

On the almost sure convergence of the quadratic variation of the Brownian motion

富山大学理学部 保坂しのぶ (Shinobu Hosaka)

1 はじめに

Brownian motion に対する quadratic variation の概収束性についての主な結果をいくつか紹介する. $W = (W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ を 1 次元の Brownian motion, $\pi_n \equiv \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_{k_n}^n\}$ を $[0, 1]$ の分割とし,

$$Q(\pi_n) \equiv \sum_{i=1}^{k_n} (W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n})^2$$
$$d(\pi_n) \equiv \max \{t_i^n - t_{i-1}^n : i = 1, 2, \dots, k_n\}$$

とおく. このとき,

問題: $n \rightarrow \infty$ のとき $Q(\pi_n)$ は 1 に概収束するか?

これについて, 次の結果はよく知られている.

定理 1 (P.Lévy (1940))

$$\pi_n \subset \pi_{n+1} \quad , \quad d(\pi_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$
$$\implies Q(\pi_n) \rightarrow 1 \quad a.s. \quad (n \rightarrow \infty) \quad .$$

これは, $[0, 1]$ の分割が文字どおり細分化になっている場合である. それでは, 分割がこのように細分化になっていない場合, つまり $\pi_n \not\subset \pi_{n+1}$ のときはどのようなことがいえるであろうか. 不思議なことに, この場合は必ずしも 1 に概収束しない. 従って, 概収束をするためには何らかの条件が必要となる.

2 $d(\pi_n)$ の order と $Q(\pi_n)$

結果を発表順に従って、まず述べておく.

定理 2 (F.Kozin (1957))

$$d(\pi_n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\pi_n) = 1 \quad a.s.$$

定理 3 (R.M.Dudley (1973))

$$d(\pi_n) = o\left(\frac{1}{\log n}\right) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\pi_n) = 1 \quad a.s.$$

定理 3 は定理 2 の改良になっている.

定理 4 (W.Fernandez (1974)) 次を満たすような分割の系列 π_n が存在する :

$$d(\pi_n) = O\left(\frac{1}{\log n}\right),$$

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} Q(\pi_n) > 1\right) = 1.$$

定理 5 (A.Wróbel (1982)) 任意の $C > 0$ に対して、次を満たすような分割の系列 π_n が存在する :

$$d(\pi_n) = o(\log^{-\alpha} n) \quad \text{for } 0 < \forall \alpha < 1,$$

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} Q(\pi_n) > c\right) = 1.$$

$o(\log^{-\alpha} n)$ よりも $o\left(\frac{1}{\log n}\right)$ の方が条件としては強い. 従って, 定理 4 の条件の $d(\pi_n)$ の order を少しゆるめると, より強い結果である定理 5 が得られることがわかる.

本稿では, 定理 3 と定理 5 の証明を紹介する.

3 定理 3 の証明

まず次の補題を要する.

補題 1 (D.L.Hanson - F.T.Wright (1971)) $X_1, X_2, \dots, X_n$ を独立な確率変数で, 分布は $N(0, 1)$ とし, $Y \equiv \sum_{i=1}^n a_i X_i^2$ とおく. ここで a_i は定数. このとき次を満たすような定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在する:

任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$P(|Y - 1| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\alpha}.$$

$$\text{ここで, } \alpha \equiv \min \left\{ \frac{c_1 \varepsilon}{\max |a_i|}, \frac{c_2 \varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\}.$$

講演の際に, この補題の中の定数 a_i について, 条件が必要ではないかと指摘を受けた. しかし, Hanson - Wright の結果は, 特に条件はなくて成立する.

この結果を用いて定理 3 の証明をする.

$\pi \equiv \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ を $[0, 1]$ の分割とし,

$$\begin{aligned} A_i &\equiv [t_{i-1}, t_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ a_i &\equiv \mu(A_i) \quad (\mu \text{ は Lebesgue measure}), \\ X_i &\equiv \frac{1}{\sqrt{a_i}} \int_0^1 I_{A_i}(t) dW_t \end{aligned}$$

とおく. このとき, $X_1, X_2, \dots, X_n$ は独立でかつ $N(0, 1)$ に従う. また, $\sum_{i=1}^n a_i X_i^2 = Q(\pi)$ である. 従って補題 1 より, ある $c_1, c_2 > 0$ が存在して,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Q(\pi) - 1| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp \left(- \min \left\{ \frac{c_1 \varepsilon}{d(\pi)}, \frac{c_2 \varepsilon^2}{d(\pi)} \right\} \right).$$

従って, $\varepsilon_k \downarrow 0$ に対して,

$$\sum_k P(|Q(\pi_k) - 1| \geq \varepsilon_k) < \infty \tag{1}$$

を示せば十分である．そこで， $\varepsilon_k \equiv \sqrt{\frac{2}{c_2} d(\pi_k) \log k}$ とおくと，定理 3 の仮定より $\varepsilon_k \downarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)．従って，

$$\begin{aligned} P(|Q(\pi_k) - 1| \geq \varepsilon_k) &\leq 2e^{-2 \log k} \\ &= \frac{2}{k^2} \quad \text{for sufficient large } k. \end{aligned}$$

よって，(1) が成立する．

4 定理 5 の証明

まず定義を 1 つ与える．

定義 1 $c > 0$, $\omega \in \Omega$,

$[a, b]$ has ω -weight c if $(W_a(\omega) - W_b(\omega))^2 \geq 2c(b-a)$.

注意： ω -weight c をもつ確率は区間によらない．実際に，

$$\begin{aligned} P(\omega : [a, b] \text{ has } \omega\text{-weight } c) &= P(\omega : (W_a(\omega) - W_b(\omega))^2 \geq 2c(b-a)) \\ &= P\left(\omega : \left(\frac{W_b(\omega) - W_a(\omega)}{\sqrt{b-a}}\right)^2 \geq 2c\right) \\ &= 2 \int_{\sqrt{2c}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

そこで， $p \equiv P(\omega : [a, b] \text{ has } \omega\text{-weight } c)$ とおく．明らかに， $0 < p < 1$ である．

定理 5 の証明に入る．

$c > 0$ を固定し， $m \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ は自然数全体)， $\varepsilon > 0$ とする．

4.1 (m, ε) - set S の構成

ここでは，

$$\forall \pi \in S, \quad d(\pi) \leq \frac{1}{m},$$

$$P(\omega : \exists \pi \in S; Q(\pi)(\omega) \geq c) \geq 1 - \varepsilon$$

を満たす分割の集合 (m, ε) - set S を構成する.

$N \ni n, M, j$ ($j \leq M-1$) に対し, 次を定義する.

$$\begin{aligned} J(n, [a, b]) &\equiv [a, b] \text{ を } n \text{ 等分した小区間の全体} \\ A(n, j, M, \omega) &\equiv \left\{ I : I \in J\left(n, \left[\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}\right]\right), \quad I \text{ has } \omega\text{-weight } c \right\} \end{aligned}$$

まず, m_1 を次を満たすように十分大きくとる:

$$P\left(\omega : \#A(m_1, j, m, \omega) \geq \frac{m_1 p}{2} \quad \text{for } 0 \leq \forall j \leq m-1\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{N} \quad (2)$$

注意: $q(n) \equiv \sum_{k < \frac{np}{2}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ とおくと, (2) の左辺は

$(1 - q(m_1))^m$ である. $n \rightarrow \infty$ のとき, $q(n) \rightarrow 0$ なので, m_1 を大きくと

れる.

そして, m_{i+1} を次を満たすように十分大きくとる:

$$P\left(\omega : \#A(m_{i+1}, j, M_i, \omega) \geq \frac{m_{i+1} p}{2} \quad \text{for } 0 \leq \forall j \leq M_i - 1\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{N} \quad (3)$$

ただし, $M_i \equiv m m_1 \cdots m_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) とする.

このようにして, $m_1, m_2, \dots, m_N$ をとる.

ここで, 次のような集合を考える. ($[\cdot]$ はガウス記号)

$$\begin{aligned} B_1(\omega) &\equiv A(m_1, j, m, \omega) \text{ に属する } \left[\frac{m_1 p}{2}\right] \text{ 個の区間} \\ &\quad (j = 0, 1, \dots, m-1) \text{ の全体} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i+1}(\omega) &\equiv \bigcup_{k=1}^i B_k(\omega) \text{ の区間を除いた残りの部分で, } A(m_{i+1}, j, M_i, \omega) \\ &\quad \text{に属する } \left[\frac{m_{i+1} p}{2}\right] \text{ 個の区間 } (j = 0, 1, \dots, M_i - 1) \text{ の全体} \end{aligned}$$

$$\pi(\omega) \equiv \left\{ \bigcup_{i=1}^N B_i(\omega) \text{ の区間の端点} \right\} \cup \left\{ \frac{j}{m} : j = 0, 1, \dots, m \right\}$$

とする. このとき, 次のことがいえる.

$$(a) \quad d(\pi(\omega)) \leq \frac{1}{m}$$

$$(b) \quad P(Q(\pi(\omega)) > c) \geq 1 - \varepsilon$$

(a) は $\pi(\omega)$ のつくり方より明らかなので, (b) について示す.

$$E_i \equiv \left\{ \omega : \#A(m_i, j, M_{i-1}, \omega) \geq \frac{m_i p}{2} \quad \text{for } 0 \leq \forall j \leq M_{i-1} - 1 \right\}$$

とおく ($i = 1, 2, \dots, N$. ただし, $M_0 = m$).

$P(E_i) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{N}$ より, $P\left(\bigcap_{i=1}^N E_i\right) \geq 1 - \varepsilon$ である. 従って,

$$\omega \in \bigcap_{i=1}^N E_i \implies Q(\pi(\omega)) > c$$

を示せばよい. ところで,

$$Q(\pi(\omega)) = \sum_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \geq 2c \sum'_i (t_i - t_{i-1}) \quad .$$

ここで, Σ' は, ω -weight c をもつ区間についてのみ和をとるものとする. そこで, l_i を $B_i(\omega)$ に属する区間の長さの和とすると,

$$l_1 = \frac{1}{M_1} \left\lfloor \frac{m_1 P}{2} \right\rfloor m$$

より,

$$\frac{p}{2} \geq l_1 \geq \frac{p}{2} - \frac{1}{m_1} \equiv \frac{p}{2} + r_1(m_1) \quad .$$

計算をつづけると,

$$\begin{aligned} l_2 &= (1 - l_1) \frac{1}{m_2} \left\lfloor \frac{m_2 P}{2} \right\rfloor \\ &\geq \left(1 - \frac{p}{2}\right) \frac{1}{m_2} \left(\frac{m_2 p}{2} - 1\right) \\ &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{2}\right) - \frac{1}{m_1} \left(1 - \frac{p}{2}\right) \equiv \frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{2}\right) + r_2(m_1, m_2) \\ &\dots \\ l_i &\geq \frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{i-1} + r_i(m_1, m_2, \dots, m_i) \quad . \end{aligned}$$

従って, $r(m_1, m_2, \dots, m_N) \equiv \sum_{i=1}^N r_i(m_1, m_2, \dots, m_i)$ とすると,

$$\begin{aligned}
 Q(\pi(\omega)) &\geq 2c \sum_{i=1}^N l_i \\
 &\geq 2c \sum_{i=1}^N \frac{p}{2} \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{i-1} + 2cr(m_1, m_2, \dots, m_N) \\
 &= 2c \frac{p}{2} \frac{1 - \left(1 - \frac{p}{2}\right)^N}{\frac{p}{2}} + 2cr(m_1, m_2, \dots, m_N) \\
 &\geq c + 2cr(m_1, m_2, \dots, m_N) \quad .
 \end{aligned}$$

$m_1, m_2, \dots, m_N$ は十分大きくとるので, $r(m_1, m_2, \dots, m_N)$ は小さくできる. よって,

$$\omega \in \bigcap_{i=1}^N E_i \implies Q(\pi(\omega)) > c \quad .$$

以上より, (a), (b) が成立するので, (m, ε) -set が構成できた.

4.2 (π_n) の構成

$p \equiv P(\omega : [a, b] \text{ has } \omega\text{-weight } c)$ に対し, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して, $\left(1 - \frac{p}{2}\right)^N \leq \frac{1}{2}$ をみたす. このような N をとって固定し, $\varepsilon(j) \equiv \frac{N}{j^2} (j \in \mathbf{N})$ とおく. この $j, \varepsilon(j)$ に対し, $(j, \varepsilon(j))$ - set を考える.

$$k_j \equiv \min \{ \#S : S \text{ is } (j, \varepsilon(j)) \text{ - set} \}$$

と k_j をおく. そして, S_j を $\#S_j = k_j$ となる $(j, \varepsilon(j))$ - set とし, その S_j の要素を並べて (π_n) とする. つまり,

$$(\pi_n) : \underbrace{\pi_1, \dots, \pi_{k_1}}_{S_1 \text{ の要素}}, \underbrace{\pi_{k_1+1}, \dots, \pi_{k_1+k_2}}_{S_2 \text{ の要素}}, \pi_{k_1+k_2+1}, \dots$$

4.3 $d(\pi_n) = o(\log^{-\alpha} n)$ for $0 < \forall \alpha < 1$ について

まず, n を十分大きいとすると, 次をみたす $r > 0$ が存在する:

$$q(n) \equiv \sum_{k < \frac{np}{2}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq e^{-\frac{n}{r}}.$$

そして, $\eta \equiv \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)^{\frac{1}{m}}$ として,

$$m_1 \equiv -[r \log(1 - \eta)] \quad (4)$$

$$m_{i+1} \equiv -\left[r \log \left(1 - \eta^{\frac{m}{M_i}}\right)\right] \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (5)$$

とおくと, (2), (3) を満たす. 実際, (2) は, $P(E_1) = (1 - q(m_1))^m$, (3) は, $P(E_{i+1}) = (1 - q(m_{i+1}))^{M_i}$ であるので, 代入して計算する.

このとき,

$$M_N = mm_1 \cdots m_N \leq \beta mm_1^N \quad \text{for some } \beta > 1.$$

これより,

$$k_m \leq 2^{M_N} \leq a^{m(\log m)^N} \quad \text{for some constant } a. \quad (6)$$

実際に, これを示すために次の不等式を用いる.

$$0 < \forall \gamma < 1 \quad \text{fixed},$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{m}} \geq \frac{\gamma}{m^3}.$$

これを用いると,

$$\begin{aligned} 1 - \eta(m) &= 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon(m)}{N}\right)^{\frac{1}{m}} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{m}} \\ &\geq \frac{\gamma}{m^3}. \end{aligned}$$

(4) にこれを代入してまとめると,

$$m_1 \leq C_1 \log m \quad \text{for some constant } C_1.$$

従って,

$$\begin{aligned} 2^{M_N} &\leq 2^{\beta m m_1^N} \\ &\leq 2^{\beta C m (\log m)^N} \quad \text{for some constant } C \end{aligned}$$

となり, (6) を得る. 従って,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m k_j &\leq m k_m \\ &\leq m a^{m(\log m)^N} \\ &\leq b^{m(\log m)^N} \quad \text{for some constant } b > a. \end{aligned}$$

示したいことは, $0 < \forall \alpha < 1$ に対して, $d(\pi_n) = o(\log^{-\alpha} n)$ である. このとき, $\alpha < \frac{1}{1+\delta}$ となるような $\delta(>0)$ が存在する. そして,

$$\begin{aligned} m(n) &\equiv \max \left\{ m : b^{m(\log m)^N} < n \right\} \\ \overline{m}(n) &\equiv \max \left\{ m : b^{m^{1+\delta}} < n \right\} \end{aligned}$$

とおくと, 十分大きな n に対して,

$$m(n) > \overline{m}(n)$$

である. このとき, $1 \leq \forall j \leq m(n)$ に対し, $\pi_n \notin S_j$. 実際に, n を固定すると, $\pi_n \in S_{j_0}$ となる $j_0 \in \mathbf{N}$ が存在する. このとき,

$$n \leq \sum_{j=1}^{j_0} k_j \leq b^{j_0(\log j_0)^N}$$

となるので, $j_0 > m(n)$ である. 従って,

$$\begin{aligned} d(\pi_n) &\leq \frac{1}{m(n) + 1} \\ &\leq \frac{1}{\overline{m}(n) + 1} \\ &\leq (\log_b n)^{-\frac{1}{1+\delta}} \end{aligned}$$

より, $d(\pi_n) = o(\log^{-\alpha} n)$ を得る.

4.4 $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} Q(\pi_n) > c\right) = 1$ について

4.1 の (m, ε) - set の構成よりすぐに示すことができる. 実際に,

$$P\left(\omega : \exists \pi^{(j)} \in S_j; Q\left(\pi^{(j)}\right)(\omega) > c\right) \geq 1 - \varepsilon(j).$$

このとき, complement をとることにより,

$$P\left(\omega : \forall \pi^{(j)} \in S_j, Q\left(\pi^{(j)}\right)(\omega) \leq c\right) < \varepsilon(j) = \frac{N}{j^2}.$$

最後に, j について両辺の和をとると右辺は収束するので, Borel-Cantelli's lemma より結果を得る.

以上で, 定理 5 が証明された.

参考文献

- [1] R.M.Dudley. *Sample functions of the Gaussian process*, Ann. Probab. 1 (1973), 66-103.
- [2] W.Fernandez. *On almost sure convergence of quadratic Brownian variation*, Ann. Probab. 2 (1974), 551-552.
- [3] D.L.Hanson-F.T.Wright. *A bound on tail probabilities for quadratic forms in independent random variables*, Ann. Math. Statist. 42 (1971), 1079-1083.
- [4] F.Kozin. *A limit theorem for processes with stationary independent increments*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 960-963.
- [5] P.Lévy. *Le mouvement brownien plan*, Amer. J. Math. 62 (1940), 487-550.
- [6] A.Wróbel. *On the almost sure convergence of the square variation of the Brownian motion*, Probab. Math. Statist. 3 (1982), 97-101.