

Twisting Operations of Knots

早稲田大理工 大山淑之 (Yoshiyuki Ohyama)

このノートでは link diagram 上の twisting move, (n, k) -move を定義し, どのような n と k に対し (n, k) -move が unknotting operation になるか 考察していく.

更に, unknotting operation となる場合 μ -component link に対し (n, k) -move により生成される同値関係による同値類の個数を調べていく.

1. Fox の congruence class と (n, k) -move の定義

Fox の congruence class ([3]) に対し 中西・鈴木 ([7]) は 次の様な結果を示した.

定義 1.1 ([3]) n, q を正整数とする. 以下の条件を満たす knot $K_0, K_1, \dots, K_e$, 整数 $c_1, c_2, \dots, c_e$, trivial knot $m_1, m_2, \dots, m_e$ が存在するとき knot type K とよび

congruent modulo (n, q) という. ($K \equiv \lambda \pmod{(n, q)}$ とかく.)

(1) K_{i-1} と m_i は disjoint.

(2) K_i は K_{i-1} から m_i に沿った $1/c_i n$ -surgery で得られる.

(3) Linking number $lk(K_{i-1}, m_i) \equiv 0 \pmod q$.

(4) K_0 は K と, K_e は λ と 同じ knot type である.

定理 1.2 ([7]) n を 2 以上の整数, q を正整数で

$(n, q) \neq (2, 1), (2, 2)$ とする. このとき congruence

modulo (n, q) に対し 無限個の異なる class が存在する.

更に 中西 ([8], [10]) により $(n, q) = (2, 1), (2, 2)$ については 次の結果が得られている.

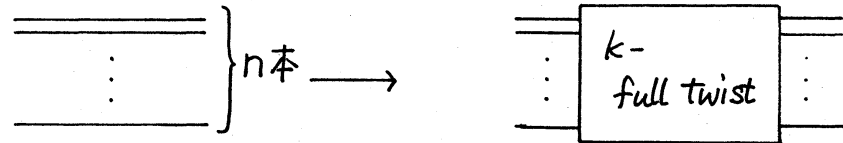
定理 1.3 ([8], [10]) すべての knot は congruent

modulo $(2, 1)$ であり 更に congruent modulo $(2, 2)$ である.

Fox の congruence class では twist する際の string の本数は一定ではない (但し linking number は一定.).

そこで string の本数を限定した 次のような (n, k) -move を定義する.

定義 1.4 2 以上の整数 n と正整数 k に対し 下図の様な link diagram 上の local move を (n, k) -move とよぶ.



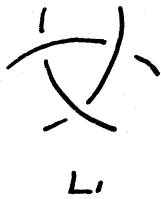
2. Unknotting operation と (n, k) -move

ここで 従来の unknotting operation と (n, k) -move の関係を locally equivalent という概念を用いて述べる.

定義 2.1 ([1], [2]) link diagram 上の local move A, B が locally equivalent ($A \simeq B$) であるとは 互いに 一方の move が 他方の move の有限回の操作で得られることという.

$\mathcal{L}^\mu$ を μ -component link 全体とする. 2 つの μ -component link が (n, k) -move で移り合うとき同値であるとし 同値類の個数を $|\mathcal{L}^\mu / (n, k)|$ であらわす.

L_1, L_2, L_3, L_4 を次の図の様に 一ヶ所だけ異なる diagram を持つ link とする.



中西 ([9]) は L_i と L_j の diagram 間の local move として Δ_{ij} -move を定義し 次の結果を示している.

命題 2.2 ([9]) Δ_{ij} -move は local equivalence により 次の様に分類できる.

$$(1) \quad \Delta_{12}\text{-move} \stackrel{\ell}{\sim} \Delta_{34}\text{-move} \stackrel{\ell}{\sim} \Delta_{13}\text{-move} \stackrel{\ell}{\sim} \Delta_{24}\text{-move}.$$

$$(2) \quad \Delta_{14}\text{-move} \stackrel{\ell}{\sim} \Delta_{23}\text{-move}.$$

命題 2.3 ([9]) Δ_{12} -move により生成される同値関係に対し μ -component link の同値類の数は $2^{\mu-1}$ である.

Δ_{14} -move は [6] の Δ -unknotting operation にあたり Δ -unknotting operation は linking number をかえない.

Δ_{ij} -move と (n,k) -move の関係は次の様に表わされる.

命題 2.4 (1) Δ_{14} -move は $(2,2)$ -move と $(3,2)$ -move により生成される. (2) Δ_{12} -move $\stackrel{\ell}{\sim}$ $(3,1)$ -move.

命題 2.4 により ために次の結果が得られる.

$$\text{系 2.5} \quad \left| \mathcal{L}^{\mu}_{(3,1)} \right| = 2^{\mu-1}$$

村上 (25) による $\#$ -unknotting operation に対しても
同方向に orientation を入れたときの (3,1)-move と
locally equivalent であることがわかる.

3. $(n,2)$ -, $(n,1)$ -move について

定理 1.2 より $k \geq 3$ の場合 命題 3.1 が得られる.

命題 3.1 $\mathcal{K}$ を knot 全体の集合とする. $k \geq 3$ のとき

$$\left| \mathcal{K}_{(n,k)} \right| = \infty$$

つまり 異なる同値類が無数個存在する.

よって unknotting operation になりうるのは $k=1$
あるいは 2 のときとなり まず $(n,1)$ -move について
考えていく.

定理 3.2 $(n, 1)$ -move は n が偶数のとき $(2, 1)$ -move と n が奇数のとき $(3, 1)$ -move と locally equivalent である.

系 3.3 任意の $n (\geq 2)$ に対し $(n, 1)$ -move は unknotting operation である.

定理 3.2 と系 2.5 により $\mathcal{L}^\mu$ に対して 次の系が得られる.

$$\begin{aligned} \text{系 3.4} \quad \left| \mathcal{L}^\mu / (n, 1) \right| &= 1 & n: \text{even} \\ \left| \mathcal{L}^\mu / (n, 1) \right| &= 2^{\mu-1} & n: \text{odd} \end{aligned}$$

k が 2 の場合であるが 中西 ([10]) による定理 1.3 の証明により 次のことが導かれる.

命題 3.5 n が 6 以上の偶数であれば $(n, 2)$ -move は unknotting operation である.

では n が奇数のときはどうであろうか. signature ([13]) と Arf invariant を用いることにより 次の定理が得られる.

定理 3.6 K を knot 全体の集合とし n を 3 以上の奇数とする. このとき $|K/(n, 2)| \geq 8$.

特に $|K/(3, 2)| = \infty$.

4. Mathieu の問題

Mathieu は [4] において (n, k) -move の言葉では次の様に表現できる問題を提示している.

問題 任意の knot は適当な n, k をとると 1 回の (n, k) -move で trivial knot に変えるか. 変えないならば, 最低何回の (n, k) -move が必要か.

問題の前半部分に対しては 安原 ([12]), 宮崎により独立に反例が作られている. 後半部分の答えとして以下の定理が示せる.

定理 4.1 任意の knot K に対し 以下の系列を与える自然数 n が存在する.

$$K \xrightarrow{(n, 1)} K' \xrightarrow{(n-1, 1)} O$$

ここで K' はある knot, O は trivial knot をあらわし

$K \xrightarrow{(n,1)} K'$ は K' が K から 1 回の $(n,1)$ -move で得られることを示している。

詳しい証明等については [1] を参照して下さい。

~~22~~

参考文献

- [1] H. Aida. Unknotting operations of polygonal type. Tokyo J. Math., vol 15, No 1, (1992) 111-121.
- [2] H. Aida. The oriented Δ_{ij} -move on Links. preprint.
- [3] R. H. Fox. Congruence classes of knots. Osaka Math. J., 10 (1958) 37-41.
- [4] Y. Mathieu. Thèse. L'Université de Provence.
- [5] H. Murakami. Some metrics on classical knots. Math. Ann., 270 (1990) 207-215.
- [6] H. Murakami and Y. Nakanishi. On a certain move generating link-homology. Math. Ann., 284 (1989) 75-89.
- [7] Y. Nakanishi and S. Suzuki. On Fox's congruence classes of knots. Osaka J. Math., 24 (1987) 217-225.

- [8] Y. Nakanishi. On Fox's congruence classes of knots II. Osaka J. Math., 27(1990) 207-215.
- [9] Y. Nakanishi. Replacements of the Conway third identity. Tokyo J. Math., vol 14, No. 1 (1991) 193-203.
- [10] Y. Nakanishi. From a view of localized link theory. Knot 90, Walter de Gruyter, Berlin and New York.
- [11] Y. Ohyama. Twisting and unknotting operations, preprint.
- [12] A. Yasuhara. On slice knots in the complex projective plane.
to appear in the Revista Matemàtica.
- [13] Y. Wu. Signature of torus links. Kobe J. Math., 5(1988) 297-304.