

二次元の *bisymmetric mean* (特に非対称な場合) の表現について

武蔵工大 奈良 知恵 (Chiê Nara)

実数空間内の任意の区間を I とする。狭義単調増加な連続関数 $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ と実数 t ($0 < t < 1$) を固定する。この時 I に属する二数 a, b の一般化された算術平均

$$N_{\varphi,t}(a, b) = \varphi^{-1} \{ t \varphi(a) + (1-t) \varphi(b) \}$$

を Hardy-Littlewood-Pólya 型の平均 (略し HLP-mean) と呼ぶ。

この関数 $N = N_{\varphi,t}$ は I^2 から I への単調増加な連続関数ですべての $a \in I$ について $N(a, a) = a$ を満たす。更に N は次の *bisymmetry equation* も満たす。

$$(*) \quad N[N(a, b), N(c, d)] = N[N(a, c), N(b, d)]$$

(b と c と交換可能)

そこで一般に関数 $N: I^2 \rightarrow I$ が連続かつ単調増加ですべての $a \in I$ について $N(a, a) = a$ を満たすとき、 N を I^2 上の mean と定義する。更に条件 (*) を満たすとき bisymmetric mean

と呼ぶ。まず bisymmetric mean の歴史的な背景について触れる。

A. Kolmogoroff [3] と M. Nagumo [4] は 1930 年にそれぞれ独立に次の事を示した。

可算個の mean (n 次元に自然に拡張された定義による) の列 $M_n : I^n \rightarrow I$ ($n=1, 2, \dots$) が狭義単調増加かつ対称のとき、すべての $k \leq n$ について

$$M_n(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = M_n[M_k, \dots, M_k, a_{k+1}, \dots, a_n]$$

(ここで $M_k = M_k(a_1, \dots, a_k)$ を表わす)

を満たすならば、狭義単調増加な連続関数 $\varphi : I \rightarrow R$ が存在して

$$M_n(a_1, \dots, a_n) = \varphi^{-1} \left\{ \frac{\varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_n)}{n} \right\} \quad (n=1, 2, \dots)$$

と表せる。

その後、1948年に J. Aczél [1] は一つの固定した n について n 次元の HLP-mean $\varphi^{-1} \{t_1 \varphi(a_1) + \dots + t_n \varphi(a_n)\}$ (ここで $t_1, \dots, t_n$ は $t_i > 0$, $t_1 + \dots + t_n = 1$ を満たす固定した実数) を次の様に特徴付けた。

I^n 上の狭義単調増加な mean M が次の bisymmetric equation

$$M[M(c_1), \dots, M(c_n)] = M[M(r_1), \dots, M(r_n)]$$

(ここで $n \times n$ 行列の列ベクトルを $c_1, \dots, c_n$, 行ベクトルを $r_1, \dots, r_n$ とする)

を満たせば HLP-mean である。

さてここで扱うのは次のものである。

問題 二次元の bisymmetric mean ならばどのような具体的な表現をもつか。

まず、J. Aczél の結果から狭義単調増加な bisymmetric mean は HLP-mean である。また positively homogeneous [2] や対称 [5] な bisymmetric mean についてもその表現は得られている。

ここでは付加条件なしに一般の場合について解決できる事を示す。簡単の為に区間 I は閉区間 $I = [\alpha, \beta]$ とする。

定義 I^2 上の bisymmetric mean を N とする。 $a \in I$ について I 上の関数 $r, \bar{r}, \delta, \bar{\delta}$ を

$$r(a) = \min\{b \in I : N(a, b) = a\}, \quad \bar{r}(a) = \max\{b \in I : N(a, b) = a\}$$

$$\delta(a) = \min\{b \in I : N(b, a) = a\}, \quad \bar{\delta}(a) = \max\{b \in I : N(b, a) = a\}$$

と定義する。そして N が値 a をとる点の集合 $\{(x, y) \in I^2 : N(x, y) = a\}$ を a の 等高線 と呼ぶ。特に $a \geq b \in I$ が存在して

$$\{(a, y) \in I^2 : y \geq b\} \text{ 及び } \{(x, b) \in I^2 : x \geq a\}$$

が a の等高線に含まれる時、 a は b を角にもつ L 型 の点と呼ぶ。

またすべての $y \in I$ について $N(a, y) = a$ (又は $N(y, a) = a$) の時、

a は 垂直型 (又は 水平型) の点と呼ぶ。

bisymmetric mean は次の三つに場合分けされる。

(1) 垂直型の点 a ($\alpha < a < \beta$) が存在する場合。

(2) 水平型の点 a ($\alpha < a < \beta$) が存在する場合。

(3) その他.

(1), (2), (3) 各々について具体的な形は決められるが、ここでは(3)の場合のみ扱う(1)と(2)は少し複雑になる)。以下

I の内点はずべて垂直型でも水平型でもないと仮定する。条件(*)から導かれる本質的な事柄を列挙する。

bisymmetric mean の基本的性質

性質1 $a \in I$ について $N(a, b) = N(a, c) = a$ ($b \leq a \leq c$) ならば、すべての $x \in I$ について

$$N[N(a, x), b] = N[N(a, x), c]$$

が成り立つ。この事から関数 γ 及び $\bar{\gamma}$ は単調増加関数になる。

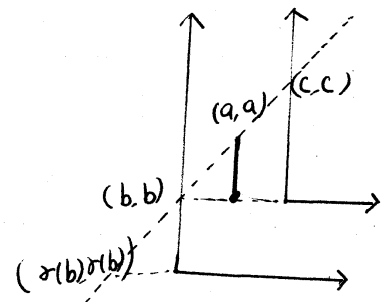
性質2 $\alpha < \gamma(a) < a$ を満たす点 $a \in I$ について

$$\gamma(a) = b, \quad c = \max\{x : \gamma(x) = b\}$$

とおくと b, c はそれぞれ $\gamma(b)$, b を角にもつ L 型の点で、すべての $a \leq x \leq c$ について

$$\gamma(x) = b \quad \text{かつ} \quad \bar{\gamma}(x) = \beta$$

が成り立つ

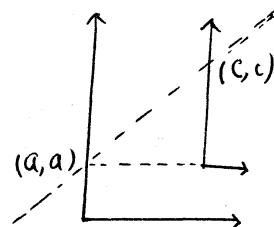


性質2' $\gamma(a) = a < \bar{\gamma}(a)$ を満たす点 a は a 自身を角にもつ L 型の点である。

ある。

実線は等高線を表わし、矢印は境界まで伸びている事を意味する。太線が仮定。

性質3 $a \in I$ が $b (< a)$ を角にもつ L 型の点ならば
 適当な $c (\geq a)$ が存在して c は a を角にもつ L 型の点である。



bisymmetric mean の局所的性質

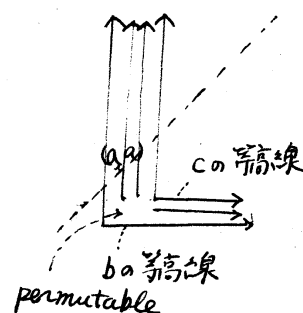
まず $A = \{a \in I : r(a) < \bar{r}(a) \text{ 又は } \delta(a) < \bar{\delta}(a)\}$ とおくと
 性質2と2'より A は閉集合になる。従って $I \setminus A = \bigcup J_n$ (J_n は
 互いに素な開区間と書ける。 N を J_n^2 上へ制限した mean $N|_{J_n^2}$
 は狭義単調増加になる事が bisymmetric の条件から示される。従
 って $N|_{J_n^2}$ は HLP-mean である。また A の元 a についてその局所
 的な形は次の様になる。 $\alpha < r(a) < a$ とする (他の場合も同様
 に示される)。このとき二つの等高線 $b = \max\{x \leq a : x \text{ は L 型の点}\}$
 と $c = \min\{x \geq a : x \text{ は L 型の点}\}$ によって囲まれる部分
 は次を満たす。

矩形 $[b, c] \times [r(c), \beta]$ 上で N の等高線は全て
 垂直, 矩形 $[c, \beta] \times [r(b), r(c)]$ 上で N の等高線
 は全て水平 そして 矩形 $[b, c] \times [r(b), r(c)]$ 上で
 permutable、即ちすべての x, u, v :

$$b \leq x \leq c, \quad r(b) \leq u, v \leq r(c)$$

について

$$N[N(x, u), v] = N[N(x, v), u]$$



である。更にこの矩形上で次の様に表せる。

$$N(x, y) = \varphi^* \{ \varphi(x) + \psi(y) \},$$

ここで φ は $[b, c]$ 上の $[-\infty, 0]$ に値をとる狭義単調増加な連続関数で $\varphi(c) = 0$ を満たし、 ψ は $[r(b), r(c)]$ 上の $[-\infty, 0]$ に値をとる単調増加な連続関数で $\psi[r(c)] = 0$ を満たす。又、記号 φ^* は $\varphi^*(t) = \varphi^{-1} \{ \max \{ \varphi(b), t \} \}$ を意味する。

決まる具体的な形

二つの単調増加な連続関数 $w_i: I \rightarrow R$ の組 $w = (w_1, w_2)$ がすべての $a \in I$ について $\min \{ w_1(a), w_2(a) \} = a$ を満たすとき、 I の二点 a, b の重み付き minimum 型の平均を

$$\min \{ w_1(a), w_2(a) \}$$

と定義し、 $\text{Min}_w(a, b)$ と書く。 Min_w は bisymmetric mean になる。この Min_w を少し変形して作られる重み付き quasi-minimum 型の平均を次の様に定義する。簡単の為、次に仮定する：すべての $\alpha < a < \beta$ について $w_1(a) = a < w_2(a)$ かつ $w_2(a) = a$ (即ち、 $\alpha < a < \beta$ の等高線は対角線より下側で曲がり、 α は α を角にもつ L 型の点である)。 I に含まれる互いに素な開区間の列 $J = \{ J_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ を帰納的に次の様にとる。

$J_0 = (\xi_0, \eta_0)$ は $\eta_0 \leq w_1(\xi_0)$ を満たす様に任意にとる。

$J_n = (\xi_n, \eta_n)$ とするとき $J_n \neq \emptyset$ ならば $J_{n+1} = (w_2(\xi_n), w_2(\eta_n))$

$J_n = (\xi_n, \eta_n)$ とするとき $J_{n-1} = (w_2^*(\xi_n), w_2^*(\eta_n))$

と定める. ここで $w_2^*(t) = \max\{x : w_2(x) = t\}$ とする.

次に $n \in \Lambda$ について $\overline{J_n} = [\xi_n, \eta_n]$ 上の $[-\infty, 0]$ に値をとる狭義単調増加な連続関数 φ_n を $\varphi_n(\eta_n) = 0$ かつ $\varphi_{n+1}(\xi_{n+1}) \leq \varphi_n(\xi_n)$ を満たす様にとる. そこでこの $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n \in \Lambda}$ と $\Phi = \{\varphi_n\}_{n \in \Lambda}$ によって新しく定義される I^2 上の mean

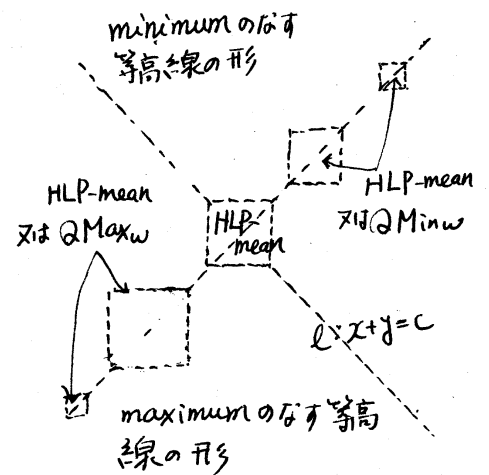
$$M(a, b) = \begin{cases} \varphi_n^* \{ \varphi_n(a) + \varphi_{n-1}(b) \}, & (a, b) \in J_n \times J_{n-1} \text{ のとき} \\ \varphi_n^* \{ \varphi_{n-1}(b) \}, & (a, b) \in [\eta_n, \beta] \times J_{n-1} \text{ のとき} \\ N(a, b), & \text{その他} \end{cases}$$

を N に $\{\mathcal{J}, \Phi\}$ を埋めこんだ mean と呼ぶ. $\bigcup_{n \in \Lambda} J_n$ が互いに素になる様な区間列について、この様な操作をくり返してできる mean を I^2 上の重み付き quasi-minimum 型の平均と呼び、 $QMin_w$ と書く. 重み付き quasi-maximum 型の平均も同様に定義し、 $QMax_w$ と書く.

定理 I^2 上の bisymmetric mean N について、 I のどの内点も垂直型でも水平型でもないならば、互いに素な I の閉区間の列 $\{J_n : n \in \Lambda\}$ が存在して N は各 J_n^2 上で HLP-mean, $QMin_w$ 又は $QMax_w$ になり、その他の点では、適当な $c \in I$ が存在して直線 $l : x+y=c$ の上半分で minimum のなす等高線と同じ形状をもち、直線 l の下で maximum のなす等高線と同じ

形をもつ。

証明は基本的性質と局所的性質を適当に組合せてできる。



参考文献

- [1] J. Aczél, On mean values, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 392-400
- [2] Takashi Ito and Chiê Nara, Quasi-Arithmetic means with weights of continuous functions, to appear
- [3] A. Kolmogoroff, Sur la notion de la moyenne, Atti della R. Accademia nazionale dei Lincei (6) vol. 12 (1930), 388-391
- [4] M. Nagumo, Über eine Klasse der Mittelwerte, Jap. J. Math. vol. 7 (1930), 71-79
- [5] 奈良知恵, 二次元の bi-symmetric mean について S. 59 日本数学会年会予稿集