

逆問題における、ある分岐の現象について

東大理 鈴木 貴 (Takashi Suzuki)

固有値問題の逆問題は、発展方程式の Identification 問題 (例えば Kitamura-Nakagiri [14]) と深くかかわっており、筆者は最近^後前者についていくつかの結果を得ることができた。(Suzuki [25-28] 及び、その引用文献) ここでは前者、特に逆 Sturm-Liouville 問題について最近得られた結果を報告してみたい。

逆 Sturm-Liouville 問題は、天文学者 V. Ambazumian の [1] より始まる。それは、Sturm-Liouville 作用素 $A_{p,R,H} (:-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))$ in $L^2(0,1)$ with $(-\frac{d}{dx} + R) \cdot |_{x=0} = (\frac{d}{dx} + H) \cdot |_{x=1} = 0$ とその固有値 $\delta(A_{p,R,H}) = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ ($-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$) によって決定しようという試みである。1946年に発表された Borg [2] は現在から見ても画期的な論文であり、そこで彼は次の三つのことを(主として Dirichlet 問題: $R=H=0$ 及び Neumann 問題: $R=H=\infty$ に対して)主張しているように思われる:

(I) p は一般に $\delta(A_{p,R,H})$ のみによって決まらないうが、 $\delta(A_{p,R,H})$

及び $\delta(A_p, R, H^*) (H^* \neq H)$ の両方によつて一意的に決定される。

(II) 但し, A_p, R, H が「対称」(後述)である場合には, その制限のもとに $\delta(A_p, R, H)$ が ρ を一意的に決定する。

(III) Hill 方程式のバンド構造 (例えば Magnus-Winkler [201]) が "0 有隙帯" であるポテンシャルは定数である。

1951年にロシア語で発表された Gel'fand-Levitan [91] は,

Borg [2] が一意性の定理のみであることに不満を持ち, ρ をスペクトル関数から再構成することを考へ, Gel'fand-Levitan 方程式と呼ばれる積分方程式を用いてそれに成功した。この論文の影響は大きくそれに関与されて Krein [15] は予測理論に対し, Marchenko [20] は逆散乱問題に対しそれぞれ一つの解決を提示した。特に Faddeev [5, 6]^(等) によつて継承・発展されていた逆散乱理論は, 1967年に Gardner-Greene-Kruskal-Miura [81] によつて KdV 方程式の特殊解 (ソリトン解) を解析的に求めるのに役立つことが発見されると, 1970年代には非線形波動を研究する重要な道具となり, おびただしい成果を生むことになった。(谷内-西原 [31], 戸田 [32], Faddeev [67] にはその後本質的な誤りが発見されて修正された。Chadan-Sabatier [3], Deift-Trubowitz [4] 等を参照。)

一方 1965年に Hochstadt [11] は Borg [2] の主張 (III) の証明を簡略にするとともに更に次のように改良した:

(Ⅲ) “1有限帯ポラニニャル”は一般化KdV方程式の定常解である
ことと同値。

1976年には Goldberg [10], Flaschka [7] 等多くの人々によつて次の
ように更に改良されることになった:

(Ⅲ') “ N 有限帯ポラニニャル”は“ N 次の一般化KdV方程式”の定常
解であることと同値。

このように Hill 方程式のバンド構造の研究は KdV 方程式の研究
と結びついて McKean-Moerbeke [22] をはじめとする深い成果
を生んだ。(田中-伊達[20]参照。)

ここで我々が考察する (I)(Ⅲ) の逆 Sturm-Liouville 問題は Borg [2]
以後どうか。1949年に Levinson [17] は (I)(Ⅲ) について [2] の問題を
一般の R, H に対して考え、やや [2] より弱い主張を簡明な証
明で示した。1964年に英訳が出版された Levin [16] によると、V.A.
Marchenko は、(I) において p ばかりでなく境界での反射係数 R ,
 H, H^* も決定されることを示したらしい。その後 ~~Levin~~ Levin-
Gasymov [18] は (I) について (p, R, H, H^*) を $\mathcal{J}(A_{p, R, H})$ と $\mathcal{J}(A_{p, R, H^*})$ によ
りて再構成する試みをした。これは一意性に関しては [2] を含む
わけではない。一方 1973年に Hochstadt [12] は (I) & (Ⅲ) に対して有
限個の $\mathcal{J}(A_{p, R, H})$ が未知の場合 p などのような自由度をもつことを
考察した。1978年には Hochstadt-Lieberman [13] が一般の場合に
 $p(x)$ ($0/2 \leq x \leq 1$), R, H を $\mathcal{J}(A_{p, R, H})$ によつて $p(x)$ ($0 \leq x \leq 1/2$) が一

意的に決定されることを示した。

最近筆者は発展方程式の Identification の研究において、Gel'fand-Levitan [9] に啓発されて筆者らが開発した方法 (Suzuki-Murayama [29], Suzuki [25-27]) によってこれらの逆 Sturm-Hiouville 問題の一意性に関する結果がすべて見通し良く改良できること (Suzuki [28]) 更により深いこともわかるようになることと知った。この作業はまだ完了したわけではないが、(II) についてはある程度の所まで来たので、ここに紹介してみたい。なお逆 Sturm-Hiouville 問題の安定性に関しては水谷明氏 (学習院大理) の考察がある。 ([23])

§1. Introduction.

Notation 1. $p \in C^1[0,1]$, $R \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$ に対して $A_{p,R,H}$ を Sturm-Hiouville 作用素: $-\frac{d^2}{dx^2} + p(x)$ in $L^2(0,1)$ with $(-\frac{d}{dx} + R) \cdot |_{x=0} = (\frac{d}{dx} + H) \cdot |_{x=1} = 0$ とする。 □

良く知られているように, $A_{p,R,H}$ の固有値 $\sigma(A_{p,R,H}) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ はすべて単純である: $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$ 。以下で考えるのは係数 $p \in C^1[0,1]$, $R \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$ が次の条件を満たす時の事である:

Definition 1. $A_{p,R,H}$ が「対称」(symmetric) であるとは,

(i) $p(1-x) = p(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) (以下このことを $p \in C_S^1[0,1]$ と書く)

が、

(ii) $R=H$

なることを言う。■

与えられた対称作用素 $A_{p,R,R}$ に対し, $\lambda_n(p,R)$ ($n=0,1,2,\dots$) をその固有値としよう。Borg [2], Levinson [17], Hochstadt [12] は次の事を示した:

Theorem 0. $f \in C_s^1[0,1]$ かつ

$$(1.1) \quad \lambda_n(f,R) = \lambda_n(p,R) \quad (n=1,2,\dots)$$

をみたすときは,

$$(1.2) \quad f = p$$

である。■

即ち, 「対称作用素」という version においては, 固有値が作用素を一意的に決定するのである。但し (1.1) において, $n=0$ に対しては何も仮定されていないことに注意しよう。

§2. Summary.

対称作用素 $A_{p,R,R}$ と $\Sigma \subset \mathcal{N} \equiv \{0,1,2,\dots\}$ が与えられたとする。

$\{\lambda_n(p,R)\}_{n=0}^{\infty}$ を $A_{p,R,R}$ の固有値として, 集合

$$\hat{Q} \equiv \hat{Q}_{p,R,\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \{(g,f) \in C_s^1[0,1] \times \mathbb{R} \mid \lambda_n(g,f) = \lambda_n(p,R) \ (n \in \mathcal{N} \setminus \Sigma)\}$$

を考えよう。これはその n 番目の固有値が, $n \in \Sigma$ を除いて $A_{p,R,R}$ のそれと一致する対称作用素の全体を表わしている。この時

Theorem A. $\hat{Q}_{p, R, \Sigma} = \{(p, R)\}$ なるための必要十分条件は,

$\Sigma = \emptyset$ である。 $\square$

この定理は, 対称作用素 $A_{p, R, R}$ の固有値 $\{\lambda_n(p, R)\}_{n=0}^{\infty}$ によって特徴付けられることを示す。§1の Theorem 0 においては, $\Sigma = \{0\}$ ($\neq \emptyset$) であつたが, かかりに $j=R$ の仮定されていた。後者が最小固有値に対する条件 $\lambda_0(p, j) = \lambda_0(p, R)$ を recover していたわけである。一般の $\Sigma = \{n_i\}$ ($n_i \in \mathcal{N}$) に対してはどうであるのか。

$$Q = Q_{p, R, n_1} \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in C_0^1[0, 1] \mid \lambda_n(g, R) = \lambda_n(p, R) \ (n \neq n_1)\}$$

$$(\equiv \text{Proj} \downarrow [\hat{Q}_{p, R, \Sigma n_1} \cap \{(g, j) \mid j=R\}])$$

とあつた。

Theorem B.

(i) $n_1 = 0$ の時 $Q_{p, R, n_1} = \{p\}$ 。

(ii) $n_1 \geq 1$ の時 $Q_{p, R, n_1} = \{p, p - 2(\frac{W'}{W})'\}$ 。 $\square$

Theorem B の (i) は Theorem 0 に他ならない。(但し, ここでは [2] [17] [12] とは異なる方法で示す。) (ii) において, ' は x に関する微分を表わす。 $W = W(x; p, R, n_1) \neq 0$ は x の関数で, 次のようにして定義される:

Notation 2. $p \in C^1[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$g = g(x; p, R, \lambda)$ は $(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))g = \lambda g$ ($0 \leq x \leq 1$), $g(0) = 1$, $g'(0) = R$ の解を,

$g^* = g^*(x; p, \lambda)$ は $(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))g^* = \lambda g^*$ ($0 \leq x \leq 1$), $g^*(0) = 0$, $g^*(1) = 1$ の解を,

それぞれ表わす。 $\square$

$\lambda = \lambda_n(p, R)$ ($n \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) に対して $\mathcal{G}(x; p, R, \lambda)$ は $A_{p, R, R}$ の固有関数になる。 $\langle \mathcal{G}, \mathcal{G}^* \rangle$ は方程式 $(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))\mathcal{G} = \lambda \mathcal{G}$ の解の基本系になる。

Notation 3. A_p^* は $-\frac{d^2}{dx^2} + p(x)$ in $L^2(0, 1)$ with $\cdot|_{x=0} = \cdot|_{x=1} = 0$ (Dirichlet 境界条件) と表わす。 A_p^* の固有値 $\sigma(A_p^*) = \{\lambda_n^*\}_{n=1}^\infty$ ($-\infty < \lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots \rightarrow \infty$) を $\lambda_n^* = \lambda_n^*(p)$ と書く。 $\square$

ここで $\lambda_n^*(p)$ を $n=1$ より番号を付けてあることに注意する。
 $\lambda = \lambda_n^*(p)$ ($n \geq 1$) に対して $\mathcal{G}^*(x; p, \lambda)$ は A_p^* の固有関数になる。

以上の準備のもとで W は次のように定義される:

Notation 4. $n_1 \geq 1$, $p \in C_0^1[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned} W &= W(x; p, R, n_1) \\ &= \mathcal{G}^{*'}(x; p, \lambda_{n_1}^*(p)) \mathcal{G}(x; p, R, \lambda_{n_1}(p, R)) \\ &\quad - \mathcal{G}^*(x; p, \lambda_{n_1}^*(p)) \mathcal{G}'(x; p, R, \lambda_{n_1}(p, R)) \end{aligned}$$

Remark 1. 固有関数の零点に関する Sturm-Liouville の定理及び比較定理によって $W \neq 0$, $(\frac{W'}{W})' \in C_0^1[0, 1]$ がわかる。 $\square$

Remark 2. もし $\lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(p)$ ならば, W は Wronskian となり, $W' \equiv 0$ である。実は $(\frac{W'}{W})' \equiv 0 \Leftrightarrow \lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(p)$ が成立する。 $\square$

一般に, $p \in C_0^1[0, 1]$ のとき $\mathcal{G}^*(1-x; p, \lambda_n^*(p)) = (-1)^{n+1} \mathcal{G}^*(x; p, \lambda_n^*(p))$ ($0 \leq x \leq 1$) (後述) であるが, これは独立で,

$$(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x))S = \lambda_{n_1}^*(p)S, \quad S(1-x; p, n) = (-1)^n S(x; p, n) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $S = S(\lambda; p, n) \neq 0$ が存在することになる。 $S(0) \neq 0$ であり、

$$R_n = R_n(p) \stackrel{\text{def}}{=} S'(0; p, n) / S(0; p, n)$$

とかくと、 R_n は S のとり方によらず $n \geq 1, p \in C_S^1[0, 1]$ によって決定すること、及び

$$\lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(p, R) \Leftrightarrow R = R_{n_1}(p)$$

が示される。特に、

Corollary. $\mathcal{Q}_{p, R, n_1} = \{p\}$ なるための必要十分条件は、

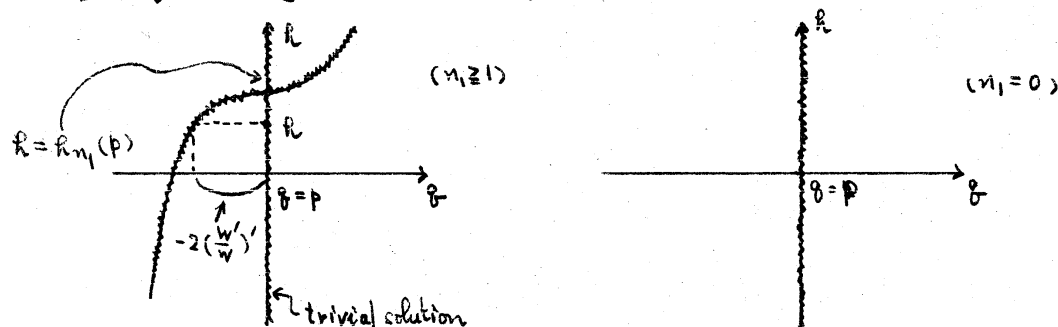
(i) $n_1 = 0$ 又は (ii) $n_1 \geq 1, R = R_{n_1}(p)$ である。 $\square$

このように、もとの問題は第3種の境界条件に関するものであるが、その答は Dirichlet 境界値問題と関連して述べられるのである。

Theorem B により、与えられた $p \in C_S^1[0, 1]$ と $n_1 \geq 1$ に対し、

$$\lambda_n(\vartheta, R) = \lambda_n(p, R) \quad (n \neq n_1)$$

とめ、 $(\vartheta, R) \in C_S^1[0, 1] \times \mathbb{R}$ の集合は下の左図のようになる：



R をパラメータとして見た時、 $n_1 \geq 1$ の時はこの集合が $R = R_{n_1}(p)$ において分岐をおこしていることがわかる。皮肉なことに、大域的な一意性が成立つのは分岐点の所だけである。 $n_1 = 0$ の

時は分岐は起こらない。

このような分岐が起こるのは, Identification の立場から望ましくない。条件 $j=r$ はこの意味では不完全なものであった。別の条件で分岐を引き起こさないものはないであろうか。

Theorem C. $A_{p,r,r}, A_{q,j,j}$ を対称作用素, $n_1 \in N \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ とする時,

$$\begin{cases} \lambda_n(q, j) = \lambda_n(p, r) & (n \neq n_1) \\ \frac{1}{2} q(0) - j^2 = \frac{1}{2} p(0) - r^2 \end{cases}$$

ならば, $q=p, j=r$ である。□

$\frac{1}{2} p(0) - r^2$ の物理的意味は明確でないが, この量はどのように固有値の条件を完全に1つ肩がけすることができる。

この論説は6つの節より成る。以下の§3ではこれらの定理の証明において重要な変形公式について述べ, §4, §5でそれぞれ Theorem A, B の証明の概略を説明する。§6では Theorem C の証明とその一般化について述べる。

§3. Preliminaries

直角二等辺三角形 $\triangle ABC$ において $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 斜辺 AB は x 軸又は y 軸に平行であるとして, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ をその内部とする。与えられた $r \in C^1(\bar{\Omega})$ に対し, 双曲型方程式

$$(3.1) \quad K_{xx} - K_{yy} * = r(x, y) K \quad (\bar{\Omega} \text{ 上})$$

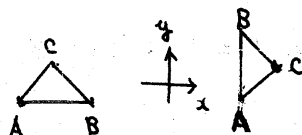
に関して次の命題が成立つ: 但し ν は $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルとする:

Proposition 1. 任意の $f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^2(\overline{BC})$; $f|_C = g|_C$ に

対し, (3.1) かつ

$$(3.2) \quad K|_{AC} = f, \quad K|_{BC} = g$$

なる $K \in C^2(\overline{\Omega})$ が唯一存在する。■



Proposition 2. 任意の $f \in C^2(\overline{AB})$, $g \in C^1(\overline{AB})$ に対し, (3.1)

かつ

$$(3.3) \quad K|_{AB} = f, \quad \frac{\partial K}{\partial \nu}|_{AB} = g$$

なる $K \in C^2(\overline{\Omega})$ が唯一存在する。■

Proposition 3. 任意の $f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^2(\overline{AB})$, $f|_A = g|_A$ に

対し, (3.1) かつ

$$(3.4) \quad K|_{AC} = f, \quad K|_{AB} = g$$

なる $K \in C^2(\overline{\Omega})$ が唯一存在する。■

Proposition 4. 任意の $f \in C^2(\overline{AC})$, $g \in C^1(\overline{AB})$, $R \in \mathbb{R}$ に対し,

(3.1) かつ

$$(3.5) \quad K|_{AC} = f, \quad \frac{\partial K}{\partial \nu} + R K|_{AB} = g$$

なる $K \in C^2(\overline{\Omega})$ が唯一存在する。■

Proposition 1, 2, 3 の証明は Picard [24] にある。Proposition 4 も同様である。実際, 与えられた境界条件をみだし,

$$(3.1') \quad K_{xx} - K_{yy} = 0 \quad (\overline{\Omega} \pm)$$

なる $K_0 = K_0(x, y) \in C^2(\bar{\Omega})$ は, f, g の積分を用いて具体的に書き表わすことができる。一方与えられた $F \in C^0(\bar{\Omega})$ に対し, 与えられた境界条件を $f=g=0$ に対しておとし,

$$(3.1'') \quad K_{xx} - K_{yy} = F(x, y) \quad (\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega)$$

なる $K = K(x, y)$ も具体的に書き表わすことができる。このことから, これらの問題が Volterra 型の積分方程式に帰着され, 反復法によって解くことができる。(最初に「反復法」を導入してその有用性を示したのは Picard 自身である。) Proposition 2 は双曲型方程式の Cauchy 問題として知られている。

次に, §2 Notation 2 で与えた $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x; p, r, \lambda)$ を思い起こそう。 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$ とする。

Lemma 1. 与えられた $p, g \in C^1[0, 1]$, $r, j \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(3.6.1) \quad K_{xx} - K_{yy} + p(y)K = g(x)K \quad (\bar{D} \setminus \partial D)$$

$$(3.6.2) \quad K(x, x) = (j - r) + \frac{1}{2} \int_0^x (g(s) - p(s)) ds \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(3.6.3) \quad K_y(x, 0) = rK(x, 0) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $K = K(x, y) = K(x, y; g, j; p, r) \in C^2(\bar{D})$ が唯一つ存在する。□

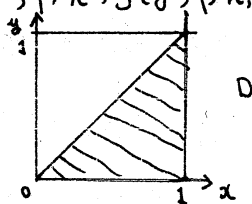
Lemma 2. (第1変形公式)

$$(3.7) \quad \mathcal{F}(x; g, j, \lambda) = \mathcal{F}(x; p, r, \lambda) + \int_0^x K(x, y; g, j; p, r) \mathcal{F}(y; p, r, \lambda) dy$$

が成立。□

Lemma 1 の存在証明は次のようになされる。

まず $g \in C^1[0, 1]$ を適当に $\hat{g} \in C^1[0, 2]$ に拡張し, $\hat{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$

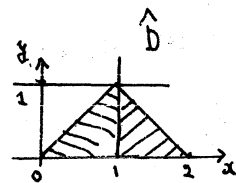


$0 < y < x < 2-y$ とおく。 Proposition 3 より,

$$(3.6.1') \quad \hat{K}_{xx} - \hat{K}_{yy} + p(y)\hat{K} = \hat{g}(x)\hat{K} \quad (\bar{D} \text{ 上})$$

$$(3.6.2') \quad \hat{K}(x, x) = (j-l) + \frac{1}{2} \int_0^x (g(s) - p(s)) ds \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(3.6.3') \quad \hat{K}_y(x, 0) = l \hat{K}(x, 0) \quad (0 \leq x \leq 2)$$

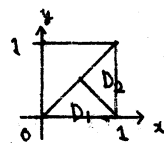


なる $\hat{K} \in C^2(\bar{D})$ が存在する。 $K = \hat{K}|_{\bar{D}}$ とおけばよい。一意性を

示すためには, $D \subseteq D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1-y\}$ と $D_2 = D \setminus \bar{D}_1$ に

分ける。(3.6.1),

$$(3.6.2'') \quad K(x, x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$



から (3.6.3) なる $K \in C^2(\bar{D})$ が $K \equiv 0$ であることを言う。また

Proposition 3 より $\bar{D}_1$ 上 $K = 0$, 次いで Proposition 1 より $\bar{D}_2$ 上 $K = 0$ が

導かれる。一方 Lemma 2 の証明は初等的である。(3.6)の右

辺 $\gamma(x)$ が

$$(3.8) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + g(x)\right)\gamma = \lambda \gamma \quad (0 \leq x \leq 1), \quad \gamma(0)=1, \quad \gamma'(0)=j$$

を満たすことを言いたえればよい。詳しい計算は Suzuki [26,

27] にある。//

上の Lemma の要点は K が λ に依存しないことである。そのために固有値に対する条件を K に対する条件に集約することが可能になるのである。

この節の最後に, 対称作用素 $A_{p,l,l}$ の固有関数 $\varphi(x; p, l, \lambda_n(p, l))$ に関する次の事実を注意しておく。簡単のため, λ は $\lambda_n(p, l) = \varphi(x; p, l, \lambda_n(p, l)) \quad (n \in \mathbb{N} \equiv \{0, 1, 2, \dots\})$ とおく。

Lemma 3. $g_n(1-x) = (-1)^n g_n(x)$ ($n \in \mathcal{N}$, $x \in [0, 1]$) が成立する。□

実際 $A_{p,R,R}$ が対称であるので $\chi_n(x) = g_n(1-x)$ も $\lambda = \lambda_n(p, R)$ に対応する $A_{p,R,R}$ の固有関数となり,

$$(3.9) \quad \chi_n(x) = c_n g_n(x) \quad (= g_n(1-x))$$

なる $c_n \in \mathbb{R}$ が存在する。 $c_n \neq 1$ ならば $g_n(\frac{1}{2}) = 0$, $c_n \neq -1$ ならば $g_n'(\frac{1}{2}) = 0$ であるが, $g_n(\frac{1}{2}) = g_n'(\frac{1}{2}) = 0$ ならば $g_n \equiv 0$ となり g_n の定義に反する。従って $g_n(\frac{1}{2}) \neq 0$ か $g_n'(\frac{1}{2}) \neq 0$ のどちらか一方に成る, 上のことから $c_n = \pm 1$ となる。Sturm-Liouville の定理より, g_n は $[0, 1]$ に丁度 n 個の零点を持つので $c_n = (-1)^n$ がわかる。//

Lemma 4. $\{g_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$, $\{g_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ はそれぞれ $L^2(0, \frac{1}{2})$ の完全直交系をなす。□

実際 Lemma 3 より $\varphi = g_{2m}$ は

$$(3.10) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\right)\varphi = \lambda\varphi \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \quad \varphi'(0) - R\varphi(0) = \varphi'(\frac{1}{2}) = 0$$

を $\lambda = \lambda_{2m}(p, R)$ に対しておとし, $[0, \frac{1}{2}]$ に丁度 m 個の零点を持つ。よって Sturm-Liouville の定理より, $\{g_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$ は固有値問題 (3.10) の固有関数全体に一致し, 完全直交系をなす。 $\{g_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ も同様である。//

§4. Outline of the Proof of Theorem A

$p \in C_S^1[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $\Sigma \subset \mathcal{N}$ に対し,

$$(4.1) \quad \hat{\mathcal{Q}}_{p,R,\Sigma} = \{(\varphi, j) \in C_S^1[0, 1] \times \mathbb{R} \mid \lambda_n(\varphi, j) = \lambda_n(p, R) \ (n \in \mathcal{N} \setminus \Sigma)\}$$

てある。

Theorem 1. $\hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \phi} = \{(p, R)\}$ $\square$

を

Theorem 2. $\hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_k\}} \neq \{(p, R)\}$ ($n_k \in \mathcal{N}$) $\square$

を示す。

今 $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_k\}}$ とすると,

$$(4.2) \quad g'(1; g, R, \lambda) + R g(1; g, R, \lambda) = 0 \quad (\lambda = \lambda_n(p, R), n \neq n_1)$$

が成立する。簡単のために以下 $g_n = g(\cdot; p, R, \lambda_n(p, R))$ とおくと,
第1変形公式 (3.7) により (4.2) は $K = K(x, y) = K(x, y; g, j; p, R)$ に対し
る関係式

$$(4.3) \quad (j - R + K(1, 1)) g_n(1) + \int_0^1 \{K_x(1, y) + j K(1, y)\} g_n(y) dy = 0 \quad (n \neq n_1)$$

と同値である。 $K \in C^2(\bar{D})$ 故,

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \{K_x(1, y) + j K(1, y)\} g_n(y) dy, \quad g_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 g_n(x)^2 dx$$

とすると, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{g_n^2} < \infty$ 特に $a_n / \sqrt{g_n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる。漸近等

式

$$(4.4) \quad g_n = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が知られている (例えば $\text{Levitán-Sargsjan [19]}$) ので, $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を得る。一方

$$(4.5) \quad g_n(x) = \cos n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (x \in [0, 1]; n \rightarrow \infty)$$

([19]) であるから, (4.3) は

$$(4.6.1) \quad j = R - K(1, 1),$$

$$(4.6.2) \quad \int_0^1 \{K_X(1, y) + f K(1, y)\} g_n(y) dy = 0 \quad (n \neq n_1)$$

を導く。次に Lemma 3 より

$$(4.7) \quad \begin{cases} g'(\frac{1}{2}; p, R, \lambda) = g'(\frac{1}{2}; f, \lambda) = 0 & (\lambda = \lambda_n(p, R); n: \text{even}, n \neq n_1) \\ g(\frac{1}{2}; p, R, \lambda) = g(\frac{1}{2}; f, \lambda) = 0 & (\lambda = \lambda_n(p, R); n: \text{odd}, n \neq n_1) \end{cases}$$

であるから同様に (4.5) を用いて

$$(4.8) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} K(\frac{1}{2}, y) g_n(y) dy = 0 \quad (n: \text{odd}, n \neq n_1)$$

$$(4.9) \quad K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} K_X(\frac{1}{2}, y) g_n(y) dy = 0 \quad (n: \text{even}, n \neq n_1)$$

を得る。(4.8), (4.9), Lemma 4 より

(イ) $n_1: \text{even}$ の時

$$(4.10.e) \quad K(\frac{1}{2}, y) = 0, \quad K_X(\frac{1}{2}, y) = c g_{n_1}(y) \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{2})$$

(ロ) $n_1: \text{odd}$ の時

$$(4.10.o) \quad K(\frac{1}{2}, y) = c g_{n_1}(y), \quad K_X(\frac{1}{2}, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{2})$$

なる $c \in \mathbb{R}$ が存在する。(ロ)の場合には $g_{n_1}(\frac{1}{2}) = 0$ であるのでいざ
 んの場合も (4.9) の $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ は自動的に満たされている。

以上によつて次の補題の $\Rightarrow$ が示された:

Lemma 5. $f \in C_S^1[0, 1]$, $p \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(f, p) \in \hat{Q}_{p, R, n_1} \Leftrightarrow (3.6) (4.6) (4.10) \text{ をみたす } K \in C^2(\bar{D}), c \in \mathbb{R} \text{ が存在する。}$$

$\Leftarrow$ が成立することを示そう。

(3.6) より $K = K(\cdot, \cdot; f, p; p, R)$ であり, (3.7) が成立する。

よ (4.6) より (4.2) が成立する。従つて各 $n \neq n_1$ に対し $n(n) \in \mathcal{N}$ が存

在して

$$(4.11) \quad \lambda_n(p, k) = \lambda_{m(n)}(g, j) \quad (n \neq n_1)$$

である。 $m(n) = n$ ($n \neq n_1$) を示すはよい。(4.10), (3.7), Lemma 4

より,

$$g(\frac{1}{2}; g, j, \lambda_n(p, k)) = 0 \quad (n: \text{odd}, n \neq n_1)$$

$$g'(\frac{1}{2}; g, j, \lambda_n(p, k)) = 0 \quad (n: \text{even}, n \neq n_1)$$

が成立するので, Lemma 3 より (4.11) において

$$(4.12) \quad m(n) \equiv n \pmod{2} \quad (n \neq n_1)$$

であることがわかる。一方漸近挙動

$$(4.13) \quad \lambda_n(p, k)^{\frac{1}{2}} = n\pi + O(\frac{1}{n}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad \lambda_n(g, j)^{\frac{1}{2}} = m\pi + O(\frac{1}{m}) \quad (m \rightarrow \infty)$$

([19]) より, (4.11) から

$$(4.14) \quad m(n) = n \quad (n \geq n_0)$$

なる $n_0 \in \mathcal{N}$ が存在することもある。更に

$$(4.15) \quad \text{写像 } \mathcal{N} \setminus \{n_1\} \ni n \mapsto m(n) \in \mathcal{N} \text{ は順序を保存する。}$$

(4.12) (4.14) (4.15) より $m(n) = n$ ($n \neq n_1$) が導かれる。 //

Proof of Theorem 1: $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, k, \phi}$ とすると, (4.2)に加えて

更に

$$g'(1; g, j, \lambda) + j g(1; g, j, \lambda) = 0 \quad (\lambda = \lambda_{n_1}(p, k))$$

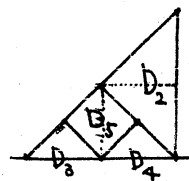
が成立する。Lemma 5 の $\Rightarrow$ の証明をたどると, この時 $C=0$ にな

る:

$$(4.16) \quad K(\frac{1}{2}, y) = K_x(\frac{1}{2}, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{2}) .$$

更に (4.6.2) において

$$(4.17) \quad Kx(1, y) + fK(1, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq 1)$$



も成立す。§3 Lemma 4 の証明において D を D_1 と D_2 に分けた。

更に D_1 と $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < \frac{1}{2} - y\}$, $D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - y\}$, $D_5 = D_4 \setminus (\overline{D_3} \cup \overline{D_4})$ に分ける。(3.6.1), (4.16), Proposition 2 によつて $\overline{D_5}$ 上 $K=0$, 従つて (3.6.1), (3.6.3), Proposition 4 によつて $\overline{D_3} \cup \overline{D_4}$ 上 $K=0$, 従つて更に (3.6.1), (4.17), Proposition 4 によつて $\overline{D_2}$ 上 $K=0$ となり, $K \equiv 0$ を得る。特に (3.6.2) より $g \equiv p$, $f \equiv h$ である。 //

次に,

Lemma 6. 与えられた $p, g \in C^1_0[0, 1]$, $h, f, c \in \mathbb{R}$ に対し, (3.6.1), (3.6.3), (4.6.2), (4.10) を満たす $K = K(x, y) \in C^2(\overline{D})$ は一意に存在し, 変数分離形

$$(4.18) \quad K(x, y) = g(x) g_{n_1}(y)$$

によつて与えられる。そこで $g = g(x) \in C^2[0, 1]$ は $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, h)$ に対し,

(i) n_1 : even の時

$$(4.19.e) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + g(x)\right)g = \lambda_{n_1} g \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \quad g(\frac{1}{2}) = 0, \quad g'(\frac{1}{2}) = c$$

(ii) n_1 : odd の時

$$(4.19.o) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + g(x)\right)g = \lambda_{n_1} g \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \quad g(\frac{1}{2}) = c, \quad g'(\frac{1}{2}) = 0$$

の一意解である。□

Proof of Lemma 6: $g_n(x) = g(x; p, h, \lambda_n(p, h))$ であつた。

(4.18) なる $K \in C^2(\bar{D})$ が (3.6.1) (3.6.3) (4.6.2) (4.10) をみたすことは容易に確かめられる。そのような $K \in C^2(\bar{D})$ が一意であることを言う。そのためには $c=0$ として (3.6.1), (3.6.3), (4.6.2), (4.10) をみたす $K \in C^2(\bar{D})$ が $K \equiv 0$ であることを示せばよい。ところが Theorem 1 の証明によってこの時必ず $\bar{D}_1$ 上 $K=0$ であることがわかる。一方 (4.6.2) より

$$K_x(1, y) + j K(1, y) = d g_{n_1}(y) \quad (0 \leq y \leq 1)$$

なる $d \in \mathbb{R}$ が存在するが、 $K=0$ ($\bar{D}_1$ 上) より $K_x(1, 0) = K(1, 0) = 0$ であるから $d=0$ かつ (4.17) が成立する。これより、Theorem 1 の証明によって $\bar{D}_2$ 上 $K=0$ も導びかれる。 //

Lemma 5, 6 によつて $g \in C_0^1[0, 1]$, $j \in \mathbb{R}$ に対し, $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, m}$

と (4.19) 及び

$$(4.20.1) \quad g(x) g_{n_1}(x) = (j - R) + \frac{1}{2} \int_0^x (g(s) - p(s)) ds$$

$$(4.20.2) \quad g(1) g_{n_1}(1) = R - j$$

なる $g \in C^2[0, 1]$, $c \in \mathbb{R}$ が存在することとは同値である。(4.19)

と (4.20.1) により, g, j を消去すると $g \in C^2[0, 1]$ は

$$(4.21) \quad \frac{d^2}{dx^2} g = (2 \frac{d}{dx} (g g_{n_1}) + p - g_{n_1}) g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

をみたすこと及び g, j は g を用いて

$$(4.22) \quad j = p + 2 \frac{d}{dx} (g g_{n_1}), \quad j = R + g(0)$$

と与えられることがわかる。 $g_{n_1}(1-x) = (-1)^{n_1} g_{n_1}(x)$ であるから,

(4.19) にかける g の $\alpha = \frac{1}{2}$ の条件を用いると, (4.21) の $\alpha = \frac{1}{2}$ で

の Cauchy 問題の解の一意性より,

$$(4.23) \quad g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が従う。特に $(g g_{n_1})(1-x) = -(g g_{n_1})(x)$ であるから, (4.20.2) は (4.22) より自動的に導びかれ, 更に (4.22) なる g は $g(1-x) = g(x)$ を満たす。以上によつて次の定理の前半が示された:

Theorem 3. $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, R)$, $g_{n_1} = g(\cdot; p, R, \lambda_{n_1}(p, R))$ とおく。

$(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_1\}}$ なるための必要十分条件は, (4.21) (4.23) なる $g \in C^2[0, 1]$ が存在して (g, j) が (4.22) のように与えられることである。 $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_1\}}$ と (4.21) (4.23) なる $g \in C^2[0, 1]$ のこの対応は 1 対 1 で, 特に $g \neq 0$ なる $(g, j) \neq (p, R)$ である。■

Theorem 3 の後半を証明しよう。実際 $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_1\}}$ に対し, (4.21), (4.23) なる $g_1, g_2 \in C^2[0, 1]$ が存在して

$$g = p + 2 \frac{d}{dx} (g_2 g_{n_1}), \quad j = R + g_2(0) \quad (l=1, 2)$$

が成立, にとすると, $K_l(x, y) = g_l(x) g_{n_1}(y) \in C^2(\bar{D})$ は (3.6) を与えられた (g, j) に対してあつた。(3.6) の解の一意性から, $K_1 \equiv K_2$ ($\bar{D}$ 上) であり, $g_1(x) = g_2(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) が従ふ。//

Proof of Theorem 2: 与えられた $p \in C_s^1[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ に対し, $C \in \mathbb{R}$ を十分小にとれば n_1 が even の時は $g(\frac{1}{2}) = 0$, $g'(\frac{1}{2}) = C$, n_1 が odd の時は $g(\frac{1}{2}) = C$, $g'(\frac{1}{2}) = 0$ をあたふ (4.21) の解 $g \neq 0$, $g \in C^2[0, 1]$ が存在する。その時 g は (4.23) をあたふ, (4.22) によつて (g, j) を定めれば Theorem 3 より $(g, j) \in \hat{\mathcal{Q}}_{p, R, \{n_1\}}$, $(g, j) \neq (p, R)$ が成立

> . //

Hochstadt [12] は $j=r$ の時 $(g, j) \in \hat{Q}_{p, r, n_1}$ (即ち $g \in Q_{p, r, n_1}$) であるとするとき, (4.21) なる $g \in C^2[0, 1]$ が存在して g が (4.22) 第一式のようになえられなくてはならないことを示している。けれども, (4.23) 及び (4.22) 第二式には交待っていない。彼の方法は境界値問題の Green 関数の構成法に基づくもので, 変形公式を用いた我々の方法とは異なる。彼はなお一般の有限集合 Σ に対して $(g, j) \in \hat{Q}_{p, r, \Sigma}$ ($j=r$) であるための必要条件を出しているが, 変形公式を用いればこれを必要十分条件に改良することも可能である。

§5. Outline of the proof of Theorem B

$\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, r)$, $g_{n_1} = g(\cdot; p, r, \lambda_{n_1}(p, r))$ とおいて

$$(5.1) \quad \frac{d^2}{dx^2} g = (2 \frac{d}{dx} (g g_{n_1}) + p - \lambda_{n_1}) g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.2) \quad g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を考えよう。Theorem 3 によつ

$$(5.3) \quad Q_{p, r, n_1} \equiv \{g \in C_0^1[0, 1] \mid \lambda_n(g, r) = \lambda_n(p, r) \ (n \neq n_1)\} \\ = \{p + 2 \frac{d}{dx} (g g_{n_1}) \mid g \in C^2[0, 1]; (5.1), (5.2) \text{ 及び } \underline{g(0)=0}\}$$

が成立し, Theorem B の証明は非線型方程式 (5.1) の研究に帰着される。

最初に

Theorem 4 $n_1=0$ ならば $\Omega_{p,k,n_1}=\{p\}$ □

を示す。

Lemma 7 (5.1) の解 $g \in C^2[0,1]$ は

$$(5.4) \quad g_{n_1} g' - g_{n_1}' g = (g_{n_1} g)^2 + \delta \quad (0 \leq x \leq 1)$$

をみたす。ここで $\delta \in \mathbb{R}$ は定数である。

Proof of Lemma 7:

$$(5.5) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\right) g_{n_1} = \lambda_{n_1} g_{n_1} \quad (0 \leq x \leq 1), \quad g_{n_1}(0)=1, \quad g_{n_1}'(0)=h$$

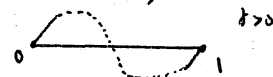
を思い起こすと, (5.1) より

$$(g_{n_1} g' - g_{n_1}' g)' = g_{n_1} g'' - g_{n_1}'' g = 2(g g_{n_1})' g_{n_1} = (2g g_{n_1})'$$

を得る。 //

Proof of Theorem 4: $n_1=0$ 故, $[0,1]$ 上 $g_{n_1} > 0$ である。 $g(0)=0$, (5.1), (5.2) なる $g \in C^2[0,1]$ が $g \equiv 0$ 以外に存在しないことを言う。 $g \neq 0$ とする。 (5.4) において $\delta=0$ ならば $g(0)=g'(0)=0$ となり (5.1) の Cauchy 問題の一意性より $g \equiv 0$ となる。 $\delta \neq 0$ とすると $g(x_0)=0$ なる $x_0 \in [0,1]$ に対し $\operatorname{sgn} g'(x_0) = \operatorname{sgn} \delta$ (一定) となるが, これは $g(0)=0$ 及び (5.2) より導かれる $g(1)=0$ に反す。 //

次に Theorem B の (ii) の証明にはいる。その前



に第3種境界値問題に対する Theorem 12 と同様にして, Dirichlet 問題に対する次の定理が成立することに注意しよう。 §2 の notation に留意して,

Theorem 1* $g, p \in C_3^1[0,1]$ に対し, $\lambda_n^*(g) = \lambda_n^*(p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\{1, 2, \dots\}$ な j は $g \equiv p$ である。 $\square$

Theorem 2*. $p \in C_S^1[0, 1]$, $n_1 \in \mathcal{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ に対し,

$$(5.6) \quad Q_{p, n_1}^* = \{g \in C_S^1[0, 1] \mid \lambda_n^*(g) = \lambda_{n_1}^*(p) \ (n \in \mathcal{N}^* \setminus \{n_1\})\}$$

と $\alpha' < \alpha$, $Q_{p, n_1}^* \neq \{p\}$ である。 $\square$

Theorem 3*. $\lambda_{n_1}^* = \lambda_{n_1}^*(p)$, $g_{n_1}^* = g^*(\cdot; p, \lambda_{n_1}^*(p))$ と $\alpha' < \alpha$ 時, $g \in$

Q_{p, n_1}^* なるための必要十分条件は

$$(5.7) \quad \frac{d^2}{dx^2} f = (2 \frac{d}{dx} (f g_{n_1}^*) + p - \lambda_{n_1}^*) f \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.8) \quad f(1-x) = (-1)^{n_1} f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $f \in C^2[0, 1]$ が存在して

$$(5.9) \quad g = p + 2 \frac{d}{dx} (f g_{n_1}^*)$$

が成立することである。 $g \in Q_{p, n_1}^*$ と $f \in C^2[0, 1]$ のこの対応は 1 対 1 で, 特に $f \neq 0$ なる $g \neq p$ である。 $\square$

これらの定理は Lemma 1~4 に対応する次の補題により証明される:

Lemma 1* 与えられた $p, g \in C^1[0, 1]$ に対し

$$(5.10.1) \quad F_{xx} - F_{yy} + p(y)F = g(x)F \quad (\bar{D})$$

$$(5.10.2) \quad F(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x (g(s) - p(s)) ds \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.10.3) \quad F(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $F = F(x, y) = F(x, y; g; p) \in C^2(\bar{D})$ が唯一存在する。 $\square$

Lemma 2* (第 3 変形公式). §2 Notation 2 の $g^*(x; p, \lambda)$ に関して,

$$(5.11) \quad g^*(x; g, \lambda) = g^*(x; p, \lambda) + \int_0^x F(x, y; g; p) g^*(y; p, \lambda) dy$$

が成立する。□

Lemma 3*. 簡単のため $g_n^*(x) = g^*(x; p, \lambda_n^*(p))$ ($n \in \mathcal{N}^*$) とおくと,
 $g_n^*(1-x) = (-1)^{n+1} g_n^*(x)$ ($n \in \mathcal{N}^*, x \in [0, 1]$) が成立する。□

Lemma 4*. $\{g_{2m}^*\}_{m=1}^\infty, \{g_{2m+1}^*\}_{m=0}^\infty$ は $L^2(0, \frac{1}{2})$ の完全直交系をなす。□

Theorem 1~3* は Theorem 1~3 と比べると似て異なるものがある。Theorem 1~3 においては境界条件は第3種であるがその反射係数 $k \in \mathbb{R}$ は固定せずに自由に動かして考えていた。それに対して Theorem 1~3* においては境界条件は Dirichlet に固定されている。それにもかかわるが Theorem 1~3* の結論は Theorem 1~3 の結論と全く対応している。その理由は Lemma 1* にある。適合性の条件によって (5.10.3) かつ $F(0,0)=0$ であり, (5.10.2) における $F(0,0)$ を (3.6.2) のように自由に動かす余地がなくなっているのである。

順番から行くと, (5.11) を第2変形公式と呼ぶのが適当であるが, 筆者はすでにそれを別の意味で使ってしまった。[28] には第2変形公式を用いた針金の丸い輪における熱方程式などに対する筆者の Identification の研究が引用されている。

さて実は $\delta(A_{p,k,k}) = \{\lambda_n(p,k)\}_{n=0}^\infty$ と $\delta(A_p^*) = \{\lambda_n^*(p)\}_{n=1}^\infty$ には次のような関係があるのである:

Theorem 5. $p, q \in C_3^1[0,1]$ と $n_1 \in \mathcal{N}^* \equiv \{1, 2, \dots\}$ に対し,
 (5.12) $\lambda_n^*(p) = \lambda_n^*(q) \quad (n \in \mathcal{N}^* \setminus \{n_1\})$

が成立すること、 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(5.13) \quad \lambda_n(p, \lambda) = \lambda_n(g, \lambda) \quad (n \in \mathcal{N} \setminus \{n_1\})$$

が成立することとは同値である。更にこの時 $g \neq p$ であれば

$$(5.14) \quad \lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(g, \lambda), \quad \lambda_{n_1}^*(g) = \lambda_{n_1}(p, \lambda)$$

が成立する。□

この定理において、 $n_1=0$ の時は (5.12) を $\lambda_n^*(p) = \lambda_n^*(g)$ ($n \in \mathcal{N}^*$) と見なすことによると Theorem 1* によつてこれは $p \equiv g$ を導く。一方 Theorem 4 即ち Theorem B の (i) によつて (5.13) ($n_1=0$) から $p \equiv g$ を得る。このように解釈すると Theorem 5 の前半は $n_1=0$ に対しても成立する。

この奇妙な定理はそれ自身興味深いものであるばかりでなく、Theorem B の (ii) の証明に本質的な役割を果たす重要なものである。もはや紙数もオーバーし当初の予定を変更して証明を省略しなればならぬのは残念であるが、現在準備中の筆者の論文を参照して下さるようお願いいたします。

Theorem 5 をもとにして Theorem B の (ii) の証明を考えてみよう。まず §2 の Corollary の (ii), 即ち

Theorem 6. $n_1 \geq 1$, $\lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(p, \lambda)$ ならば $Q_{p, \lambda, n_1} = \{p\}$ □

を示そう。実際この時 $g \in Q_{p, \lambda, n_1}$ は (5.13) をあたふ。 $g \neq p$ であると Theorem 5 より (5.14) が成立するが、仮定 $\lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(p, \lambda)$ より $\lambda_{n_1}(p, \lambda) = \lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(g, \lambda)$ である。即ち、

$$\lambda_n(g, R) = \lambda_n(p, R) \quad (n \in \mathbb{N})$$

となり, Theorem 1 から $g \equiv p$ となり, べき値である。 //

次に,

Theorem 7. $\mathbb{Q}_{p, R, n_1}$ の元 g と異なるものは高々 1 つ。 $\square$
 を示そう。実際, $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}_{p, R, n_1}$, $g_l \neq p$ ($l=1, 2$) とすると Theorem 5 より

$$\lambda_n^*(g_1) = \lambda_n^*(p) = \lambda_n^*(g_2) \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{n_1\})$$

$$\lambda_n^*(g_1) = \lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(g_2)$$

であるから $\lambda_n^*(g_1) = \lambda_n^*(g_2)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) となり Theorem 1* より $g_1 \equiv g_2$ を得る。 //

以上 Theorem 6, 7 と Remark 1, 2 により, 結局 Theorem B の (ii) を示すには,

Theorem 8. $n_1 \geq 1$ ならば $p - 2(\frac{W'}{W})' \in \mathbb{Q}_{p, R, n_1}$ $\square$

を証明しさえすればよいことがわかる。ここではこの定理を証明するにあたり, $p - 2(\frac{W'}{W})'$ が出て来た計算過程を述べてそれに替えたいたいと思う。証明の方向は, 以下の考察で自ずかと明らかになるものと思われる。

以下では, $n_1 \geq 1$, $g \in \mathbb{Q}_{p, R, n_1}$, $g \neq p$ と仮定して, g などのようなものでなければならぬかを見たい。 $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, R)$, $g_{n_1} = g(p, R, \lambda_{n_1}(p, R))$ とおくと $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, R)$ の時 Theorem 3 により,

$$(5.34) \quad \frac{d^2}{dx^2} g = (2 \frac{d}{dx} (g g_{n_1}) + p - \lambda_{n_1}) g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(5.35) \quad g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $g \in C^2[0,1]$, $g \neq 0$ が存在して

$$(5.36) \quad g - p = 2 \frac{d}{dx} (g g_{n_1})$$

となる。いま Theorem 5 と Theorem 3* によって $(\lambda_{n_1}^* = \lambda_{n_1}^*(p), g_{n_1}^* = g_{n_1}^*(\cdot; p, \lambda_{n_1}^*(p)))$ に対し,

(5.37) $\frac{d^2}{dx^2} f = (2 \frac{d}{dx} (f g_{n_1}^*) + p - \lambda_{n_1}^*) f \quad (0 \leq x \leq 1)$

$$(5.38) \quad f(1-x) = (-1)^{n_1} f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $f \in C^2[0,1]$, $f \neq 0$ が存在して,

$$(5.39) \quad g - p = 2 \frac{d}{dx} (f g_{n_1}^*)$$

が成立する。ここに Theorem 5 の証明は実は

$$(5.40) \quad \lambda_{n_1}^*(g) = \lambda_{n_1}(p, R) (= \lambda_{n_1}), \quad g = \text{constant} \times g^*(\cdot; g, \lambda_{n_1}^*(g))$$

$$(5.41) \quad \lambda_{n_1}(g, R) = \lambda_{n_1}^*(p) (= \lambda_{n_1}^*), \quad f = \text{constant} \times g(\cdot; g, R, \lambda_{n_1}(g, R))$$

が成立する。

簡単のため以下 $\lambda_{n_1} (= \lambda_{n_1}(p, R) = \lambda_{n_1}^*(g)) = \lambda$, $\lambda_{n_1}^* (= \lambda_{n_1}^*(p) = \lambda_{n_1}(g, R)) = \lambda^*$, $g_{n_1} (= g(\cdot; p, R, \lambda_{n_1}(p, R)) = g$, $g_{n_1}^* (= g^*(\cdot; p, \lambda_{n_1}^*(p))) = g^*$, $g(\cdot; g, R, \lambda_{n_1}(g, R)) = \chi$, $g^*(\cdot; g, \lambda_{n_1}^*(g)) = \chi^*$ と書く。 $f = \text{constant} \times \chi$ $g = \text{constant} \times \chi^*$ である。(5.36), (5.39) より

$$(\chi g^*)' = \text{constant} \times (\chi^* g)'$$

であるが、 $x=0$ において (左辺) $= R \times 0 + 1 \times 1 = 1$, $(\chi^* g)'(0) = 1 \times 1 + 0 \times R = 1$ であるので,

$$\chi g^* = \chi^* g + \text{constant}$$

となる。ここで $x=0$ とおき,

$$(5.42) \quad \chi \varphi^* = \chi^* \varphi$$

を得る。比較定理によって φ^* と φ の一方の零点は他方の相隣
る零点の間に1つずつあることがわかり、

$$(5.43) \quad \chi^* = c \varphi^*, \quad \chi = c \varphi$$

なる $c \in C^2[0,1]$ が存在することがわかる。

$$(5.44) \quad \alpha = 1 - \lambda^*$$

に対し、 $\chi^* \chi - \chi^* \chi'' = -\alpha \chi^* \chi$ が成立する。これに (5.43) を代入
すると、

$$\begin{aligned} (c'' \varphi^* + 2c' \varphi^{*'} + c \varphi^{*''}) c \varphi - c \varphi^* (c'' \varphi + 2c' \varphi' + c \varphi'') \\ = -\alpha c^2 \varphi^* \varphi \end{aligned}$$

となるが、 $\varphi^{*''} \varphi - \varphi^* \varphi'' = \alpha \varphi^* \varphi$ 、 $c \neq 0$ より

$$c'(\varphi^{*'} \varphi - \varphi^* \varphi') = -\alpha c \varphi^* \varphi$$

を得る。 $W = \varphi^{*'} \varphi - \varphi^* \varphi'$ であって、この $W' = \alpha \varphi^* \varphi$ 、よって

$$c'W = -cW' \quad \text{即ち} \quad (cW)' = 0$$

となる。 $\varphi(0) = \chi(0) = 1$ であるから、(5.43) より $c(0) = 1$ 、又 $W(0) =$

$1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$ であるので $cW = 1$ 、即ち

$$(5.43') \quad \chi^* = \varphi^* / W, \quad \chi = \varphi / W$$

が成立する。

これを利用して、 $\varphi = \lambda^* + \frac{\chi''}{\chi}$ ($\because \lambda(\varphi, R) = \lambda^*$) とおくと、

$\varphi = 1 - 2 \left(\frac{W'}{W} \right)'$ が出て来る。実際 (5.43') より

$$\frac{\chi''}{\chi} = \frac{\varphi''}{\varphi} + (-2 \varphi' W W' + 2 \varphi W'^2 - \varphi W W'') / W^2 \varphi$$

$$= p - 1 + (-2g'ww' + 2gW'^2 - gww'')/w^2g$$

となり,

$$g = p - 1 - \frac{2g'w'}{wg} + 2\frac{W'^2}{w^2} - \frac{w''}{w}$$

を得る。ここで $w' = dg * g$ を用いると, 簡単な計算から

$$g - p = 2\left(\frac{w'^2}{w^2} - \frac{w''}{w}\right) = -2\left(\frac{w'}{w}\right)'$$

が得られる。 //

§6. Outline of the proof of Theorem C.

ここで §2 の Theorem C, 即ち

Theorem 9. $p, g \in C^1[0, 1], R, j \in \mathbb{R}, n_1 \in \mathcal{N} \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し

$$(6.1) \quad \lambda_n(g, j) = \lambda_n(p, R) \quad (n \in \mathcal{N} \setminus \{n_1\})$$

が

$$(6.2) \quad \frac{1}{2}g(0) - j^2 = \frac{1}{2}p(0) - R^2$$

であるならば

$$(6.3) \quad g \equiv p, \quad j = R$$

である。 □

を示し, 更にその一般化について言及したい。

Proof of Theorem 9: §2 Notation 2 の $\mathcal{F}(\alpha; p, R, \lambda)$ を思い

出し, $p \in C^1[0, 1], R \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$(6.4) \quad \mathcal{F}(\alpha; p, R, \lambda) = \mathcal{F}'(1; p, R, \lambda) + R\mathcal{F}(1; p, R, \lambda)$$

とみると, 第1変形公式 (3.7) によって

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\lambda; g, j) &= \mathcal{P}'(1; g, j, \lambda) + j \mathcal{P}(1; g, j, \lambda) \\
 &= (\mathcal{P}'(1; p, R, \lambda) + K(1, 1; g, j; p, R) \mathcal{P}(1; p, R, \lambda) + j \mathcal{P}(1; p, R, \lambda) \\
 &\quad + \int_0^1 \{K_x(1, y; g, j; p, R) + j K(1, y; g, j; p, R)\} \mathcal{P}(y; p, R, \lambda) dy
 \end{aligned}$$

を得る。 $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_1}(p, R)$, $\mathcal{P}_{n_1} = \mathcal{P}_{n_1}(p, R)$ と書くと, §4 の Theorem 3 の証明によつて, 仮定 (6.1) の ε と ε' は K は

$$(6.5) \quad \frac{d^2}{dx^2} g = (2 \frac{d}{dx} (g \mathcal{P}_{n_1}) + p - \lambda_{n_1}) g \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$(6.6) \quad g(1-x) = (-1)^{n_1+1} g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

なる $g \in C^2[0, 1]$ があるとして,

$$(6.7) \quad K(x, y; g, j; p, R) = g(x) \mathcal{P}_{n_1}(y)$$

と表わされておき, (4.6.1) によつて $K(1, 1; g, j; p, R) = R - j$ であるので,

$$(6.8) \quad \mathcal{P}(\lambda; g, j) = \mathcal{P}(\lambda; p, R) + (g'(1) + j g(1)) \int_0^1 \mathcal{P}_{n_1}(y) \mathcal{P}(y; p, R, \lambda) dy$$

となる。一般に

$$\begin{aligned}
 &(\lambda - \mu) \int_0^1 \mathcal{P}(y; p, R, \mu) \mathcal{P}(y; p, R, \lambda) dy \\
 &= [\mathcal{P}(y; p, R, \mu) \mathcal{P}(y; p, R, \lambda) - \mathcal{P}(y; p, R, \mu) \mathcal{P}'(y; p, R, \lambda)]_{y=0}^{y=1} \\
 &= \mathcal{P}'(1; p, R, \mu) \mathcal{P}(1; p, R, \lambda) - \mathcal{P}(1; p, R, \mu) \mathcal{P}'(1; p, R, \lambda)
 \end{aligned}$$

であるから, $a = g'(1) + j g(1)$ と $a' < \infty$ と,

$$\begin{aligned}
 (6.9) \quad (\lambda - \lambda_{n_1}) \mathcal{P}(\lambda; g, j) &= (\lambda - \lambda_{n_1}) \mathcal{P}(\lambda; p, R) + a \{ \mathcal{P}_{n_1}'(1) \mathcal{P}(1; p, R, \lambda) \\
 &\quad - \mathcal{P}_{n_1}(1) \mathcal{P}'(1; p, R, \lambda) \} \\
 &= (\lambda - \lambda_{n_1} - a \mathcal{P}_{n_1}(1)) \mathcal{P}(\lambda; p, R) \quad (\because \mathcal{P}_{n_1}'(1) = -R \mathcal{P}_{n_1}(1))
 \end{aligned}$$

が成立する。従つて

$$(6.10) \quad a \equiv g'(1) + jg(1) = 0$$

であるならば

$$(6.11) \quad \rho(\lambda; g, j) = \rho(\lambda; p, R)$$

となる。 $\rho(\cdot; p, R) = 0$ の零点全体が $\{\lambda_n(p, R)\}_{n=0}^{\infty}$ であり、いづれも単純 (192) であるので、

$$(6.12) \quad \lambda_n(g, R) = \lambda_n(p, R) \quad (n \in \mathcal{N})$$

となり、Theorem 1 によって (6.3) が成立する。

さて a を計算してみよう。Theorem 3 により

$$(6.13) \quad p - j = 2 \frac{d}{dx}(g g_{n_1}), \quad j - R = g(0) (= (g \cdot g_{n_1})(0))$$

であるので、

$$\begin{aligned} a &= g'(1) + jg(1) = \pm(g'(0) - jg(0)) \quad (\cdots (6.6)) \\ &= \pm(g'(0) - jg(0))g_{n_1}(0) = \pm\{(g g_{n_1})'(0) - g(0)g_{n_1}'(0) - jg(0)g_{n_1}(0)\} \\ &= \pm\{(g g_{n_1})'(0) - (j+R)(g g_{n_1})(0)\} \\ &= \pm\left\{\frac{1}{2}(g(0) - p(0)) - (j+R)(j-R)\right\} \end{aligned}$$

となり、(6.2) の時確かに $a=0$ であることがわかる。 //

Theorem 9 (即ち Theorem C) は次のように一般化できることがわかる。その前に次の事実がある：

Theorem 10 $\Sigma = \{n_\ell \mid 1 \leq \ell \leq N\} \subset \mathcal{N}$ を有限集合、 $p, g \in C_S^1[0,1]$,

$R, j \in \mathbb{R}$ とする時、

$$(6.14) \quad \lambda_n(g, j) = \lambda_n(p, R) \quad (n \in \mathcal{N} \setminus \Sigma)$$

であるならば、

$$(6.15) \quad r \equiv g - p \in C^2[0, 1]$$

である。□

これに留意して、

Theorem 11. $p, g \in C_2^1[0, 1]$, $R, j \in \mathbb{R}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \neq n_2$ とする時、

$$(6.16) \quad \lambda_n(g, j) = \lambda_n(p, R) \quad (n \neq n_1, n_2)$$

$$(6.17) \quad \frac{1}{2} r(0) = (j-R)(j+R) \quad (\Leftrightarrow (6.2))$$

$$(6.18) \quad \frac{1}{2} r''(0) = \frac{1}{2} (j-R)(p'(0) + g'(0)) + (j+R)r'(0) - (j-R)(j+R)(j^2 + jR + R^2)$$

ならば、(6.3) が成立する。□

(6.16) を更にゆるめた時、それを recover するような (6.17)

(6.18) のような条件があるものと期待されるが未だ求め得て

いない。但し、その時は p, g の境界点 $x=0$ における微分可能性をもっと高く仮定する必要があるように思われる。

References

- [1] Ambarzumian, V., Z. Phys., 53 (1929) 690-695.
- [2] Borg, G., Acta Math., 78 (1946) 1-96.
- [3] Chadan, K., Sabatier, P.C., Inverse problems in quantum scattering theory, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1977.
- [4] Deift, P., Trubowitz, E., Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979) 121-251.
- [5] Faddeev, L.D., Uspehi Mat. Nauk. 14 (1959) no.4 (88) 57-119; English transl., J. Math. Phys., 4 (1963) 72-104.
- [6] —. Trudy Mat. Inst. Steklov 73 (1964) 314-336; English transl., A.M.S. Transl. ser. 2., 65 (1967) 139-166.

- [7] Flashka, H., Arch. Rat. Mech. Anal., 59 (1975) 293-304.
- [8] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., Pys. Rev. Lett., 19 (1967) 1095-1097.
- [9] Gel'fand, I.M., Levitan, B.M., Izvest. Akad. Nauk. SSSR 15 (1951) 309-360; English transl., A.M.S. Transl. ser. 2., 1 (1955) 253-304.
- [10] Goldberg, W., J. Math. Anal. Appl., 55 (1976) 549-554.
- [11] Hochstadt, H., Arch. Rat. Mech. Anal., 19 (1965) 353-362.
- [12] —, Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973) 715-729.
- [13] —, Lieberman, B., SIAM J. Appl. Math., 34 (1978) 676-680.
- [14] Kitamura, S., Nakagiri, S., SIAM J. Control & Optimization, 15 (1977) 785-802.
- [15] Krein, M.G., Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 87 (1952) 881-884.
- [16] Levin, B.Y., Distributions of zeros of entire functions,; English transl., A.M.S. Providence, Rhode Island, 1964.
- [17] Levinson, N., Mat. Tidsskr. B., (1949) 25-30.
- [18] Levitan, B.M., Gasymov, M.G., ; English transl., Russian Math. Surveys, 19 (1964) 1-63.
- [19] Levitan, B.M., Sargsjan, Introduction to spectral thory,; English transl., A.M.S. Providence, Rhode Island, 1975.
- [20] Magnus, W., Winkler, S., Hill's equation, Dover, New York, 1979.
- [21] Marchenko, V.A., Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 104 (1955) 695-698.
- [22] Mckean, H.P., Morebeke, P., Inv. Math., 30 (1975) 217-274.
- [23] Mizutani, A., to appear.
- [24] Picard, E., Leçons sur quelques types simples d'equation aux dérivées partielles, Paris-Imprimerie Gauthier-Villars, Paris, 1950. (山口昌哉・田村祐三訳, 偏微分方程式論, 現代数学社, 1977).
- [25] Suzuki, T., 熱方程式の逆問題, C&A セミナー会報 16, 13-20; 17, 10-11 (1981).
- [26] —, 熱方程式の逆問題, 数学 34 (1982) 55-64.
- [27] —, IN Glowinski, R., Lions, J.L. (eds.). Computing Me-

thods in Applied Sciences and Engineering, V., 659-668, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[28] —, to appear in "U.S.-Japan seminar on nonlinear partial differential equations in applied sciences"

[29] —, Murayama, R., Proc. Japan Akad., 56 (1980) 259-263.

[30] 田中俊一・伊達悦朗, KdV 方程式, 紀伊国屋書店, 1979.

[31] 谷内俊弘・西原功修, 非線形波動, 岩波書店, 1977.

[32] 戸田益和, 非線形格子力学, 岩波書店, 1978.