

4重可移群の分類について

大教大 大山 豪

1. 現在迄に知られている4重可移群は 対称群 S_n ($n \geq 4$), 交代群 A_n ($n \geq 6$) 及び Mathieu 群 M_n ($n=11, 12, 23, 24$) である。

今迄に4重可移群についていろいろ調べてきたが、いまだ分類できそうにない。永尾, 野田, 大山による *On multiply transitive groups I ~ XI* において次の様な結果を得た。

以下 $G: \Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ 上の4重可移群

X を G の部分集合とするとき

$$I(X) = \{i \in \Omega \mid \text{すべての } x \in X \text{ に対して } ix = i\} \text{ とす.}$$

(定理 1)

$G = S_5, A_6, M_{11}$ を除き $|I(G_{1234})| = 4$ である。

(定理 2)

P を G_{1234} の 2 シロー群とす。 $G = A_6, A_7, M_{11}, M_{23}$ を除き $|I(P)| = 4$ 又は 5 である。

2. 最近次の結果を得た.

以下もき G の *involution* の固定点の個数の最大数とす. 即ち $n-t$ は G の 2 シロ-群の *minimal degree* である.

(定理 3)

ある t 個の点の G における *stabilizer* の 2 シロ-群 Θ で,
 $N(\Theta)^{I(\Theta)} = A_t$ 又は S_t なる Θ が存在すれば, G は知られたもの
 すべてに限る.

証明は多少長たらしいが, 考へ方は次による.

$n < 35$ のときの 4 重可移群は知られている故, G を $n \geq 35$,
 $G \neq A_n$ で仮定をみたす最小次数の群とす.

今 $N(\Theta)^{I(\Theta)} = S_t$ とす

$$\alpha_i = (1)(2) \cdots (2i-2)(2i-1 \ 2i)(2i+1) \cdots (t) \cdots$$

なる $N(\Theta)$ の元が存在し, $\langle \Theta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rangle$ ($k = \frac{t}{2}$ 又は
 $\frac{t-1}{2}$) は 2-群をなすとしてよい.

$R = \langle \Theta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i \rangle$ は $\Omega - I(\Theta)$ 上 *semi-regular* と仮定す
 る. このとき $\Omega - I(\Theta)$ 上の R -orbit の長さは $2^i \cdot |\Theta|$ である. α
 を $I(\Theta)$ 上互換のみを高々 i 個もつ $N(\Theta)$ の任意の 2-元とす.
 $N(\Theta)^{I(\Theta)} = S_t$ 故 R は $\langle \Theta, \alpha \rangle$ に共役な部分群を含む. 従って α
 は $\Omega - I(\Theta)$ 上に固定点をもたない. 今 $\langle R, \alpha_{i+1} \rangle$ が $\Omega - I(\Theta)$ 上

semi-regular でないとする。即ち $x_{i+1} \in N(R)$ 故 x_{i+1} は $\Omega - I(\Theta)$ 上のある R -orbit Γ を固定するとす。すると Γ 上に固定点をもつ $\langle R, x_{i+1} \rangle$ の元 ($\neq 1$) は $x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta$ の元で高々 $|\Theta|$ 個である。 $x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta$ の元は $I(\Theta)$ 上 $i+1$ 個の互換のみよりなる故、固定点の個数に関する仮定より Γ 上高々 $2(i+1)$ 個の固定点をもつ。

$\langle R, x_{i+1} \rangle$ の元 x に対し $d(x) = |I(x) \cap \Gamma|$ とおくと

$$\sum_{x \in \langle R, x_{i+1} \rangle} d(x) = |\langle R, x_{i+1} \rangle| = 2^{i+1} \cdot |\Theta|$$

$$\text{一方 左辺} = d(1) + \sum'_{x \in x_1 x_2 \cdots x_{i+1} \Theta} d(x) \leq 2^i \cdot |\Theta| + 2(i+1) |\Theta|$$

$$\therefore 2^{i+1} \leq 2(i+1)$$

$$\therefore i \leq 3$$

従って $\langle \Theta, x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ が $\Omega - I(\Theta)$ 上 semi-regular であることを証明することにより、 $\langle \Theta, x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ は $\Omega - I(\Theta)$ 上 semi-regular となる。 $(n-t \equiv 2 \pmod{4})$ のときは $\langle \Theta, x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ は $\Omega - I(\Theta)$ 上に長さ 2 の orbit を 1 つもち、残りの点の集合の上で semi-regular を示す。

しかし Θ の involution

$$a = (1)(2) \cdots (t) (i \ j) (k \ l) \cdots$$

に対して a と可換な $G_{i,j,k,l}$ の involution u をとると $u^{I(\Theta)} \neq 1$ で、 u は $\Omega - I(\Theta)$ 上に固定点を 4 つ以上もち矛盾を得る。

$N(\Theta)^{I(\Theta)} = A_t$ のときは上の x_i を $I(\Theta)$ 上互換 2 つよりなる元として同様な方法を用いて証明される。

次の補題の証明はむっかしくはない。

(補題)

Q を Ω の任意の m 個の点の G における *stabilizer* の 2-群とすると $N(Q)^{I(Q)} \cong M_{12}$ である。

この補題と定理 3 より次の事を容易に得る

(系 4)

m を偶数, P を $G_{1,2,3,4}$ の 2 シロ-群 ($\neq 1$), $Z(P)$ を P の中心とする。

(1) $I(P) = I(Z(P))$ とすれば $G = S_n (n \geq 6)$, $A_n (n \geq 8, n \equiv 0 \pmod{4})$ 又は M_{12} である

(2) $\Omega - I(P)$ の任意の点 c に対して P_c が $\Omega - I(P_c)$ 上 *semi-regular* ($\neq 1$) であれば $G = S_8$, A_{10} 又は M_{24} である。

(1) は $|I(Q)| = m$ である 2-群 Q に対して $C(Q)^{I(Q)}$ は 4 重可移群で定理の仮定をみたしている事より証明される。

(2) は $N(P_c)^{I(P_c)}$ が又 4 重可移群で $I(P_c)$ の任意の 4 点の $N(P_c)^{I(P_c)}$ における *stabilizer* の 2 シロ-群が *semi-regular* である事より証明される。

(系5)

P を G_{1234} の 2 シロ-群 ($\neq 1$) とす。 P が $\Omega-I(P)$ 上 可移であれば, $G = S_n$ ($n \geq 6$, $n-4$ または $n-5$ が 2 中), A_n ($n \geq 8$, $n-4$ または $n-5$ が 2 中), M_{12} または M_{23} である。

これは次の様にして証明される。 n が奇数のときは、定理 1 及び 2 より G は 5 重可移群になる。従って n は偶数としてよい。このとき P は系 4 の (1) の仮定をみたす。

3. 以上より 5 重可移群あるいは 4 重可移群の決定は次の問題に帰着されるかも知れない。

(問題 1)

系 2 より n が偶数で $I(P) \cap I(Z(P))$ のときの G を求めよ。
これができれば 5 重可移群は決る。

(問題 2)

定理 3 より $|I(Q)| = t$ なる 2-群 $Q(\langle G_{ijk\ell} \rangle)$ で Witt の仮定 (G の元 g で $Q^g \leq G_{ijk\ell}$ ならば $Q^g = Q^h$ なる $G_{ijk\ell}$ の元 h が存在する) をみたす Q が存在する事が云えれば $N(Q)^{I(Q)} = M_{24}$ の場合を除き 4 重可移群は決る。 $N(Q)^{I(Q)} = M_{24}$ の場合は困難ではないと思う。