

対称空間上の不変微分作用素のスペクトル

東大 教養 大島 利雄

連結実半単純リー群 G の等質空間 $X = G/H$ は, H が G のある包含的自己同型 σ の固定元全体から成るとき *affine symmetric space* という。(H を, H の連結成分のいくつかから成る群に置き換えてもよいが, それは, G を G のある有限被覆群に取り換えると上の場合に帰着される)。たとえば, G の *Cartan involution* をとれば *Riemannian* 対称空間が, また $G \simeq G \times G / \Delta G$ ($\sigma(g, g') = (g', g)$) により G 自身が, X の例になっている。 X 上の G -不変測度 dx による $L^2(X, dx)$ は

$$\begin{array}{ccc} G \times L^2(X, dx) & \longrightarrow & L^2(X, dx) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (g, f(x)) & \longmapsto & f(g^{-1}x) \end{array}$$

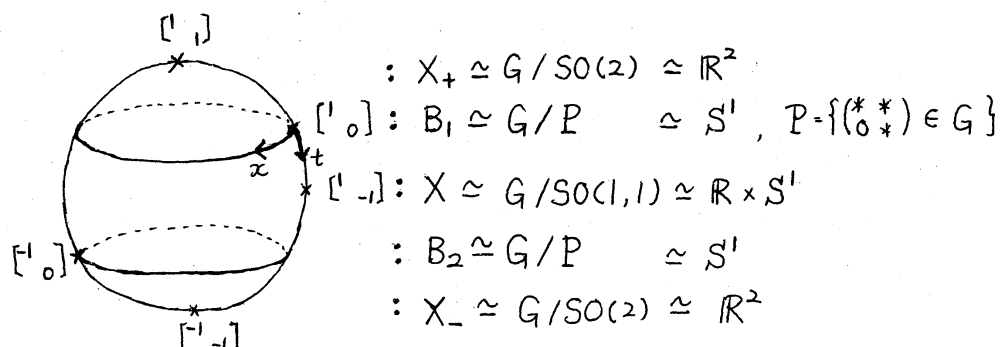
により G のユニタリ表現空間となるが, この既約表現分解を求めることは, ユニタリ表現論の最も基本的な問題である。

$X = G$ で, G が *compact* の場合は, Peter & Weyl が, *non-compact* の場合は Harish-Chandra が解決した。 *Riemannian*

対称空間の場合は, Helgason & Harish-Chandra により得られている. 一方, X 上の G -不変微分作用素環は, 自己共役な自由生成元 $\Delta_1, \dots, \Delta_l$ をもつ多項式環と同型となり, 先の問題は, $\Delta_1, \dots, \Delta_l$ の同時スペクトル分解を求めることに対応する. これは, X を compact 化することにより, 確定特異点型境界値問題として捕えられる. この場合, 普通の有界領域における楕円型境界値問題と異なり, 点スペクトルや連続スペクトルが入り混ざって現われる. ($l=1$ の場合は, 変数分離によって, 常微分方程式の Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodaira の展開定理に帰着させることができる). 以下, 最も単純な例で説明するが, その議論は一般の X にも通用する.

例 1 $G/H = SL(2, \mathbb{R}) / SO(1, 1)$

$S^2 \simeq \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} / \mathbb{R}_+ \right\}$ の中へ実現する. G の作用は $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \mapsto g \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}^t g \quad (g \in G)$ で, $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ の isotropy 群が $SO(1, 1)$ となる. S^2 の G -軌道分解は,



$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ の近傍で適当な局所座標系 (t, x) をとり, $t = y^2$ と

おく (X が $t > 0$, B_1 が $t = 0$ に対応する). $l = 1$ で,

$\Delta = y^2(\partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial x^2)$ と表わせる. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathcal{M}_\lambda : (\Delta - \chi_\lambda(\Delta))u \equiv (\Delta - (\lambda^2 - \frac{1}{4}))u = 0$$

という X 上の方程式の解空間を $\mathcal{B}(X; \mathcal{M}_\lambda)$ とおく. $\mathcal{M}_\lambda$ は $B = (B_1, B_2)$ に対し確定符号点型で, その特性根は $\frac{1}{2} \mp \lambda$ となるので, $\mathcal{B}(X; \mathcal{M}_\lambda)$ の元に対し境界値をとる写像 $\beta_{\frac{1}{2} \mp \lambda} = (\beta'_{\frac{1}{2} \mp \lambda}, \beta^2_{\frac{1}{2} \mp \lambda})$ が定義される. $u \in \mathcal{B}(X; \mathcal{M}_\lambda)$ が ideally analytic solution^{*} ならば, generic λ に対し B_1 の近傍で

$$u = f_-(x, y)y^{\frac{1}{2}-\lambda} + f_+(x, y)y^{\frac{1}{2}+\lambda} \quad (f_\pm \text{ は analytic})$$

と表わせ, $\beta'_{\frac{1}{2} \mp \lambda}(u) = f_\mp(x, 0)$ である. また, X の不変測度が $y^{-2} dx dy$ と表わせることに注意すれば, χ_λ が点スペクトル, すなわち $L^2(X) \cap \mathcal{B}(X; \mathcal{M}_\lambda) \neq \{0\}$ となる為の必要十分条件は次の様になることがわかる.

(I) $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ かつ $\ker(\beta_{\frac{1}{2} - (\operatorname{sgn} \operatorname{Re} \lambda)\lambda}) \neq \{0\}$.

一方, λ を実解析的パラメータとする $\mathcal{M}_\lambda$ の ideally analytic solution u_λ に対し, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) u_{\sqrt{1+t}} dt$ (φ は compact 台を持つ C^∞ -級関数) は $L^2(X)$ の元となるので (⊕ 部分積分すればわかる), 連続スペクトルは次で与えられることが示せる.

(II) $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

* u が K -finite なら ideally analytic になる.

さて, $\mathcal{B}(G/P; \lambda) = \{f \in \mathcal{B}(G); f(g \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = y^{\frac{1}{2}-\lambda} f(g), \forall \varepsilon \in \{\pm 1\}, y \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}\}$ とおくと, $\beta_{\pm} \neq \lambda$ は $\mathcal{B}(X; m_\lambda)$ から $\bigoplus \mathcal{B}(G/P; \pm \lambda)$ への G -準同型を引き起こすが, その逆写像は, Poisson 核

$$P_{+, \lambda} = \frac{|y/(y^2-x^2)|^{\frac{1}{2}+\lambda}}{\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2})}, \quad P_{-, \lambda} = \frac{\text{sgn}(y^2-x^2)|y/(y^2-x^2)|^{\frac{1}{2}+\lambda}}{\Gamma(\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{2})}$$

を核関数とする積分作用素 (それを $(P_{+, \lambda}, P_{-, \lambda}) = \mathcal{P}_\lambda$ とおく) で与えられ, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, FS -空間の間の

$$\mathcal{B}(X; m_\lambda) \simeq \mathcal{B}(G/P; \lambda) \oplus \mathcal{B}(G/P; -\lambda)$$

という topological G -同型が成立する。さらに,

$${}^t \beta_{\frac{1}{2}-\lambda} \circ \mathcal{P} = a_\lambda \Gamma(\lambda) \begin{bmatrix} \cos(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4})/\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}), \sin(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4})/\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}) \\ \cos(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4})/\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}), \sin(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2})/\Gamma(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}) \end{bmatrix}$$

(a_λ はある正則行列) となる。($\mathcal{B}(X; m_\lambda)$ の位相や, 上の行列の計算については [2] を参照) よって, (I) は

$$(I) \quad \lambda \in \{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots\}$$

となることがわかる。(I) は $PSL(2, \mathbb{R})$ の discrete series,

(II) は $PSL(2, \mathbb{R})$ の principal series に対応している。 $X = SO_0(2m+1, 1)/SO_0(2m, 1)$ の場合に同様の考察をすれば, $L^2(X)$ に点スペクトルが存在し, それは $L^2(SO_0(2m+1, 1))$ の分解には現われない表現で, そのうちの $(m-1)$ 個が $SO(2m+1)$ に関し class 1 であることがわかる) 以上をあわせると,

$$u = \sum_{(\alpha, \beta): \text{特性根}} f_{(\alpha, \beta)}(\lambda, t, x, y, z) \lambda^\alpha t^\beta$$

と表わせる。任意の $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し, $(\alpha-1, \beta-1)$ は純虚になるので, 例1の場合と同様に,

$$(III) \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

が連続スペクトルになることがわかる。一方, $(\lambda, l) \in \mathbb{R}^2$ に対しては, 特性根は

$$(\alpha-1, \beta-1) = (-2i\lambda, -i\lambda \pm l), (i\lambda \pm l, 2i\lambda), (i\lambda \pm l, -i\lambda \pm l)$$

と表わせるので, $l > 0$ としたとき, 特性根 $(-2i\lambda+1, -i\lambda-l+1)$ $(i\lambda-l+1, 2i\lambda+1)$, $(i\lambda-l+1, -i\lambda-l+1)$ に対応する境界値が0の解₀の存在条件を求めればよい。この場合の Poisson核は

$$P_{++}^{(- -)} = \lambda^{2i\lambda+1} t^{i\lambda+l+1} (\lambda^2 t^2 + t^2 x^2 - (z-xy)^2)_{+}^{-(l+\frac{1}{2})} (\lambda^2 t^2 - \lambda^2 y^2 - z^2)_{+}^{-(\frac{l}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\lambda)}$$

$\begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (+) \end{matrix}$
 $\begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (+) \end{matrix}$
 $\begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \end{matrix}$

の3個存在する。例1と同じ方法により, 条件は

$$(IV) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$$

であることがわかる。以上をあわせると, スペクトル $(\chi(\Delta_1), \chi(\Delta_2))$ 全体の集合は

$$\{(u, v); 4u^3 \geq 9v^2\} \cup \{(3\lambda^2 - l^2, 2\lambda(\lambda^2 + l^2)); \lambda \in \mathbb{R}, l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\}$$

となる。(IV) は次の様に考察できる。

u を, 上に述べた特性根に対する境界値が0の解とする。

v を, λ の特性根 $-2i\lambda+1$ に対応する $\{\lambda=0\}$ 上への u の境界値とする。 v は, t の特性根 $-i\lambda-l+1$ に対応する $\{\lambda=t$

$= 0$ } 上への境界値が 0 になっている。 $(\Delta, t) \rightarrow (\Delta t^{\frac{1}{2}}, t)$

と変数変換して考えれば, v は

$$\left. \left((\Delta t^{\frac{1}{2}})^{2i\lambda-1} \Delta, (\Delta t^{\frac{1}{2}})^{1-2i\lambda} - \chi(\Delta, t) \right) \right|_{\Delta=0} v$$

$$\equiv - \{ t^2 (\partial^2 / \partial t^2 - \partial^2 / \partial x^2) - (\frac{1}{4} - \lambda^2) \} v = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{1-2i\lambda} t^{1-i\lambda \pm \lambda} \\ = (\Delta t^{\frac{1}{2}})^{1-2i\lambda} t^{\frac{1}{2} \pm \lambda}, \\ u \text{ が ideally analytic なら} \\ v = ((\Delta t^{\frac{1}{2}})^{2i\lambda-1} u) \Big|_{\Delta=0} \end{array} \right.$$

という方程式を満たし, 特性根 $\frac{1}{2} - \lambda$ に対する境界値が 0 になっている。この様な non-trivial solution の存在する条件は, 例 1 で求めた。すなわち, $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ であった。

一般に, $L^2(G/H)$ のスペクトルは, G/H より小さな対称空間の点スペクトルの場合に帰着される。よって, $L^2(G/H)$ の点スペクトルを調べる事が重要になるが, その存在条件は (C) θ を σ と可換な Cartan involution とする。 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の固有値 1 (resp. -1) に対する θ (resp. σ) の固有空間を $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{q}$) とおくとき, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$ の maximal abelian subspace が $\mathfrak{q}$ の maximal abelian subspace になる。

と考えられる (i.e. $L^2(G)$ の場合と同様)。これが十分条件であることは, 最近 Flensted-Jensen [1] により得られた。

[1] Flensted-Jensen: On a fundamental series of representations related to an affine symmetric space, preprint.

[2] Oshima & Sekiguchi: Eigenspace of invariant differential operators on an affine symmetric space, preprint.