

氏 名	西 田 吾 郎
	にし だ ご ろう
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	論 理 博 第 433 号
学 位 授 与 の 日 付	昭 和 48 年 5 月 23 日
学 位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres (球面の安定ホモトピー群の元の巾零性)
論文調査委員	(主 査) 教 授 戸 田 宏 教 授 島 田 信 夫 教 授 永 田 雅 宜

論 文 内 容 の 要 旨

N 次元球面 S^N の $(N+t)$ 次元ホモトピー群 $\pi_{N+t}(S^N)$ は、 $N > t+1$ のとき互いに同型となる。これを G_t であらわし t -stem の球面の安定ホモトピー群という。さらに写像の結合によって、積 $G_t \times G_s \rightarrow G_{t+s}$ が与えられ、これによって直和 $G_* = \Sigma G_t$ は有階な (歪) 可換環となる。 $t < 0$ のとき $G_t = 0$, $t > 0$ のとき G_t は有限群、 $t=0$ のとき G_0 は単位元 1 で生成される無限巡回群であることはよく知られている。 G_* の環構造について、「 G_t ($t > 0$) の元はすべて巾零である」という予想が M. G. Barratt によって提出されている。主論文の主目的はこの予想の正しいことを証明することである。

G_t の元をあらわす写像 $f: S^{N+t} \rightarrow S^N$ の n 重スマッシュ積 $f^{(n)}: S^{n(N+t)} \rightarrow S^{nN}$ は (符号を除いて) この元の n 次の巾をあらわすことに着目して、申請者は n 重スマッシュ積を D_n^0 として含む ($f^{(n)} = D_n^0(f)$, $S^{nN} = D_n^0(S^N)$) ホモトピー函手 D_n^r ($r \geq 0$) を構成しその構造を研究した。位相空間 X , および連続写像 f に対して

$$D_n^r(X) = (WS_n^{(r)} \cup pt) \wedge_{S_n} X^{(n)}, \quad D_n^r(f) = 1 \wedge f^{(n)}$$

によって D_n^r が構成される。ここで S_n は n 次対称群, WS_n は S_n -自由な可縮複体, $WS_n^{(r)}$ は WS_n の r -骨格とする。 X が球面 S^N の時, $D_n^r(S^N)$ のホモトピー型が決定され、特に N が $n!$ の充分高い巾で割り切れるとき, $D_n^r(S^N)$ は S^{nN} をレトラクトにもつ。従ってこのような N をとれば、任意の写像 $F: X \rightarrow S^N$ に対して、その n 重スマッシュ積 $F^{(n)}: X^{(n)} \rightarrow S^{nN}$ は $D_n^r(X)$ に拡張することができる。

申請者は主論文の前半において、 G_t の元 $\alpha = [f]$ の位数が素数 p である場合を論じている。この場合、写像 f は Moore 空間 $M = S^N \cup_p e^{N+1}$ からの写像 $F: M \rightarrow S^N$ に拡大される。また、 $D_n^r(M)$ は n および r につれて増大するある次元まで Eilenberg-MacLane 空間の直積に mod p 分解されることが、参考論文の結果および無限次元ループ空間の構造から証明される。これらを組合せることによって次の定理が証明される。「 $\alpha \in G_t$ の位数を p , n を任意の整数, s を $0 < s < \left[\frac{(2p-3)n}{p} \right] - 1$ を満す整数とするとき任意の $\beta \in G_s$ に対して $\beta \alpha^n = 0$ である」。特に $\beta = \alpha$ ($s=t$) の場合として巾零性 $\alpha^{n+1} = 0$ がえられる。

主論文の後半においては、 $\alpha \in G_t$ の位数を一般に k とする。このとき、単位元 ι に対して、 $(k\iota)\alpha=0$ 。従って $D_n^\infty(k\iota)D_n^\infty(\alpha)=0$ である。函手 D_n^∞ は加法的ではないが、 $D_n^\infty(X^\vee Y)=(D_n^\infty(X) \wedge D_0^\infty(Y))^\vee$ $(D_{n-1}^\infty(X) \wedge D_1^\infty(Y)) \vee \dots \vee (D_0^\infty(X) \wedge D_n^\infty(Y))$ が成り立つ。これによって、 $D_p^\infty(k\iota)$ は $p^r g + \binom{k}{p} j^k p$ ($k=ap^r$) の形に分解され、次の定理を導く。

「 t は偶数、 p は奇素数、 $\alpha \in G_t$ の位数は p^m とする。与えられた整数 n に対して、 r は $nt \equiv 0 \pmod{p^{\lceil \frac{r}{p-1} \rceil}}$ をみたす最大の整数とする。このとき任意の $\beta \in G_i$ ($0 < i < 2r$) に対して、 $p^{m-1}(\alpha^n \beta + p\gamma) = 0$ をみたす $r \in G_*$ が存在する」。 $p=2$ の場合も同様な定理が得られる。これらの定理を繰返し適用すれば一般の場合の元の巾零性が証明される。

巾零性のみに関していえば、後半の結果は前半のそれを含むものであるが、巾零 $\alpha^n=0$ となる巾指数 n の評価は前半の方が格段によい結果を与えている。たとえば、 $2\alpha=0$ 、 $\alpha \in G_t$ の場合、前半では $n=2t+3$ で十分であるが、後半の証明法では大略 $n=2^{\frac{t+3}{2}}$ となる。

論文審査の結果の要旨

申請者は、球面の安定ホモトピー群の元の巾零性についての M. G. Barratt の予想を肯定的に解決した。

球面の t -stem 安定ホモトピー群 $G_t = \lim \pi_{N+t}(S^N)$ は位相幾何学および多様体論における基本的な量として重要なものであり、今世紀後半、多数の研究者によって漸次解明されてきたが、未解決の部分も多く残っているものである。J.-P. Serre による、 G_t ($t > 0$) は有限アーベル群であるという結果をはじめとして、群構造については可成りの成果を見たが、結合 $G_s \times G_t \rightarrow G_{s+t}$ を積とする環 $G_* = \Sigma G_t$ の構造については見るべきものがなかった。 G_t ($t > 0$) の元の巾零性 (Barratt の予想) は、 G_* の構造の複雑さを示唆するものとして、その一般的証明を待たれていたものである。

申請者は主論文の前半において、 $\alpha \in G_t$ の位数が素数 p である場合を取扱っている。ここに得られた主定理は次のように述べられる。

「 $0 < s < \left\lfloor \frac{(2p-3)n}{p} \right\rfloor - 1$ をみたす n と任意の $\beta \in G_s$ について $\beta \alpha^n = 0$ 」。この定理は $\alpha = \beta$ の場合として巾零性定理を含み、また、戸田の関係式 $\alpha_1 \beta_1^p = 0$ の一般化とも考えられる。証明の手法はホモトピー函手 $D_n(\) = WS_n \wedge_{S_n}(\)^{(n)}$ の導入による至って明快なものであり、そこでえられた巾零性を示す巾指数の評価は後半のものに比して格段に良い結果である。

主論文の後半においては、一般の位数の場合が取扱われるが、本質的には位数が p^m の場合を考察すれば十分である、次の定理が証明された。

「 $\alpha \in G_t$ において t は偶数、 α の位数は p^m ($p \neq 2$) とする。与えられた整数 n に対して、 r は $nt \equiv 0 \pmod{p^{\lceil \frac{r}{p-1} \rceil}}$ をみたす最大の整数とする。このとき任意の $\beta \in G_i$ ($0 < i < 2r$) に対して、 $p^{m-1}(\beta \alpha^n + p\gamma) = 0$ となる $r \in G_*$ が存在する。」 $p=2$ の場合も同様の定理がえられた。これらを繰返し適用すれば、巾零性定理が一般に証明される。証明には写像度 k の写像 $k\iota: S^N \rightarrow S^N$ に対する $D_n(k\iota)$ の分解を行ない、Kahn-Priddy の定理を応用する。

申請者はホモトピー函手 D_n の考察にあたって、それを安定化してえられるスペクトラム D の性質を抽出して Γ -スペクトラムとして把握し、その分解定理を出しているが、これはコボルディズムのスペク

トラム MD の分解に関する Thom の結果を特殊な場合に含み、他の位相幾何学における重要なスペクトラムにも応用できるものである。

なお、参考論文は無限ループの空間における Dyer-Lashof 作用素とコホモロジー作用素の関係を示す公式を証明したものである。この公式は、「西田の公式」とよばれており、主論文において縦横に駆使されているばかりでなく、ホモトピー論における多くの重要な結果を導き出しているものである。

以上に見られるように、申請者の論文はホモトピー論における画期的な成果を示すのみではなく、その分野における申請者の多大の寄与とすぐれた学識、研究能力を示すに十分である。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。