

Group von Neumann algebras associated with non-unimodular locally compact groups

静岡大学 工学部 関根 義浩 (Yoshihiro Sekine)

1 序論

モジュラー理論における基本的な結果のひとつとして知られている「フォン・ノイマン環 M のモジュラー作用 σ による接合積 $M \rtimes_{\sigma} \mathbf{R}$ は半有限である」は、「局所コンパクト群 G の $\mathbf{R}$ へのモジュラー関数により定義される作用 α による半直積 $\mathbf{R} \rtimes_{\alpha} G$ はユニモジュラーになる」という古典的な結果のアナロジーと考えることができる。特に、 M として局所コンパクト群 G の左正則表現から生成される群フォン・ノイマン環 $\lambda(G)$ を考えると、モジュラー作用による接合積 $\lambda(G) \rtimes_{\sigma} \mathbf{R}$ とユニモジュラー群 $\mathbf{R} \rtimes_{\alpha} G$ の左正則表現から生成される群フォン・ノイマン環 $\lambda(\mathbf{R} \rtimes_{\alpha} G)$ という2つの半有限なフォン・ノイマン環が得られる。素朴な疑問として、これらのフォン・ノイマン環は同型であるかどうか気になるが、本稿でこれら2つのフォン・ノイマン環の関係について述べたいと思う。ただし、このことについて書かれている文献はないようであるが、専門家にとってはよく知られていることだと思われる。

2 結果

以下、 G を局所コンパクト群とし、 G 上の左不変ハール測度を μ とする。 Δ を G のモジュラー関数とし、 G の実数全体の加法群 $\mathbf{R}$ への作用 α を

$$\alpha_g(t) = \Delta(g) t, \quad g \in G, t \in \mathbf{R}$$

によって定義すれば、半直積 $\mathbf{R} \rtimes_{\alpha} G$ はユニモジュラーになる。したがって、この群の左正則表現から生成される群フォン・ノイマン環 $\lambda(\mathbf{R} \rtimes_{\alpha} G)$

は半有限である。一方、 G の左正則表現から生成される群フォン・ノイマン環 $\lambda(G)$ 上の荷重 φ を

$$\varphi\left(\int_G x_g \lambda_g d\mu(g)\right) = x_e$$

(e は G の単位元) によって定義すれば、モジュラー作用 σ^φ は

$$\sigma_t^\varphi(\lambda_g) = \Delta(g)^{it} \lambda_g, \quad g \in G, t \in \mathbf{R}$$

となる。

このとき、次のことが成り立つ。

Proposition 1 $\lambda(\mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$ は $L^\infty(\mathbf{R}) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$ に同型である。ここで、 G の $L^\infty(\mathbf{R})$ への作用 $\tilde{\alpha}$ は

$$(\tilde{\alpha}_g(f))(t) = f(\Delta(g)t), \quad f \in L^\infty(\mathbf{R}), g \in G, t \in \mathbf{R}$$

により与えられる。

Proposition 2 $\lambda(G) \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbf{R}$ は $L^\infty(\mathbf{R}) \rtimes_\beta G$ に同型である。ここで、 G の $L^\infty(\mathbf{R})$ への作用 β は

$$(\beta_g(f))(t) = f(t + \log \Delta(g)), \quad f \in L^\infty(\mathbf{R}), g \in G, t \in \mathbf{R}$$

により与えられる。

Corollary 3 $\lambda(\mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$ は $(\lambda(G) \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbf{R}) \oplus (\lambda(G) \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbf{R})$ に同型である。