

Davey-Stewartson 方程式の一般の初期値問題の数値計算と厳密解

宇都宮大工 矢嶋徹 (Tetsu Yajima)

山形大工 西成活裕 (Katsuhiko Nishinari)

1. はじめに

ここ数年、多次元の系における非線形波動への関心が高くなってきている。そのような現象を考えると、特に1次元系で成功を取めたソリトンのアナロジーを考えることは自然なことであり、実際 KP 方程式をはじめとする2次元ソリトン方程式の研究は古くから活発な研究が行われてきた。しかし、多次元においてはソリトン理論の範疇におさまらないものも数多く知られている。本稿で考えるドロミオン¹⁾もそのような興味深い非線形波動の1つである。これは、Davey Stewartson I 型方程式²⁾ (以下 DS1 方程式と略す)

$$\begin{aligned} i q_t + q_{xx} + q_{yy} + (U + V)q &= 0, \\ U &= \int |q|_x^2 dy + u(x, t), \quad V = \int |q|_y^2 dx + v(y, t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

の局在解で、変数 q が2次元空間内で各方向に指数的に減衰する裾を持ち、変数 U, V は1方向にのみ指数的に局在するような解である。

この研究は、2次元の可積分方程式である DS1 方程式の厳密解型ではない初期条件がどのように時間発展していくのかを調べることを目的とする。ソリトン方程式の場合、このような問題は逆散乱法によって完全に解かれている³⁾。ドロミオンの場合も、同様に逆散乱法が解析されており⁴⁾、原理的には初期値問題は解かれているが、初期条件を与えたときに果してリップルと孤立波にわかれるのか、もしわかれるならそのときの孤立波の個数はいくつかなどのような、具体的な解の振舞いはあまり深く研究されていない。本稿では、このような初期値問題の考察を最近の数値的な解析結果⁵⁾の他、厳密な計算に基づいて行なう。最初にこの方程式の逆散乱法による初期値境界値問題を簡単にまとめ、次に初期波形として正規分布型の関数を選んだ場合の系の時間発展を数値計算で調べる。最後に初期値問題が完全に解析的に解ける場合について考察する。

2. DS1 方程式の逆散乱問題

この節では、DS1 方程式の逆散乱問題⁴⁾を簡単にまとめる。まず、演算子 L_1, L_2 を

$$L_1 = D + Q, \quad (2.1a)$$

$$L_2 = i\partial_t + J(\partial_y - \partial_x)^2 - 2Q(\partial_y - \partial_x) + W, \quad (2.1b)$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^* & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} V & -\sqrt{2}q_y \\ -\sqrt{2}q_x^* & -U \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix},$$

と定義すると、方程式 (1.1) の Lax 方程式は、 $[L_1, L_2] = 0$ によって与えられる。ここで 2 行 2 列の行列 Jost 関数 $M(x, y; k)$ を導入し、固有値問題

$$L_1 M(x, y; k) \begin{pmatrix} e^{iky} & 0 \\ 0 & e^{-ikx} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.2)$$

を考える。 k は新たに導入されたスペクトルパラメタである。この方程式の解のうち、複素 k 平面の上半平面、下半平面で解析的なものをそれぞれ M^+ , M^- と書くことにすれば、(2.2) の各要素を 1 回積分して、

$$\left. \begin{aligned} M_{11}^\pm &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^x q M_{21}^\pm dx', & M_{12}^\pm &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mp\infty}^x q M_{22}^\pm e^{ik(x-x')} dx', \\ M_{21}^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\pm\infty}^y q^* M_{11}^\pm e^{ik(y'-y)} dy', & M_{22}^\pm &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^y q^* M_{12}^\pm dy', \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

という積分方程式を得る。ここで、 $|k| \rightarrow \infty$ で $M \rightarrow I$ (I は単位行列) という条件を採用した。これらは Volterra 型連立方程式であり、次の関係式を導出することができる：

$$\left. \begin{aligned} M_{j1}^+(k) - M_{j1}^-(k) &= -\int_{-\infty}^{\infty} dl S^*(l, k) e^{-i(lx+ky)} M_{j2}^+(l), \\ M_{j2}^+(k) - M_{j2}^-(k) &= -\int_{-\infty}^{\infty} dl S(k, l) e^{i(kx+ly)} M_{j1}^-(l), \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2). \quad (2.4)$$

ただし、 $S(k, l)$ は散乱データで、

$$S(k, l) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy q M_{22}^-(k) e^{-i(kx+ly)}, \quad (2.5)$$

で定められる。式 (2.4) は非局所的 Riemann-Hilbert 問題で、 $M^\pm$ は ε を正定数として

$$\left. \begin{aligned} M_{j1}^-(k) &= \delta_{j,1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{S^*(l, k') e^{-i(lx+k'y)}}{k' - k + i\varepsilon} M_{j2}^+(k), \\ M_{j2}^+(k) &= \delta_{j,2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{S(k', l) e^{i(ly+k'x)}}{k' - k - i\varepsilon} M_{j1}^-(k), \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2), \quad (2.6)$$

をみたすことがわかる。これは Gel'fand-Levitan 方程式に相当するものであり、これを用いて行列 Jost 関数 M を S で表すことが可能になる。

次に、散乱データから $q(x, y)$ を構成する。 $k \rightarrow \infty$ での境界条件を考えて $M(x, y; k) \sim I + M^{(1)}/k$ とおき、(2.2) に代入して k の各次数の係数を比較すると、 $Q = (i/2)[J, M^{(1)}]$ を得る。この式と (2.6) を k で展開して求めた $M^{(1)}$ を用いて次式を得る：

$$q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl S(k, l) e^{i(kx+ly)} M_{11}^-(l). \quad (2.7)$$

さて、関数 $q(x, y, t)$ の時間発展は $S(k, l, t)$ を通して与えられるので、 S の時間変化を考えよう。式 (2.1), (2.3), (2.7) から、 q は線形極限で $S(k, l)$ の Fourier 逆変換

$$\hat{S}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dl S(k, l) e^{i(kx+ly)},$$

に比例するから、 $\hat{S}$ の時間発展は (1.1) よりポテンシャルが $u+v$ の Schrödinger 方程式

$$i\hat{S}_t + \hat{S}_{xx} + \hat{S}_{yy} + (u+v)\hat{S} = 0, \quad (2.8)$$

に従うことになる。一般には u, v は t にも依存するが、ここではこのような依存性はないものと仮定しよう¹。すると、(2.8) は $\hat{S} = T(t)X(x)Y(y)$ と変数分離することにより、

$$\left. \begin{aligned} \dot{T} &= i(m^2 + n^2)T, \\ X'' + uX &= m^2X, \quad Y'' + vY = n^2Y, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

という連立方程式となる。これらのうち X, Y に関する方程式は Sturm-Liouville 問題にはかならない。ここで、 X に関する方程式の離散固有値とその固有関数を m_p , ($p = 1, \dots, M$), $X_p(x)$, 連続固有値とその固有関数を m , $X(x; m)$ で表し、 Y に関しても同様に固有値を n_q , ($q = 1, \dots, N$), n , 固有関数を $Y_q(y)$, $Y(y; n)$ と記すと、

$$\begin{aligned} \hat{S}(x, y, t) = & \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \rho_{pq} X_p(x) Y_q(y) e^{i(m_p^2 + n_q^2)t} + \int_{-\infty}^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} dn \rho(m, n) X(x; m) Y(y; n) e^{i(m^2 + n^2)t} \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dm \left\{ \sum_{p=1}^M \rho_p(m) X_p(x) Y(y; m) e^{i(m_p^2 + m^2)t} + \sum_{q=1}^N \bar{\rho}_q(m) X(x; m) Y_q(y) e^{i(n_q^2 + m^2)t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

以下ではこれらの固有関数は $(-\infty, \infty)$ で規格化されているとする。すると、 ρ_{pq} , $\rho(m, n)$ などの係数は $\hat{S}(x, y, 0)$ から計算され、固有関数の正規直交性から

$$\rho_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{S}(x, y, 0) X_p^*(x) Y_q^*(y), \quad (2.11)$$

などとなる。式 (2.10) の各項のうち、 $t \rightarrow \infty$ で主要項として効いて来るものは第 1 項の離散固有値に起因するものであるから、漸近的な $\hat{S}$ の表式は次式のようになる：

$$\hat{S}(x, y, t) \sim \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \rho_{pq} X_p(x) Y_q(y) e^{i(m_p^2 + n_q^2)t} \equiv \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \hat{S}_{pq}(x, y, t), \quad (t \rightarrow \infty). \quad (2.12)$$

未知関数 $q(x, y)$ は式 (2.7) により計算されるが、これは (2.12) の和記号中の各項 $\hat{S}_{pq}$ に関して線形である。したがって、どのような初期条件が与えられても、解は漸近的には $\hat{S}_{pq}$ で決まる個別の $M \times N$ 個のモードの重ね合わせとして表されることになる。それぞれの $\hat{S}_{pq}$ を与える 1 組の離散固有値に対してドロミオンと呼ばれる孤立パルスが対応する。つまり、任意の初期条件は十分な時間が経過するとドロミオンとリップルに分離してしまうことになる。その際、最終的に出現するドロミオンの数は、境界条件 u, v によって決定される。初期条件 $q(x, y, 0)$ が寄与するのは、式 (2.10) の結合定数 ρ_{pq} などのみにおいてであり、固有

¹方程式 (1.1) はガリレイ不変性をもつから、 $u(x), v(y)$ の波形が時間変化しなければこれをみだす。

値や固有関数そのものとは無関係であることに注目して欲しい。ソリトン方程式の場合、ソリトンの個数は散乱データ（透過係数）のゼロ点の数により定められ、これは初期条件から完全に決まるものであったが、ドロミオンの場合はこれとは本質的に異なり、漸近的な個数はむしろ境界条件に依存するのである。

さて最後に、後の便宜のため漸近的にドロミオンの個数が1個となるような例を考えてみよう。境界条件を次のように定める：

$$u(x) = 2\lambda^2 \text{sech}(\lambda x), \quad v(x) = 2\mu^2 \text{sech}(\mu y). \quad (2.13)$$

これらを (2.9) の第 2, 3 式に代入すると、ともに唯一の離散固有値とそれに対する固有関数

$$\left. \begin{aligned} m = i\lambda, \quad n = i\mu, \\ X(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \text{sech}(\lambda x), Y(y) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \text{sech}(\mu y), \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

を得て、最終的なパルスの個数は1個となる。その時の解の漸近形は文献 4 により、

$$q(x, y, \infty) = \frac{\rho \sqrt{8\lambda\mu} \exp[-\lambda x + \mu y + i(\lambda^2 + \mu^2)t]}{|\rho|^2 + [1 + \exp(-2\lambda x)][1 + \exp(-2\mu y)]}, \quad (2.15)$$

となる。ただし、係数 ρ の添字は省いた。前述のように、初期条件は ρ を通じてのみ解の漸近形に参与する。このときパルスの波高の最大値と全体積は、

$$|q|_{\max}^2 = \frac{2|\rho|^2 \lambda \mu}{(1 + \sqrt{1 + |\rho|^2})^2}, \quad V_{\infty} = \int dx \int dy |q|^2 = 2\ln(1 + |\rho|^2), \quad (2.16)$$

で与えられる。

3. 数値計算の結果との対比

さて、この節では具体的に与えられた初期条件が時間の経過に伴いどのように変化していくのかを数値計算によって追ってみよう。境界条件に (2.13) を用いることにし、初期条件としては正規分布型の関数

$$q(x, y, 0) = ce^{-(ax^2 + by^2) + i\theta_0} \quad (3.1)$$

を考える。数値計算に採用したパラメタの値は、

$$\lambda = \mu = 0.8, \quad a = b = 0.05, \quad c = 0.4, \quad \theta_0 = 0.1 \quad (3.2)$$

とした。この場合に関数 $q(x, y, t)$ が時間発展する様子をあらわしたものが図 1 である。この図を見ると、時間を追うごとに初期波形からリップルが放射され、別の形のパルスとなることがわかる。最終的にはこれはドロミオンの波形に近付いていく。図 2 には、このパルスのピークの高さの時間変化が示されている。ノイズの効果が効いてくるためあまり長時間の計算はできないが、およそ 0.52 ~ 0.54 の値を中心として振動しており、この程度の値に収束するであろうことが予測される。数値的に解析すると、 $a = 0.4$ に対しては $\rho \simeq 2.25$ となり、予測される最終波高は $|q|_{\max}^2 = 0.54$ で数値計算の値と一致する。このように、ある初期波形が与えられた場合、リップルを放出してドロミオン解に近付くことがわかる。図 1 の途中の状態でリップルが等方向に放射されないのは、図の直線 $x = 0$ と $y = 0$ に沿って関数 U, V が有限の値を持ち、それが引力ポテンシャルの働きをして⁶⁾ q の波を引き付けるからである。

図 1. 条件 (2.13), (3.1), (3.2) の下での $|q(x, y, t)|^2$ の波形の時間的变化. (a) $t = 0$, (b) $t = 0.8$, (c) $t = 1.6$, (d) $t = 9.6$, (e) $t = 28.0$.

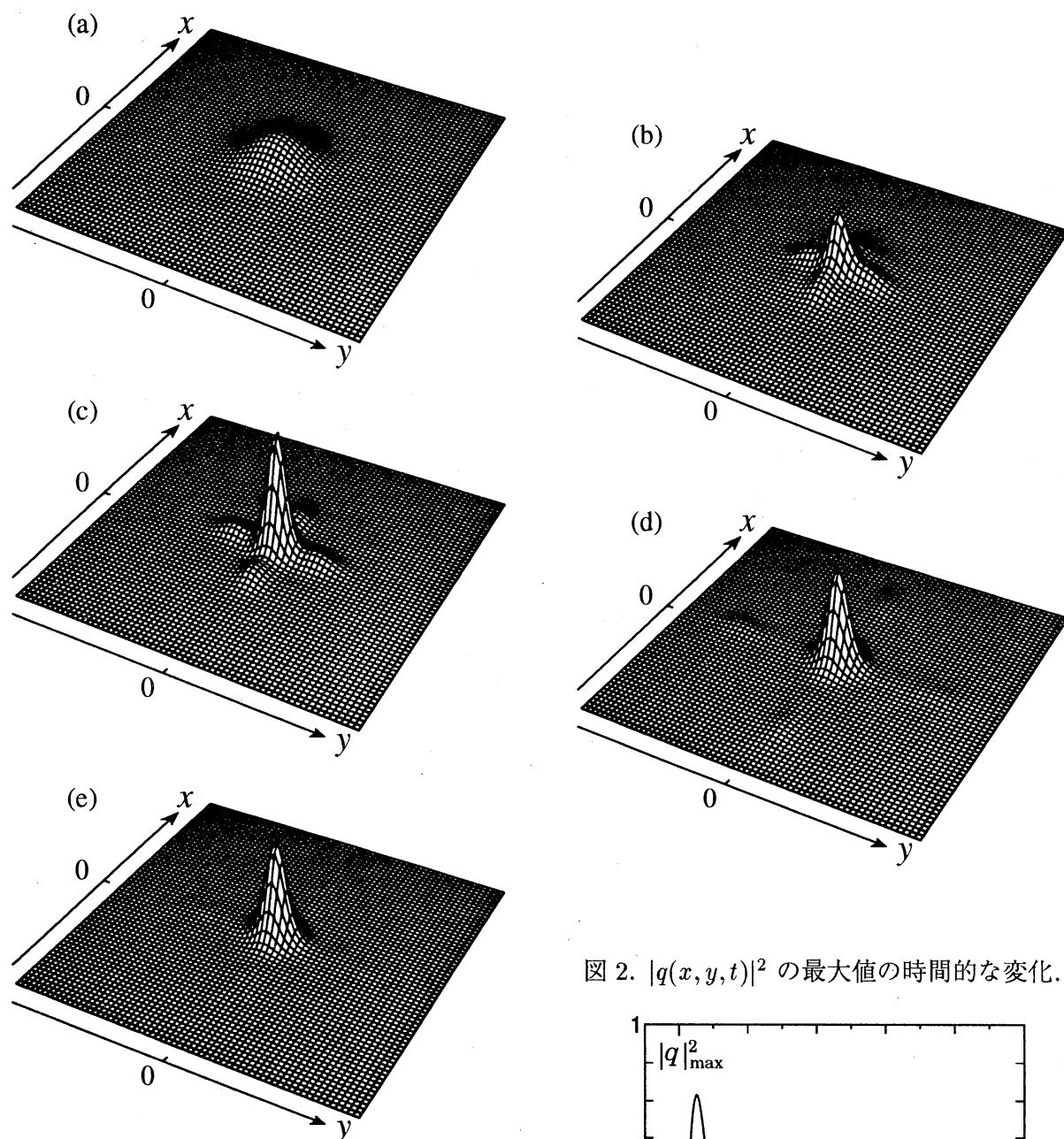
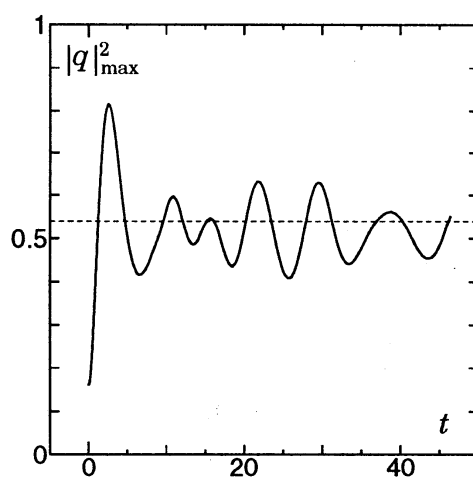


図 2. $|q(x, y, t)|^2$ の最大値の時間的な変化.



4. 厳密に解き得る初期条件と解の漸近的パラメタ依存性

この節では実際に散乱問題を解き、解がどのように初期条件に依存するのか考えよう。ドロミオンを特徴づけるパラメタのうち、 $q(x, y, 0)$ に唯一依存する ρ を求めなければならないが、(2.11) を考えると $\hat{S}(x, y, 0)$ を求める必要がある。式 (2.5) を Fourier 逆変換して

$$\hat{S}(x, y, 0) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ik(x-\xi)} M_{22}^{-}(\xi, y; k) q(\xi, y, 0), \quad (4.1)$$

となるので、(2.2) を解いて $M_{22}^{-}(k)$ を求めればよいことになる。以下この $\hat{S}$ が厳密に求められる初期条件 $q(x, y, 0)$ を考えることにする。

関数 $A(x, y, k) \equiv M_{12}^{-} e^{-ikx}$, $B(x, y, k) \equiv M_{22}^{-} e^{-ikx}$ を導入すると、(2.2), (2.3) より

$$A_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} q(x, y, 0) B, \quad B_y = \frac{1}{\sqrt{2}} q^*(x, y, 0) A, \quad (4.2)$$

$$A(x \rightarrow \infty, y; k) = 0, \quad B(x, y \rightarrow -\infty; k) = e^{-ikx} \quad (4.3)$$

を得る。ここで c を複素数の定数、 $F_1(x)$, $F_2(y)$ をそれぞれ x, y だけの実関数として $q(x, y, 0) = c F_1(x) F_2(y)$ のように、初期条件が変数分離された形で書けるものとしよう。新しい変数 $P(x, y) = A(x, y; k) / F_2(y)$ を導入し、さらに独立変数の変換

$$\xi = \int_x^{\infty} F_1^2(t) dt, \quad \eta = \int_{-\infty}^y F_2^2(t) dt \quad (4.4)$$

を行なうと、(4.2) は

$$\left. \begin{aligned} P_{\xi\eta} - \frac{|c|^2}{2} P &= 0, \\ A &= F_2(y) P(x, y), \quad B = -\frac{\sqrt{2} P_x(x, y)}{c F_1(x)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5a)$$

という Klein-Gordon 型の方程式に変換される。式 (4.4) から、この方程式を ξ - η 平面上の

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi \leq \xi_{\infty}, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_{\infty}, \\ \xi_{\infty} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t)^2 dt, \quad \eta_{\infty} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_2(t)^2 dt, \end{aligned} \quad (4.5b)$$

という矩形領域で考えればよい。また関数 P の境界条件は、(4.3) から次のようになる：

$$P(\xi \rightarrow 0, \eta) = 0, \quad P_{\xi}(\xi, \eta \rightarrow 0) = \frac{ce^{-ikx}}{\sqrt{2} F_1(x)}. \quad (4.5c)$$

条件 (4.5c) の下で (4.5a) の解を求めるため、まず Green 関数とその随伴を求めると、

$$\left. \begin{aligned} G_0(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) &= -\theta(\xi - \xi_0) \theta(\eta - \eta_0) I_0(|c| \sqrt{2(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}), \\ H_0(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) &= G_0(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

ただし、 $\theta(z)$ は Heaviside の階段関数、また $I_0(z)$ は 0 次の第 1 種変形ベッセル関数

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2},$$

である。ここで、演算子 $L \equiv \partial_\xi \partial_\eta - |c|^2/2$ と関数 P, H_0 に対して、図 3 で与えられる領域 D において Green の定理を適用する。関数 P は (4.5a), (4.5c) をみたすことに注意すると、

$$P(\xi_0, \eta_0) = \frac{c}{\sqrt{2}} \int_0^{\xi_0} I_0 \left(|c| \sqrt{2\eta_0(\xi_0 - \xi)} \right) \frac{e^{-ikx}}{F_1(x)} d\xi \quad (4.7)$$

となる。ただし、独立変数の変域と積分範囲を考慮して階段関数の因子を除いた。さらに添字 0 を外して ξ, η を元の変数 x, y に再度変換すると、

$$P(x, y) = \frac{c}{\sqrt{2}} \int_x^\infty I_0 \left(|c| \sqrt{2 \int_x^y F_2(t)^2 dt \int_x^{x'} F_1(t)^2 dt} \right) e^{-ikx'} F_1(x') dx' \quad (4.8)$$

ということになる。これが条件 (4.5c) の下での方程式 (4.5a) の解である。係数 ρ_{pq} は、式 (2.11) に式 (2.2), (4.1), (4.8) を代入し、境界条件 (4.3) を使って、

$$\rho_{pq} = \frac{c}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty dx F_1(x) X_p^*(x) \int_{-\infty}^\infty dy F_2(y) Y_q^*(y) I_0 \left(|c| \sqrt{2 \int_{-\infty}^x F_1(t)^2 dt \int_{-\infty}^y F_2(t)^2 dt} \right) \quad (4.9)$$

で与えられる。これを用いると、境界条件が時間的に変化せず、初期条件が x, y の関数に変数分離される場合の解が完全に解析的に求められたことになる。

前節の最後で求めた固有状態に対して具体的にパラメタ ρ を計算してみよう。式 (2.14) を上式に代入すると、

$$|\rho| = \frac{\gamma}{4} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{F_1(x/\lambda)}{\cosh x} \int_{-\infty}^\infty dy \frac{F_2(y/\mu)}{\cosh y} I_0 \left(\gamma \sqrt{\int_{-\infty}^x F_1(t/\lambda)^2 dt \int_{-\infty}^y F_2(t/\mu)^2 dt} \right) \quad (4.10)$$

を得る。ただし、 λ, μ は境界条件で与えられる関数のパルスの幅を表すパラメタ (式 (2.13) を参照) で、 γ は $\gamma \equiv \sqrt{2}|c|/\sqrt{\lambda\mu}$ で定義される。まず、 F_1, F_2 として後述の数値計算での例である、中心 (x_0, y_0) , x, y 方向への幅がそれぞれ a^{-1}, b^{-1} の正規分布型の関数

$$F_1(x) = e^{-a^2(x-x_0)^2}, \quad F_2(y) = e^{-b^2(y-y_0)^2},$$

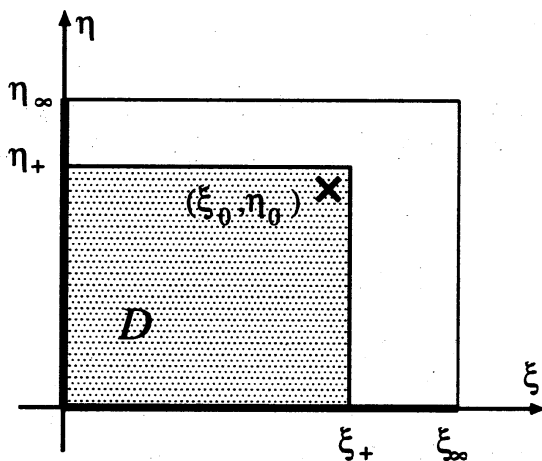


図 3. 方程式 (4.5) を考える領域と、領域 D . 太線部で境界条件を与える。 ξ_+, η_+ は $\xi_0 < \xi_+ < \xi_\infty, \eta_0 < \eta_+ < \eta_\infty$ をみたせば何でもよい。

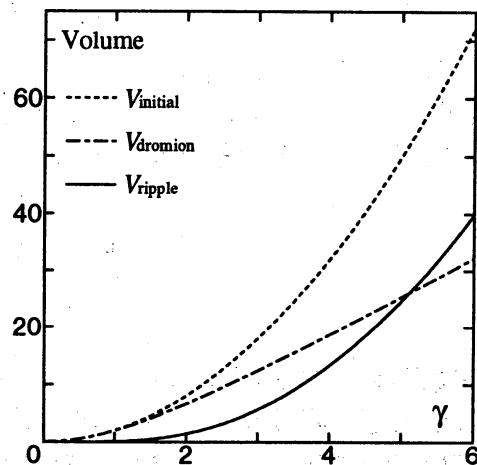


図 4. 初期条件が (4.12) で与えられるときのリップルの体積の γ に対する変化。

を考える．これを式 (4.10) に代入すると，

$$|\rho| = \frac{\alpha\beta\gamma}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{\cosh(\alpha x + \lambda x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{\cosh(\beta y + \mu y_0)} I_0 \left(\frac{\gamma\sqrt{\alpha\beta}}{2} \sqrt{E(\sqrt{2}x)E(\sqrt{2}y)} \right) \\ \alpha \equiv \frac{\lambda}{a}, \quad \beta \equiv \frac{\mu}{b}, \quad E(z) \equiv \int_{-\infty}^z e^{-t^2} dt \quad (4.11)$$

となる．この式からわかる傾向は，初期条件として与えるパルスの幅が境界条件のポテンシャルの幅に比べて大きくなるほど漸近的に最終パルスの体積 V_{∞} が大きくなること，初期パルスの高さが大きくなってもやはり V_{∞} は大きくなること，また，境界条件のパルスのピークと初期パルスのピークの位置をずらすと最終的なパルスの体積が小さくなること が挙げられる．とくに，境界のパルスの幅以上の程度で原点から離れた初期パルスの場合 ($\lambda x_0 \gg 1, \mu y_0 \gg 1$)，最後に出てくるドロミオンの体積はほとんどなくなってしまう．文献 6 で筆者たちが調べたように，境界条件のパルスはシュレディンガー方程式の引力ポテンシャルの働きをするが，この事実は q という場の局在構造が引力中心から離れすぎてしまうとそこには q があまり集まらないということに対応している．

この節の最後に，パラメタ $|\rho|$ (つまり，最後のドロミオンの体積や高さなど) が完全に明示的に表現し得る初期条件を考え，パラメタ依存性を詳しく見てみよう．そのような初期条件は，

$$F_1(x) = \text{sech}(\lambda x), \quad F_2(y) = \text{sech}(\mu y) \quad (4.12)$$

が一例である．このとき，式 (4.10) により，

$$|\rho| = \frac{1}{\gamma} [I_0(2\gamma) - 1], \quad V_{\infty} = 2 \ln \{1 + [I_0(2\gamma) - 1]^2 / \gamma^2\}, \quad \gamma \equiv \frac{\sqrt{2}|c|}{\sqrt{\lambda\mu}},$$

の結果が得られる．初期パルスの体積は，

$$V_{\text{initial}} = |c|^2 \int dx F_1(x) \int dy F_2(y) = 2\gamma^2,$$

で与えられることと，前頁の $I_0(z)$ の定義および $\gamma \gg 1$ での I_0 の振舞い $I_0(z) \sim e^x / \sqrt{2\pi x}$ に注意して， γ が非常に小さい時と大きい時の近似的な評価を行ない， V_{initial} から V_{∞} を差し引いてリップルの体積を求めると，

$$V_{\text{ripple}} \simeq \frac{7\gamma^6}{72} - \frac{7\gamma^8}{144} + \cdots \quad (|\gamma| \ll 1), \\ \sim 2\gamma^2 - 8\gamma + \cdots \quad (|\gamma| \gg 1).$$

この関数のグラフを図 4 に示した．これから，パラメタ γ に対する依存性は初期振幅が大きければ大きい程リップルの値は増大し，極大や極小が出現しないことと，必ず初期パルスの方が最終的に現れるドロミオンの体積より大きいことがわかった．すなわち，『最終状態よりも体積の小さい初期パルス』はあり得ないことになる．

5. おわりに - 結論とまとめ -

以上のように2次元系での局在波としてドロミオンを取り上げてその初期値境界値問題を考察してきた。筆者たちのこれまでの研究において、ドロミオンはさまざまな摂動に対して安定な構造であることや⁷⁾、平均流と呼ばれる量の境界での振舞いが重要であること⁶⁾などを示して来たが、ここではそれに加えて任意の初期パルスが充分時間が経過すればドロミオンとリップルに分離してしまうことを示した。これまでの研究においては、このような解の時間的な変化、特に漸近的な状態の厳密な解析は数値計算に頼らざるを得なかったが、本研究において、初期条件が変数分離できるような状況では厳密に初期値問題を解くことができた。その結果を用いて終状態に生じるパルスの特徴づけるパラメタを計算し、最終的に生じるドロミオンの体積・波高を計算するとともに、いくつかの初期波形に対して数値計算からそれらのパラメタ依存性を確かめた。

このように、DS1 方程式の初期値問題が解析的に解かれたが、すべて問題が解決したわけではない。ここでは初期条件が変数分離できるとした。一般的に言って、初期波形はそのピークからの距離の関数であることが誰でも思いつく一番自然なものであるが、初期波形が正規分布型のもの以外の関数で変数分離できるものは存在しない。また、境界における波形が時間変化するようなもの、たとえば2つのパルスが衝突するような境界条件などは初期条件の変数分離ができないので新たな問題を考える必要がある。これらのような問題の考察が解の一般的な条件下での振舞いを解析する上で重要になってくるであろう。

参考文献

- 1) M. Boiti, J. J.-P. Leon, L. Martina and F. Pempinelli: Phys. Lett. A **132** (1988) 432.
- 2) A. Davey and K. Stewartson: Proc. Roy. Soc. London Ser. A **338** (1974) 101.
- 3) J. Satsuma and N. Yajima: Prog. Theor. Phys. Suppl. **55** (1974) 284.
- 4) A. S. Fokas and P. M. Santini: Physica D **44** (1990) 99.
- 5) K. Nishinari, T. Yajima and T. Nakao: J. Phys. A **29** (1996) 4237.
- 6) K. Nishinari and T. Yajima: J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 3538; Phys. Rev. E **51** (1995) 4986.
- 7) T. Yajima and K. Nishinari: J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 1036; *ibid.* **65** (1996) 1598.