Fibered knot $(f_1, \phi_1) = k_1, (f_2, \phi_2) = k_2$ に対し, isotopy $H_t: S^{2m+2} \longrightarrow S^{2m+2}$ として, $H_0 = \text{id}$, $\phi_1 \circ H_1 = \phi_2$, を満たすものが存在する時, isomorphic と呼び $k_1 \cong k_2$ と書く。

《注意》 isomorphic な二つの knot は, knot として isotopic である。ところが, Browder の結果 (本質的には h -cobordism 定理) によって, $m \geq 2$ の時は逆も成り立つ。

Def 1. $k = \{F_\theta, h, g\}$ が simple とは, compact $(2m+1)\dim$

manifold F_0 が, oriented, $(n-1)$ connected で, n 次元のホモロジーの torsion が消えている時。

さて, $g_t: F_0 \longrightarrow S^{2m+2}$ を $g_t(x) = g(x, t)$ によって定め, covering homotopy によって, t の domain $[0, 2\pi]$ を $\mathbb{R}$ に拡張しておく。更に一般的な記号として, space 間の写像 f によって induce される homology 群の準同型を f_* , homotopy 群の準同型を $f_\#$ と書く。

$\alpha \in H_m(F_0), \beta \in H_{m+1}(F_0)$ に対し, Seifert form $\mathcal{L}: H_m(F_0) \otimes H_{m+1}(F_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $\mathcal{L}(\alpha \otimes \beta) = L((g_0)_*(\alpha), (g_\pi)_*(\beta))$ によって定める。ここで $L(,)$ は S^{2m+2} における linking number である。更に $\{\alpha_i\} \{\beta_j\}$ を $\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = \delta_{ij}$ を満たす $H_m(F_0)$ $H_{m+1}(F_0)$ の basis とする時, $L(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}(\alpha_i \otimes \beta_j))$ を Seifert matrix と呼ぶ。

ここで linking number の拡張概念として Haefliger の意味での link を考える (3)。すなわち $f_1, f_2: S^{m+1} \longrightarrow S^{2m+2}$ を $f_1(S^{m+1}) \cap f_2(S^{m+1}) = \emptyset$ を満たす smooth embedding とする。 $n \geq 2$ の時, $S^{2m+2} - f_1(S^{m+1})$ は S^m に homotopy 同値。したがって f_2 は $\pi_{m+1}(S^m)$ の元を一つ定める。この元を $L'(f_1(S^{m+1}), f_2(S^{m+1}))$ と書くことにすると, $n \geq 3$ の時, $\pi_{m+1}(S^m) \cong \mathbb{Z}_2$ で, $L'(f_1(S^{m+1}), f_2(S^{m+1})) = L'(f_2(S^{m+1}), f_1(S^{m+1}))$ であることが知られている。

$n \geq 4$ の時, 任意の $\pi_{m+1}(F_0)$ の元は S^{m+1} の embedding で実現できる。この事実を用い, 今 E_i を S_i^{m+1} 上の D^m -bundle, $\tilde{E}_i$ を S_i^m 上の D^{m+1} -bundle とし, E_i と $\tilde{E}_i$ を plumbing した manifold を W_i とすると, F_0 は $\bigsqcup_{i=1}^r W_i$ (boundary connected sum) に diffeo である事が示される (7)。ここで τ は $H_m(F_0)$ のランク。更に此の handle 分解は, $H_m(F_0), H_{m+1}(F_0)$ の basis $\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}$ に忠実であるとしてよい。 $\pi_{m+1}(F_0) \cong H_{m+1}(F_0) \oplus (H_m(F_0) \otimes \mathbb{Z}_2) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\tau} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_r$ なる同型対応があり, E_i の中心線である S_i^{m+1} は $\pi_{m+1}(F_0)$ の free part の生成元を represent している。その Hurewicz 準同型による $H_{m+1}(F_0)$ への image は β_i である。ここで S_i^{m+1} が represent する $\pi_{m+1}(F_0)$ の元を $\beta_{i\#}$ とし, 同様に S_i^m が represent する $\pi_m(F_0) \cong H_m(F_0)$ の元を $\alpha_{i\#}$ とする時, F_0 は $\{\alpha_{i\#}\}, \{\beta_{i\#}\}$ に忠実な handle 分解を持つ。このような basis $\{\alpha_{i\#}\}, \{\beta_{i\#}\}$ を nice basis と呼ぶ。

さて, $u, v \in \pi_{m+1}(F_0)$ に対して $\mathcal{L}': \pi_{m+1}(F_0) \times \pi_{m+1}(F_0) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を $\mathcal{L}'(u, v) = L'((g_0)_\#(u), (g_0)_\#(v))$ によって定める事を考えよう。ただし右辺の homotopy 群の元は, すべて sphere の embedding で実現されたものとして考える。此の時, L' の可換性から, この写像が well define で, 更に u, v が infinite order の時には $\mathcal{L}'$ が bilinear form であることが分かる。そこで $\{\beta_{i\#}\}$ を $\pi_{m+1}(F_0)$ の nice basis とする時, $V(F_0) =$

$(\mathcal{U}'(\beta_{i\#}, \beta_{j\#}))$ と定める。

Def 2. 行列対 $(L(k), V(k))$ を k の l.p. 行列と呼ぶ。

Def 3. $(L(k), V(k)) \sim (L(k'), V(k')) \iff$ 適当な unimodular 行列 X と, $Y \cdot {}^tX$ が mod 2 で対称となるような $\mathbb{Z}_2$ -行列 Y が存在して, $V(k') \equiv X \cdot V(k) \cdot {}^tX + X \cdot (E - {}^tL(k)) \cdot {}^tY + Y \cdot L(k) \cdot {}^tX \pmod{2}$, ${}^tX^{-1} \cdot L(k) \cdot {}^tX = L(k')$ が成り立つ。

Def 4. $\mathbb{Z}$ -unimodular 行列 A が s-unimodular であるとは, $A - E$ が unimodular である時。ここで E は単位行列。

以上の定義により, 我々の目標は次のように定式化される。

定理 1. 任意の $\mathbb{Z}$ -s-unimodular 行列 A , $\mathbb{Z}_2$ -対称行列 B に對し, $(L(k), V(k)) = (A, B)$ を満たす simple fibered knot k が存在する。ただし $n \geq 4$ 。

定理 2. k, k' を simple fibered knot とする。 $n \geq 4$ の時 $(L(k), V(k)) \sim (L(k'), V(k')) \iff k \cong k'$

§3 F_0 の handle 分解

この節では $n \geq 4$ の時次の補題を証明するのが目的である。

補題 1. $k \cong k' \implies (L(k), V(k)) \sim (L(k'), V(k'))$

$m \geq 4$ の時, $\lambda: \Pi_{m+1}(F_0) \times \Pi_{m+1}(F_0) \longrightarrow \Pi_{m+1}(S^m)$ を次のように定める。すなわち, $\alpha, \gamma \in \Pi_{m+1}(F_0)$ を transversal に交わるような sphere の embedding で実現し, $\alpha \cap \gamma$ を含む α の disc $D_\alpha^{m+1} \subset S_\alpha^{m+1} = \alpha$ を考える。 α の F_0 における normal bundle を D_α^{m+1} に制限したものは trivial。これに対し Pontrjagin Thom-構成を行ない, $f: F_0 \longrightarrow S^m$ を得る。 f によって induce される $f_\#: \Pi_{m+1}(F_0) \longrightarrow \Pi_{m+1}(S^m)$ によって $\lambda(\alpha, \gamma) = f_\#(\gamma)$ と定める。

補助定理 (C.T.C. Wall (8)) $m \geq 4$ で F_0 が 3-connected の時, λ は well define で symmetric bilinear form である。

補題 2. S_1^{m+1}, S_2^{m+1} を F_0 の中に transversal に交わる様に埋め込まれた sphere とする。 $S_1^{m+1} \cap S_2^{m+1} = V^1$ に対し, F_0 の中の disc D^{2m+1} で $D^{2m+1} \cap S_i^{m+1} = D_i^{m+1}$ ($i=1, 2$) かつ $D^{2m+1} \supset V^1$ を満たすものが存在する。

証明は, F_0 の連結性と, general position によって与えられる。詳細は (8) を参照。

さて, $\partial(D^{2m+1}, D_1^{m+1}, D_2^{m+1}) = (S^m, S_1^m, S_2^m)$ によって D^{2m+1} の表面に link が出来る。此の link 不変量を $L'(S_1^m, S_2^m)$ とする時, $\lambda(\alpha, \gamma) = S L'(S_1^m, S_2^m)$ であることが容易に示される。ただし S は $\Pi_m(S^{m-1}) \longrightarrow \Pi_{m+1}(S^m)$ suspension homo である。

補題 3. $\lambda(\alpha, \gamma) = 0 \iff \alpha, \gamma$ を disjoint な sphere の embedding で実現できる。

証明) $m \geq 4$ であるから suspension は同型。したがって
 $\lambda(x, y) = 0 \iff L'(S_1^m, S_2^m) = 0$ 。Haefliger の定理を用いれ
 ば, ∂D^{2m+1} 上に S_1^m によって bound される disc D^{m+1} を,
 S_2^m と共通部分を持たない様にとる事が出来る。 $(S_1^{m+1} - D_1^{m+1}) \cup D^{m+1}$
 と S_1^{m+1} は F_0 の中で homotopic であるから, $(S_1^{m+1} - D_1^{m+1}) \cup D^{m+1}$ は,
 x を represent して S_2^{m+1} と共通部分がない。後は, 再び
 Haefliger の定理によつて $(S_1^{m+1} - D_1^{m+1}) \cup D^{m+1}$ を smooth 近似し
 ておけばよい。 <終>

今 $\{\alpha_{i\#}\}, \{\beta_{i\#}\}$ を F_0 の nice basis とし, $\xi_{i\#}$ を $\alpha_{i\#} \in \pi_m(F_0)$
 に $\pi_{m+1}(S^m) \cong \mathbb{Z}_2$ の生成元を compose して得られる $\pi_{m+1}(F_0)$ の
 $\mathbb{Z}_2$ part の生成元とする。この時 $\pi_{m+1}(F_0)$ の自己同型は,

$$\psi(\beta_{i\#}) = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \beta_{j\#} + \sum_{k=1}^r y_{ik} \xi_{k\#}$$

なる形を持つ。更に nice basis の定義から induce される
 $\pi_m(F_0)$ の自己同型 ψ' として

$$\psi'(\alpha_{i\#}) = \sum_{j=1}^r z_{ij} \alpha_{j\#}$$

なるものを考え, $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}), Z = (z_{ij})$ とおく。

補題4, $m \geq 4$ の時, $\{\psi(\alpha_{i\#}), \psi(\beta_{i\#})\}$ が nice basis と
 なる $\iff X = {}^t Z^{-1}$, おつ $Y \cdot X$ が mod 2 で対称。

証明) F_0 上の intersection number が $\langle \psi(\alpha_i), \psi(\beta_j) \rangle = \delta_{ij}$
 を満たす事から, $X = {}^t Z^{-1}$ が得られる。また定義及び障害理
 論から $\lambda(\xi_{i\#}, \xi_{j\#}) = \lambda(\beta_{i\#}, \beta_{j\#}) = 0$, $\lambda(\beta_{i\#}, \xi_{j\#}) = \delta_{ij}$

となる。従って

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(\psi(\beta_{i\#}), \psi(\beta_{j\#})) \\ &= \sum_k x_{ik} \sum_l y_{jl} \lambda(\beta_{k\#}, \xi_{l\#}) + \sum_k y_{ik} \sum_l x_{jl} \lambda(\xi_{k\#}, \beta_{l\#}) \end{aligned}$$

この式が $Y \cdot X \pmod{2}$ が対称であることを示す。

逆も容易である。 $K = \bigcup_{i=1}^r (S_i^m \perp S_i^{m+1})$ (disjoint union) を考える。(ここで $S_i^m \perp S_i^{m+1}$ は、 S_i^m と S_i^{m+1} が transversal に交わる事を意味する)。 $f: K \rightarrow F_0$ を、各 sphere に制限した時 C^∞ embedding となる様な 1対1 写像とする。以下この様な埋め込みを proper embedding と呼ぶ。更に $f(S_i^{m+1})$ が $\psi(\beta_{i\#})$ を represent し、 $f(S_i^m)$ が $\psi(\alpha_{i\#})$ を represent する様にする。 F' を $f(K)$ の smooth 正則近傍の boundary connected sum したものとすれば、 $F - \text{Int } F'$ が R -cobordism であることが示される。

<終>

補題1の証明) 前の補題によつて F_0 の handle 分解の取り換えがわかった。今 ϕ を base 変換の写像で、 $(L(R), V(R))$ を与える nice basis に関し (X, Y) なる行列表示が出来たでしょう。この時 ${}^t Z^{-1} = X$ である事から ${}^t X^{-1} \cdot V(R) \cdot {}^t X$ が新しい basis に関する Seifert matrix であることが分かる。また

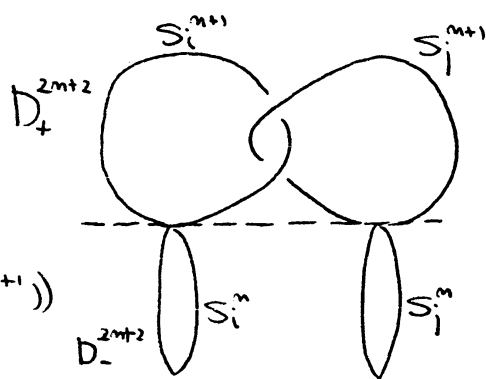
$$\begin{aligned} & \ell' \left(\sum_k x_{ik} \beta_{k\#} + \sum_k y_{ik} \xi_{k\#}, \sum_l x_{jl} \beta_{l\#} + \sum_l y_{jl} \xi_{l\#} \right) \\ &= \sum_k x_{ik} \sum_l x_{jl} \ell'(\beta_{k\#}, \beta_{l\#}) + \sum_k x_{ik} \sum_l y_{jl} \ell'(\beta_{k\#}, \xi_{l\#}) \\ & \quad + \sum_k y_{ik} \sum_l x_{jl} \ell'(\xi_{k\#}, \beta_{l\#}) \end{aligned}$$

ここで $l'(\alpha_{\#}, \beta_{\#}) \equiv l(\alpha_{\#} \otimes \beta_{\#}) \pmod{2}$, $l'(\beta_{\#}, \alpha_{\#}) \equiv$
 $\delta_{\#} - l(\alpha_{\#} \otimes \beta_{\#}) \pmod{2}$ であることを用いれば, 新しい基
 底に因し, $X \cdot V(k)^t X + X \cdot (E - {}^t L(k))^t Y + Y \cdot L(k) \cdot {}^t X$ であること
 が分かる。 < 終 >

§4 定理1の証明

$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ を与えられた行列とする。今 $f: K \rightarrow S^{2m+2}$
 proper embedding として次を満たすものを取る。すなわち
 標準的な分解 $S^{2m+2} = D_+^{2m+2} \cup D_-^{2m+2}$, $D_+^{2m+2} \cap D_-^{2m+2} = S^{2m-1}$ に
 対して (右図参照)

$$\begin{cases} f(S_i^{m+1}) \subset D_+^{2m+2} \\ f(S_i^m) \subset D_-^{2m+2} \\ f(K) \cap S^{2m+1} = \bigcup_{i=1}^r (f(S_i^m \cap S_i^{m+1})) \\ L'(f(S_i^{m+1}), f(S_j^{m+1})) = b_{ij} \end{cases}$$



さて, W を $f(K)$ の S^{2m+2} における smooth 正則近傍の連結成
 分を, boundary connected sum したものとし, $W' = \text{---} S^{2m+2}$
 $- \partial_{\text{int}} W$ とする。

Step 1. ∂W の homological な性質

$H_m(W)$ の $f(S_i^m)$ によって represent される生成元を u_i , 同様
 に $H_{m+1}(W)$ の $f(S_i^{m+1})$ によって represent される生成元を v_i と
 する。さて,

$$A: H_m(W) \xrightarrow{\partial^{-1}} H_{m+1}(S^{2m+2}, W) \xrightarrow{\text{exc}^{-1}} H_{m+1}(W', \partial W) \xrightarrow{P.D} H^{m+1}(W') \xrightarrow{D} H_{m+1}(W')$$

$$A': H_{m+1}(W) \cong H_{m+2}(S^{2m+2}, W) \cong H_{m+2}(W', \partial W) \cong H^m(W') \cong H_m(W')$$

なる同型に対し, $A(u_i) = v_i^*$, $A'(v_i) = u_i^*$ と書く。

$$\varphi_m: H_m(W) \cong H_{m+1}(S^{2m+2}, W) \cong H_{m+1}(W', \partial W) \xrightarrow{\partial} H_m(\partial W)$$

$$\varphi'_m: H_m(W') \cong H_{m+1}(S^{2m+2}, W') \cong H_{m+1}(W, \partial W) \longrightarrow H_m(\partial W)$$

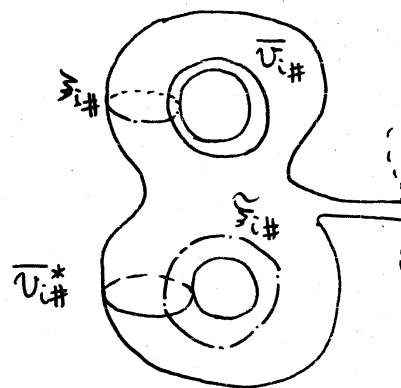
$$\varphi_{m+1}: H_{m+1}(W) \cong H_{m+2}(S^{2m+2}, W) \cong H_{m+2}(W', \partial W) \longrightarrow H_{m+1}(\partial W)$$

$$\varphi'_{m+1}: H_{m+1}(W') \cong H_{m+2}(S^{2m+2}, W') \cong H_{m+2}(W, \partial W) \longrightarrow H_{m+1}(\partial W)$$

なる準同型に対し, $\varphi_m(u_i) = \bar{u}_i$, $\varphi'_m(u_i^*) = \bar{u}_i^*$, $\varphi_{m+1}(v_i) = \bar{v}_i$, $\varphi'_{m+1}(v_i^*) = \bar{v}_i^*$ と書く。この時, Mayer-Vietoris 完全列を用いる事によつて, $H_m(\partial W)$, $H_{m+1}(\partial W)$ はそれぞれ $\{\bar{u}_i, \bar{u}_i^*\}$, $\{\bar{v}_i, \bar{v}_i^*\}$ によつて生成され, 更に ∂W 上で $\langle \bar{u}_i, \bar{v}_j^* \rangle = \langle \bar{u}_i^*, \bar{v}_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle \bar{u}_i, \bar{v}_j \rangle = \langle \bar{u}_i^*, \bar{v}_j^* \rangle = 0$ であることが分かる。

Step 2 $\pi_{m+1}(\partial W)$ に関する性質

$\pi_{m+1}(\partial W)$ の free part の basis として下図の様な canonical なものがある。すなわち, S_i^m 上の D^{m+2} -bundle の associated sphere bundle の fiber $\& v$, S_i^{m+1} 上の D^{m+1} -bundle の associated sphere bundle の trivial section である。(ここで trivial とは, section と S_i^{m+1} を link 1 1



いない事を意味する)。これらを $\{\bar{v}_{i\#}\} \{\bar{v}_{i\#}^*\}$ と書く。更に $\Pi_{m+1}(\partial W)$ の $\mathbb{Z}_2$ -part の basis として同様に canonical なものも取れる。即ち, canonical な $\Pi_m(\partial W)$ の basis に $\Pi_{m+1}(S^m)$ の生成元を compose したもので, それらを $\{\xi_{i\#}\} \{\tilde{\xi}_{i\#}\}$ と書く。結局 $\Pi_{m+1}(\partial W)$ は, $\{\bar{v}_{i\#}\}, \{\bar{v}_{i\#}^*\}, \{\xi_{i\#}\}, \{\tilde{\xi}_{i\#}\}$ によって生成され, 更に $\bar{v}_{i\#}, \bar{v}_{i\#}^*$ の Hurewicz 準同型による image が $\bar{v}_i, \bar{v}_i^*$ であることが分かる。

さて, $f': K \rightarrow \partial W$ proper embedding で

$$f'_\#(S_i^{m+1}) = \bar{v}_{i\#} + b_{ij} \xi_{j\#} + \sum_{j=1}^r a_{ji} \bar{v}_{j\#}^*$$

$$f'_\#(S_i^m) = \bar{u}_{i\#} + \sum_{j=1}^r (\delta_{ij} - a_{ij}) \bar{u}_{j\#}^*$$

を満たすものが存在する。なぜなら, $\Pi_i(\partial W) = 0$ ($i \leq 3$) であるから, $\langle f'_\#(S_i^{m+1}), f'_\#(S_j^m) \rangle = \delta_{ij}$, ~~$\lambda(f'_\#(S_i^{m+1}), f'_\#(S_j^{m+1})) = 0$~~ であることから, Whitney の trick, 及び補題 3 を用いることが出来るからである。そこで $f'(K)$ の ∂W における smooth 正則近傍の連結成分の boundary connected sum したものを F_0 , また $\partial W - \text{Int } F_0 = F_0'$ とする。

Step 3 S^{2m+2} は F_0 を fiber とする fibered knot の構造を持つ。

今 $j: F_0 \rightarrow W$, $j': F_0 \rightarrow W'$ を inclusion とする時

$$j_*: H_m(F_0) \rightarrow H_m(W) \quad j_*(f'_\#(S_i^m)) = u_i$$

$$j_*: H_{m+1}(F_0) \rightarrow H_{m+1}(W) \quad j_*(f'_\#(S_i^{m+1})) = v_i$$

$$j_*: H_m(F_0) \rightarrow H_m(W') \quad j_*(f'_*(S_i^m)) = \sum_j (\delta_{ij} - a_{ij}) u_j^*$$

$$j_*: H_{m+1}(F_0) \rightarrow H_{m+1}(W') \quad j_*(f'_*(S_i^{m+1})) = \sum_j a_{ij} v_j^*$$

であるから, A は $\mathbb{Z}$ -unimodular であることからすべて同型。
 更に, W, W', F_0, F_0' は simply connected であるから $(W; F_0, F_0')$
 $(W; F_0', F_0)$ は relative k -cobordism。従って, $\tau g(F_0 \times [0, \pi])$
 $= W$, $g(F_0 \times [\pi, 2\pi]) = W'$ によ, $\tau \Sigma^{2m+2}$ に fibered knot の
 構造が入る。

Step 4 $L(k) = A$

$f'_*(S_i^m) = \alpha_i$, $f'_*(S_i^{m+1}) = \beta_i$ とする。このとき

$$\begin{aligned} l_{ij} &= L((g_0)_*(\alpha_i), (g_{-\pi})_*(\beta_j)) \\ &= L((g_{\pi/2})_*(\alpha_i), (g_{-\pi/2})_*(\beta_j)) \\ &= L(u_i, \sum_k a_{kj} v_k^*) \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

Step 5 $V(k) = B$

$$\begin{aligned} v_{ij} &= L'((g_0)_\#(f'_\#(S_i^{m+1})), (g_{-\pi})_\#(f'_\#(S_j^{m+1}))) \\ &= L'((g_{\pi/2})_\#(f'_\#(S_i^{m+1})), (g_0)_\#(f'_\#(S_j^{m+1}))) \end{aligned}$$

ここで $(g_{\pi/2})_\#(f'_\#(S_i^{m+1}))$ は $f(S_i^{m+1})$ によ, τ represent さ
 れていると考えよ。よ, この, $(g_0)_\#(f'_\#(S_j^{m+1})) =$
 $\bar{v}_j\# + b_{ji} \xi_j\# + \sum_k a_{kj} \bar{v}_k^*$ との link をみる。明らかに,
 $\sum_k a_{kj} \bar{v}_k^*$ との link はないから, $\bar{v}_j\# + b_{ji} \xi_j\#$ を sphere
 の embedding で実現してやれば, f の定義によ, $v_{ij} = b_{ij}$

が得られる。

<終>

§5 定理2の証明

simple と云う仮定から, F_0 は下図の様な handle 分解を持つと考えてよい。すなわち

$$F_0 = D^{2m+1} \cup ((h_1^m) \cup (h_1^{m+1})) \cup \dots \cup ((h_r^m) \cup (h_r^{m+1}))$$

として, C_i^m, C_i^{m+1} を m -handle

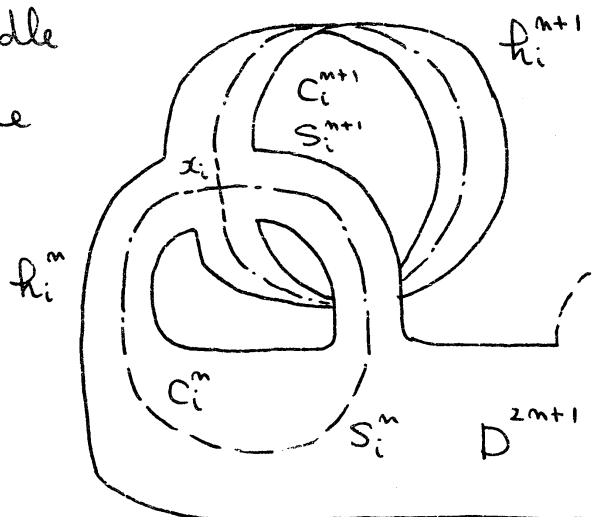
h_i^m , $(m+1)$ -handle h_i^{m+1} の core

とする時, C_i^{m+1} は S_i^{m+1} に拡張され,

C_i^m と唯一点で

transversal に交わる。この

交点を x_i とする。



補題5. $k_1 = [F_0, h, g]$

$k_2 = [F_0', h', g']$ を simple fibered knot とする。この時,
 $(L(k_1), V(k_1)) \sim (L(k_2), V(k_2)) \Rightarrow F_0$ と F_0' は S^{2m+2} において isotopic.

証明) §3の結果から, $(L(k_1), V(k_1)) = (L(k_2), V(k_2))$ と仮定してよい。また, F_0, F_0' の handle 分解を, それらの basis に忠実なものをとることにする。

$$F_0 = D^{2m+1} \cup ((h_1^m) \cup (h_1^{m+1})) \cup \dots \cup ((h_r^m) \cup (h_r^{m+1}))$$

$$F_0' = D^{2m+1} \cup ((h_1^{m'}) \cup (h_1^{m'+1})) \cup \dots \cup ((h_r^{m'}) \cup (h_r^{m'+1}))$$

以降簡単の為, 記号として S^{2m+2} の中で isotopic と云う替りに $=$ を用いる。まず, $D^{2m+1} = D^{2m+1'}$ と仮定してよい。更に次元の仮定から $C_i^m = C_i^{m'}$, $\alpha_i = \alpha_i'$ としてよい。

Step 1 $h_i^m = h_i^{m'}$

今 C_i^m の S^{2m+2} に於ける tubular nbd $N = C_i \times D^{m+2}$ を考える。 α_i を C_i^m 上の h_i^m に対する positive unit normal vector field とする。 α_i は $\bar{N} = C_i \times \partial D^{m+2}$ の section と見做せる。 α_i' を α_i と同様に, $h_i^{m'}$ に対する法ベクトル場とすれば, $\bar{N}$ 上の ∂C_i で一致した二つの section が得られる。 ∂C_i で fix された section の homotopy class は $\pi_m(S^{m+1}) = 0$ であることから unique。すなわち α_i, α_i' は $\bar{N}$ で isotopic である。従って, その N における orthogonal complement が $h_i^m, h_i^{m'}$ と考えてよいから, $h_i^m = h_i^{m'}$ となる。

Step 2 $h_i^{m+1} = h_i^{m+1'}$

tubular neighborhood の一意性を用いて, $h_i^{m+1}, h_i^{m+1'}$ の attaching sphere は一致してるとしてよい。まず, $C_i^{m+1} = C_i^{m+1'}$ を示そう。今 β_i を C_i^{m+1} の h_i^{m+1} に対する positive unit normal vector field とする。 β_i' も同様に定める。 C_i^m を S_i^m に拡張して考えると, β_i, β_i' が S_i^{m+1} を表わすを見做せば (即ち S_i^{m+1} を正方向に少し動かしただけ), link $S_1^m \cup \dots \cup S_r^m \cup S_{i+}^{m+1} \cup \dots \cup S_{r+}^{m+1} \subset S^{2m+2}$ が出来る。こ

の link の isotopy class は, Haefliger の結果から, $L(S_i^m, S_{j+}^{m+1})$, 及び $L'(S_i^{m+1}, S_{j+}^{m+1})$ $i < j$ の元と 1 対 1 に対応している。ところがそれは d, p 行列の成分によつて表わされているから, b_i, b_i' によつて出来る二つの link は isotopic である。従つて $C_i^{m+1} = C_i^{m+1}'$ としてよい。さて, C_i^{m+1} の S^{2m+2} における tubular nbhd $N = C_i^{m+1} \times D^{m+1}$ に対し, b_i, b_i' は $\bar{N} = C_i^{m+1} \times \partial D^{m+1}$ の ∂C_i^{m+1} 上一致した section と見做せる。此の section としての homotopy class は $\pi_{m+1}(S^m) \cong \mathbb{Z}_2$ の元によつて表現されるが, 適当な framing に対して, この元は $V(h)$ の i, i 成分と一致している。従つて b_i, b_i' は $\bar{N}$ 上 isotopic で, 前と同様に h_i^{m+1}, h_i^{m+1}' は, その N における orthogonal complement と考えられるから, $h_i^{m+1} = h_i^{m+1}'$ を得る。

以上の操作を行なう事によつて $F_0 = F_0'$ が示された。

<終>

(定理 2 の証明) 補題 5 によつて, isotopy $H_t: S^{2m+2} \rightarrow S^{2m+2}$ として, $H_0 = \text{id}$, $H_1(F_0) = F_0'$ を満たすものが存在する事が云えた。後は Cerf の定理を用いる事によつて示される。詳細は, Kato(4) 或いは Durfee(1) がすでに示した事と, 全く同じであるから, それらを参照されたい。

<終>

References

- (1) A.H. Durfee; Fibered knots and algebraic singularities, *Topology* 13 (1974) 47 ~ 59
- (2) A. Haefliger; Plongements différentiables de variétés dans variétés, *Comm. Math. Helv.* 36 (1961) 47 ~ 82
- (3) A. Haefliger; Differentiable links, *Topology* 1 (1962) 241 ~ 244
- (4) M. Kato; A classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold, *J. Math. Soc. Japan* 26 (1974) 454 ~ 463
- (5) J. Levine; An algebraic classification of some knots of codimension two, *Comm. Math. Helv.* 45 (1970) 185 ~ 198
- (6) J. Levine; Polynomial invariants of knots of codimension two, *Ann. of Math.* 84 (1966) 537 ~ 554
- (7) I. Tamura; Classification des variétés différentiable $(n-1)$ connexes sans torsion de dimension $2n+1$, *Seminaire H. Cartan* 15 e année 1962/63 n° 16 à 19
- (8) C.T.C. Wall; Classification problem in differential topology I, II, *Topology* 2 (1963) 253 ~ 261, 263 ~ 272