

PBIBD の アソシエート・クラス の reduction (II)

阪大・基工 景山三平

今回は、昨年の「群論と組合せ論研究会」での話の続きであります。

PBIBD の associate classes の reduction に関して、筆者は AMS (72, Vol. 43) で、 N_i を BIBD $(v_i, b_i, k_i, r_i, \lambda_i)$ とするとき、こゝのいわゆる Sillitto 型の積 $N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$ (N_i^* は N_i の complementary BIBD) で構成される Rectangular association scheme をもつ高次元 associate classes の PBIBD N が L_2 association scheme をもつ $\geq$ associate classes の PBIBD $\wedge$ reducible であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} & \textcircled{*} \quad v_1 = v_2, \quad b_1(k_2 - \lambda_2) = b_2(k_1 - \lambda_1), \\ & \quad b_i \neq 4(k_i - \lambda_i), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

であることを示した。これはこの型の二つの方向への一般化を考えます。方法は標準的な Vartak の方法 (design の集合数 λ_i と 2 種の 10^3 -スター P_{jk}^1 を用いる) …… Vartak (1955) の方法は少し不完全であったので、それを修正したものを Generalized Vartak's condition と呼ぶ。筆者のもの (design N の集合数と NN' の固有根を用いる) をそれらに使用する。

BIBD, m class の association scheme, PBIBD, 処理の束の association algebra 等については 同様詳しく述べないで省略します。

まず、一つの方向への一般化として、筆者の方法を用いて、

(定理 1). 10^3 -スター $v, b_i, k_i, k, \lambda_i$ の BIBD N_i ($i=1, 2, 3$) が与えられているとき、 F_3 type association scheme をもつ高々 7 associate classes の PBIBD $N = N_1 \otimes N_2 \otimes N_3 + N_1^* \otimes N_2^* \otimes N_3^*$ が cubic association scheme をもつ 3 associate classes の PBIBD の reducible であるための必要十分条件は

$$b_i (k_j - \lambda_j) = b_j (k_i - \lambda_i)$$

for all i, j ($i \neq j$) = 1, 2, 3 z である。

[注意] 仮定 $v_1=v_2=v_3$, $k_1=k_2=k_3$ は, F_3 type association scheme をもつ 7 associate classes の PBIBD $N_1 \otimes N_2 \otimes N_3$ が cubic association scheme をもつ 3 associate classes の PBIBD の reducible z に対する必要十分条件である (AMS '72, Vol 43 参照), 同じ association scheme に基づく 112112 も 配対が必要なる 3 associate classes の reduction に対する条件も一般には異なることに注意した。定理 1 の N は $v_1=v_2=v_3$, $k_1=k_2=k_3$ だが z は not reducible である。勿論, 仮定 $v_1=v_2=v_3$, $k_1=k_2=k_3$ に対し必要十分条件は導かれるが, 条件④に依る非常に複雑になる z を省略します。

定理 1 を PBIBD の 1105 X-5-1 画の閉路式を用いた要形 12

(Ⅲ) 1105 X-5-2 v_i, b_i, k_i, r, l_i の PBIBD N_i ($i=1,2,3$) が $v_1 l_2 = k_2 l_1$, $k_2 l_3 = k_3 l_2$, $v_1 l_3 = k_3 l_1$ を満たすとき, F_3 type association scheme をもつ 高々 7 associate classes の PBIBD $N = N_1 \otimes N_2 \otimes N_3 + N_1^* \otimes N_2^* \otimes N_3^*$ が cubic association scheme

をもつ 3 associate classes の PBIBD $\wedge$ reducible であるための
必要十分条件は,

$$v_1 = v_2 = v_3$$

である。

定理1と定理12 次定理も同様に決定した。

(定理2)。 $1^0 \rightarrow X \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{V}$, b_i, k_i, l_i の BIBD N_i
($i=1, 2, 3$) が $v_2 = v_3, k_2 = k_3$ を満たすとき, F_3 type association
scheme をもつ 高々 7 associate classes の PBIBD $N = N_1 \otimes N_2 \otimes N_3$
 $+ N_1^* \otimes N_2^* \otimes N_3^*$ は 5 associate classes の PBIBD $\wedge$ reducible
であるための必要十分条件は

$$b_2(k_3 - l_3) = b_3(k_2 - l_2)$$

である。

定理1は, AMS('72, Vol.43) を参照12. 形式的に一般
化されます。

(定理3)。 $1^0 \rightarrow X \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{V}$, b_i, k_i, l_i をもつ BI
BD N_i ($i=1, 2, \dots, m$) が $v_2 = v_3 = \dots = v_m$ を満たすとき, F_m type association
scheme をもつ 高々 $2^m - 1$ associate classes の PBIBD

$N = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_m + N_1^* \otimes N_2^* \otimes \cdots \otimes N_m^*$ が C_m type association scheme をもち PBIBD $\wedge$ reducible であるための必要十分条件は

$$b_i (c_j - \lambda_j) = b_j (c_i - \lambda_i)$$

が $i, j (i \neq j) = 1, 2, \dots, m$ に対し同時に成立するに等しい。

次に、もう一つの方向として、Sillitto 型の積の本来の意味における一般化を Vartak の方法 (Generalized Vartak's condition) を用いて考えよう。即ち、 N_i を $(n_i \times n_i - v_i, b_i, k_i, k_i, \lambda_i (i=1, 2, \dots))$ の PBIBD とするとき、

$$N^{(1)} = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*, \quad N^{(2)} = N^{(1)} \otimes N_3 + N^{(1)*} \otimes N_3^*, \\ \dots, \quad N^{(m)} = N^{(m-1)} \otimes N_{m+1} + N^{(m-1)*} \otimes N_{m+1}^*$$

格子型の計画を考察する。

以下の考察で有用な次の補題を準備します。

(補題)。 N_1 は m associate classes の PBIBD

$(v^{(1)}, b^{(1)}, k^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, M_{\lambda_1}^{(1)}, p_{j|k}^{(1)\dagger}, \lambda_j | j, k=0, 1, \dots, m)$, N_2 は PRIBD $(v_2, b_2, k_2, r_2, t_2)$ と $\chi_1 \chi_2^*$ します。また、 $N = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$ は、次の 1^{st} X- Γ - Γ を持つ。 $\Rightarrow 2m+1$ associate classes の PRIBD である:

$$v = v^{(1)} v_2, \quad b = b^{(1)} b_2,$$

$$V = r^{(0)} k_2 + (b^{(0)} - r^{(0)})(b_2 - k_2),$$

$$k = k^{(1)}k_2 + (v^{(1)} - k^{(1)})(v_2 - k_2),$$

$$\lambda_1 = \kappa^{(1)} \lambda_2 + (b^{(1)} - \kappa^{(1)} \chi(b_2 - 2k_2 + l_2)),$$

$$A_{21} = k_2 A_1^{(0)} + (b_1^{(0)} - 2r_1^{(0)} + A_1^{(0)})(b_2 - k_2),$$

$$\lambda_{2i+1} = \lambda_2 \lambda_i^{(0)} + (b^{(0)} - 2r^{(0)} + \lambda_i^{(0)})(b_2 - 2r_2 + \lambda_2) + 2(r^{(0)} - \lambda_i^{(0)})(r_2 - \lambda_2),$$

$$m_1 = v_2 - 1, \quad m_{2i} = m_i^{v_2}, \quad m_{2i+1} = (v_2 - 1) m_i^{v_2}$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, m. \quad \text{更に } \lambda_i | = 1, 2, \dots, m \quad 1 \leq i \leq l$$

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow b^{(0)}(I_2 - A_2) = b_2(r^{(0)} - A_2^{(0)})$$

$$\lambda_1 = \lambda_{2k+1} \Leftrightarrow (K^{(0)} - \lambda_1^{(0)})b_2 = 4(K^{(0)} - \lambda_1^{(0)})(K_2 - \lambda_2),$$

$$(1) \quad \lambda_{2i} = \lambda_{2i+1} \Leftrightarrow b_2(\lambda_i^{(0)} - \lambda_i^{(1)}) = (b_2 - 1)[b_2^{(0)} - 4(\lambda_i^{(0)} - \lambda_i^{(1)})],$$

$$\lambda_{2i} = \lambda_{2j} \Leftrightarrow \lambda_i^{(1)} = \lambda_j^{(1)},$$

$$\lambda_{2i+1} = \lambda_{2j+1} \Leftrightarrow (\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(1)})[b_2 - 4(\lambda_2 - \lambda_2)] = 0$$

が成立する。

[注意] -AS は m associate classes α PRIBD (v, b, r, k, λ_i) M の complement もやはり M と同じ association scheme に基づく PRIBD (ただし $b + m \min \lambda_i \geq 2r$ かつ $\lambda_2 = 0$) とする α_2 , $N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$ は $N_1 \otimes N_2$ と同じ association scheme をもつ。 (なお, 2 $P_{jk}^{(1)}$ に関することも同様である) 省略。 更にもし N_1 が F_m type association scheme に基づく 2 ならば, N は F_{m+1} type association scheme に基づく。

この補題を用いても, $N^{(m)}$ ($m=1, 2, \dots$) の 1 の X - 3 が容易に求められる (reduction 等の議論もいす)。

例として design $N^{(2)}$ に関する。

$$N^{(2)} = N^{(1)} \otimes N_3 + N^{(1)*} \otimes N_3^*$$

$$= N_1 \otimes N_2 \otimes N_3 + N_1^* \otimes N_2^* \otimes N_3 + N_1 \otimes N_2^* \otimes N_3^* + N_1^* \otimes N_2 \otimes N_3^*$$

は F_3 type association scheme に基~~づ~~く高~~さ~~ 17 associate classes の PBIBD $(v^{(2)}, b^{(2)}, r^{(2)}, k^{(2)}, \lambda_i^{(2)}, m_i^{(2)}, p_{jk}^{(2)})$ には 3. $N^{(1)}$ の本来の構造 あり

i) $b_i = 4(k_i - \lambda_i), i=1, 2, 3 \Rightarrow N^{(2)}: \text{PBIBD}$

ii) $b_i = 4(k_i - \lambda_i), i=1, 2, b_3 \neq 4(k_3 - \lambda_3)$

$\Rightarrow N^{(2)}: \text{rectangular association scheme}$ に基~~づ~~く 3 associate classes の PBIBD。2 a とき、筆者 (AMS'72) の定理 4 あり。2 a $N^{(2)}$ は 更に L_2 association scheme に基~~づ~~く $\subset$ PBIBD には not reducible である。

は容易に分る。更に 他~~の~~ 場合の reduction に关~~し~~ては、関係式 (1) type を用~~い~~て 適当な $\lambda_i^{(2)}$ の関~~数~~ の等式関係の下で、2 associate classes の PBIBD かつ l associate classes ($l=5, 4, 3, 2$) の PBIBD $\wedge$ reducible となるための必要十分条件を Varatka の条件と Kageyama の条件 (to appear in Ann. Inst. Stat. Math.) あり 述べられているが 非常に多くの場合が存在する。その一部を挙げると、

必要十分条件が自動的に満たされているものとして

• $\lambda_4^{(2)} = \lambda_5^{(2)}, \lambda_6^{(2)} = \lambda_7^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_1 = 4(k_1 - \lambda_1)$) の下で

7 associate classes, #3 5 associate classes α PBIBD $\wedge$ reducible (略12 "7 $\rightarrow$ 5 $\wedge$ reducible" $\in \mathbb{F}_2$).

- $\lambda_2^{(2)} = \lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(2)} = \lambda_5^{(2)}, \lambda_6^{(2)} = \lambda_7^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_1 = 4(k_1 - \lambda_1), b_2 = 4(k_2 - \lambda_2)$) αF_2 , $7 \rightarrow 4 \wedge$ reducible.

- $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_3^{(2)}, \lambda_5^{(2)} = \lambda_6^{(2)} = \lambda_7^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_2 = 4(k_2 - \lambda_2), b_3 = 4(k_3 - \lambda_3)$) αF_2 , $7 \rightarrow 3 \wedge$ reducible. $\geq a \in \mathbb{F}_2$

reduced design is F_2 type association scheme $\mathbb{F}_2$ $\subset$ PBIBD $\in \mathbb{F}_2$.

- $\lambda_1^{(2)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_4^{(2)} = \lambda_5^{(2)} = \lambda_6^{(2)} = \lambda_7^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_1 = 4(k_1 - \lambda_1), b_3 = 4(k_3 - \lambda_3)$) αF_2 , $7 \rightarrow 2 \wedge$ reducible. $\geq a \in \mathbb{F}_2$

reduced design is A_2 type association scheme $\mathbb{F}_2$ $\subset$ PBIBD $\in \mathbb{F}_2$.

必要十分条件 α 1 2 階設計 $2^2 < 3 \in \lambda \in 1, 2$,

- $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)}, \lambda_5^{(2)} = \lambda_6^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_2(k_3 - \lambda_3) = b_3(k_2 - \lambda_2)$) αF_2

7 associate classes #3 5 associate classes α PB

IBD $\wedge$ reducible 2 階設計の必要十分条件は

$v_1 = v_2$ 2 階設計. (略12, "7 $\rightarrow$ 5 $\wedge$ reducible" $\Leftrightarrow v_1 = v_2$ " $\in \mathbb{F}_2$).

- $\lambda_2^{(2)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_4^{(2)} = \lambda_5^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_1 = 4(k_1 - \lambda_1), b_2 = 4(k_2 - \lambda_2)$) αF_2

件を用いて $N^{(2)}$ の場合と同様に論じられる。

最後に k の中では本来の構造から分子系統
的性質も入る。

$$(i) b_i = 4(k_i - l_i), i=1, 2, \dots, m+1 \Rightarrow N^{(n)}: \text{PBIBD}$$

$$(ii) b_i = 4(k_i - l_i), i=1, 2, \dots, m, b_{m+1} \neq 4(k_{m+1} - l_{m+1})$$

$$\Rightarrow N^{(n)}: \text{rectangular association scheme (2重)}^{(n)}$$

$\subset$ 3 associate classes の PBIBD。

$$(iii) b_i = 4(k_i - l_i), i=1, 2, \dots, m-1, b_j \neq 4(k_j - l_j), j=m, m+1,$$

$$\Rightarrow N^{(n)}: F_3 \text{ type association scheme (2重)}^{(n)}$$

$\subset$ 2 associate classes の PBIBD。

等も順次 $2 \leq k \leq 3$ まで、上の 3つの場合は本質的
には $N^{(2)}$ のときと同様に論じられる。

文献

- Bose, R.C. and Mesner, D.M. (1959): Ann. Math. Statist. 30 21-38.
- Kageyama, S. (1972): Ann. Math. Statist. 43 1528-1540.
- Kageyama, S. (1973): Ann. Inst. Statist. Math.

(to appear).

- Kageyama, S. (1973): Ann. Statist. (to appear).
- 景山三平 (1973): ~~数理統計研究所講義録~~ 128
1-8.
- Silittle, G. P. (1952): Biometrika 44 228
- 229.
- Vartak, M. N. (1955): Ann. Math. Statist. 26 420
- 438.