

Dirichlet series associated with wave forms on $GL(2, H)$

東工大・理学部 高瀬幸一 (Koichi Takase)

§1. wave form.

1-1. $B \in \mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環として, その判別式を $D(B) = d(B)^2$, 極大整環 $O \subset B$ を一つ固定する。 $B_p = B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ ($p \leq \infty$) とおく。 G は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で, $G_{\mathbb{Q}} = GL(2, B)$ とする。 G の $\mathbb{Q}$ 上のフーリエ係を $G_A = \prod'_{p \leq \infty} G_p$ とおく ($G_p = G_{\mathbb{Q}_p} = GL(2, B_p)$)。

$$K_p = \begin{cases} \{g \in G_{\infty} \mid g^* g = 1\} & : p = \infty \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \right) \\ GL(2, O_p) & : p < \infty \quad (O_p = O \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \subset B_p) \end{cases}$$

として, $K = \prod_{p \leq \infty} K_p \subset G_A$ とおく。 K_{∞} は G_{∞} の極大コンパクト部分群であり, $p < \infty$ に対し, K_p は G_p の極大開コンパクト部分群である。

1-2. $GL(2, B)$ 上の wave form の空間 $A(w, p)$ を次の様に定義する:

定義 ユニタリ指標 $w \in \widehat{\mathbb{Q}_A^* / \mathbb{Q}^*}$ と $p \in \mathbb{C}$ に対し, G_A から $\mathbb{C}$ への連続関数 φ で, 次の条件 1) ~ 3) を充てるものの全体を $A(w, p)$ とする;

- 1) $\forall z \in \mathbb{Q}_A^*, \forall g \in G_{\mathbb{Q}}, \forall k \in K$ に対して, $\Phi(zgk) = \omega(z) \cdot \Phi(g)$,
 2) G_{∞} 上の関数として実解析的で, 実 Lie 群 $SL(2, B_{\infty})$ の
 Casimir operator D に対して, $D \cdot \Phi = \frac{1}{8} \cdot (P^2 - 4) \cdot \Phi$,
 3) $\forall M \subset G_A$: compact subset に対して, $\epsilon > 0, r \geq 0$ があって, $\forall g \in M, \forall y \in \mathbb{Q}_A^*$
 に対して, $|\Phi(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot g)| \leq \epsilon \cdot \text{Max} \{ |y|_A^r, |y|_A^{-r} \}$.

上の定義で, $A(w, p) \neq 0$ とすると, $\mathbb{Q}_A^*$ の idele norm $1 \cdot |_A$ に対して
 $\omega = 1 \cdot |_A^{\sigma}$ ($\sigma \in \sqrt{1} \cdot \mathbb{R}$) となるから, $\Phi \in A(1, P)$ に対して
 $\tilde{\Phi}(g) = |N(g)|_A^{\frac{7}{4}} \cdot \Phi(g)$ ($N: M(2, B)$ の reduced norm)

とおくと, $\mathbb{C}$ 上の線形同型 $A(1, P) \ni \Phi \mapsto \tilde{\Phi} \in A(w, P)$ を得る.

注意 B_{∞} の $\mathbb{R}$ -base $\{1, i, j, k\}$ ($i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k$) を取ると

$x = x_1 + x_2 \cdot i + x_3 \cdot j + x_4 \cdot k \in B_{\infty}$ ($x_j \in \mathbb{R}$) とおくとき, Casimir operator

D の作用は次の様になる; G_{∞}/K_{∞} 上の $\mathcal{C}^{\infty}$ -関数 φ に対して,

$$F(x, y) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}\right) \text{ for } x \in B_{\infty}, 0 < y \in \mathbb{R}$$

とおくと,

$$(D \cdot \varphi)\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8} \left\{ y^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 3 \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + y^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \right) \right\} F.$$

こゝで, $SL(2, B_{\infty})$ の右沢分解

$$SL(2, B_{\infty}) = N \cdot A \cdot K_1 \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in B_{\infty} \right\}, A = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \mid 0 < y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$K_1 = K_{\infty} \cap SL(2, B_{\infty})$$

に注意する.

1-3. $t \in B_\infty$ に対して, G_∞ から $\mathbb{C}$ への実解析的関数 W で, 次の条件 1) ~ 4) を満たすものの全体を $W_t(p)$ と書く;

1) $\forall z \in \mathbb{Q}_\infty^\times, \forall k \in K_\infty$ に対して, $W(z \cdot k) = W(z)$,

2) $D \cdot W = \frac{1}{8} \cdot (p^2 - 4) \cdot W$,

3) $\forall x \in B_\infty$ に対して, $W\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z\right) = \exp(-2\pi\sqrt{-1} \operatorname{tr}(\bar{E}x)) \cdot W(z)$ ($\operatorname{tr}: B$ の reduced trace),

4) $\forall M \subset G_\infty$: compact subset に対して, $\epsilon > 0, r \geq 0$ があって, $\forall g \in M, \forall y \in \mathbb{Q}_\infty^\times$ に対して, $\left| W\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z\right) \right| \leq \epsilon \cdot \max\{|y|^r, |y|^{-r}\}$.

すると,

$$\dim_{\mathbb{C}} W_t(p) = \begin{cases} 1 & : t \neq 0 \\ 2 & : t = 0 \end{cases}$$

で, $t \neq 0$ ならば, modified Bessel function

$$K_p(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(pt) dt \quad \text{for } \operatorname{Re} z > 0$$

を用いて,

$$W_t(p) = \langle W_{p,t} \rangle_{\mathbb{C}} \quad W_{p,t}\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = K_p(4\pi \cdot |t| \cdot y) \cdot (4\pi \cdot |t| \cdot y)^2 \begin{cases} 0 < y \in \mathbb{R} \\ |t| = N(t)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

又, $t = 0$ ならば,

$$W_t(p) = \langle W_p^{(1)}, W_p^{(2)} \rangle_{\mathbb{C}} \quad \begin{cases} W_p^{(1)}\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = y^{2+p} \\ W_p^{(2)}\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} y^{2-p} & : p \neq 0 \\ y^2 \cdot \log y & : p = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (0 < y \in \mathbb{R})$$

となる。

± 2, $\Phi \in A(1, p)$ に対して, Fourier 展開

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z\right) = \sum_{t \in B} \Phi_t(z) \cdot \chi(\operatorname{tr}(\bar{E}x)) \quad \text{for } x \in B_A, z \in G_A$$

を考へる。ここで、 Λ は $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$ の 2-ガリ指標で $\Lambda_\infty(x) = \exp(-2\pi i x)$ なるものとし、 tr は B の reduced trace とする。 $\forall t \in B$ に對して、 Φ_t は G_∞ 上の関数として $W_t(p)$ の元だから、 $t \neq 0$ のときは、

$$\Phi_t(g) = \zeta_t(\Phi, g_f) \cdot W_{p,t}(g_\infty) \quad \text{for } g \in G_A$$

とし、 $t=0$ のときは

$$\begin{aligned} \Phi_0\left(\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) &= \zeta_0^{(1)}\left(\Phi, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) \cdot W_p^{(1)}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \zeta_0^{(2)}\left(\Phi, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) \cdot W_p^{(2)}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\text{for } \gamma \in \mathbb{Q}_A^\times, \alpha, \beta \in B_f^\times \subset B_A^\times = \text{finite part} \end{aligned}$$

とおく。

1-4. $P < \infty$ に對して、 G_p から $\mathbb{C}$ への両側 K_p -不変、support compact なる連続関数の全体 $\mathcal{L}(G_p, K_p)$ は、convolution $\varphi * \psi(g) = \int_{G_p} \varphi(x) \psi(x^{-1}g) d_p x$ により、単位元をもつ可換な $\mathbb{C}$ -algebra となる ($d_p x$ は G_p 上の Haar measure で $\int_{K_p} d_p x = 1$ とする)。 $\mathcal{L}(G_p, K_p)$ の $\mathbb{C}$ -algebra としての構造は良くわかってゐる (c.f. Satake [2]) ; $P \mid D(B)$ ならば、prime element $\pi_p \in B_p$ を一固定したとき、double coset $K_p \cdot \begin{pmatrix} \pi_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot K_p$ (resp. $K_p \cdot \begin{pmatrix} \pi_p & 0 \\ 0 & \pi_p \end{pmatrix} \cdot K_p$) の G_p 内での特性関数を $\zeta_p^{(1)}$ (resp. $\zeta_p^{(2)}$) とすると、

$$\mathcal{L}(G_p, K_p) = \mathbb{C}[\zeta_p^{(1)}, \zeta_p^{(2)\pm 1}].$$

又、 $P \nmid D(B)$ のときは、 $B_p = M(2, \mathbb{Q}_p)$ と同一視したとき、
 $O_p = M(2, \mathbb{Z}_p)$ となる様に、 $G_p = GL(4, \mathbb{Q}_p)$, $K_p = GL(4, \mathbb{Z}_p)$ と同一視したとき、double coset $K_p \cdot \text{diagonal}(\underbrace{p, \dots, p}_{k \text{ 回}}, 1, \dots, 1) \cdot K_p$ の G_p 内での特性関数を $\zeta_p^{(k)}$ とすると、

$$\mathcal{L}(G_p, K_p) = \mathbb{C}[\zeta_p^{(1)}, \zeta_p^{(2)}, \zeta_p^{(3)}, \zeta_p^{(k)\pm 1}]$$

となる。

$\mathcal{L}(G_p, K_p)$ は, $A(1, p)$ 上に

$$\psi \cdot \Phi(x) = \int_{G_p} \Phi(g \cdot x) \psi(x) d_p x \quad \text{for } \psi \in \mathcal{L}(G_p, K_p), \Phi \in A(1, p)$$

により作用する。よって, 制限テンソル積 $\mathcal{L}(G, K) = \bigotimes_{p < \infty}' \mathcal{L}(G_p, K_p)$ が $A(1, p)$ 上に作用する。

§2. Mellin 変換

2-1. B_A^* の finite point $\in B_f^* \subset \mathbb{C}$, $O_f^* = \prod_{p < \infty} O_p^* \subset B_f^*$ とおくと, $B^* \setminus B_f^* / O_f^*$ は有限集合であるが, $\Phi \in A(1, p)$ と連続関数 $\psi: (B^* \setminus B_f^* / O_f^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}$ により,

$$L(\Phi, \psi; s) = \sum_{t \in B^*} \sum_{\alpha, \beta \in B^* \setminus B_f^* / O_f^*} \zeta_t(\Phi, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}) \cdot \psi(\alpha, \beta) \cdot |N(\alpha t \beta^{-1})|_f^s$$

$$Z(\Phi, \psi; s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s+1+\frac{p}{2}) \cdot \Gamma_{\mathbb{C}}(s+1-\frac{p}{2}) \cdot L(\Phi, \psi; s)$$

とおく。ここで, N は B の reduced norm, $|\cdot|_f$ は $\mathbb{Q}_A^*$ の idele norm の finite part, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s)$ とおく。すると,

$$Z(\Phi, \psi; s) = \sum_{\alpha, \beta \in B^* \setminus B_f^* / O_f^*} |N(\alpha \beta^{-1})|_f^s \cdot \psi(\alpha, \beta) \cdot \int_{\mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}_A^*} (\Phi - \Phi_0) \begin{pmatrix} \gamma \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot |\gamma|_A^{2s} \alpha^* \gamma$$

と書けて, Φ の保型性

$$\Phi \begin{pmatrix} \gamma \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \Phi \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \Phi \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \alpha \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \gamma^{-1} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{for } \gamma \in \mathbb{Q}_A^*$$

から, Mellin 変換の方法により, 次の定理を得る;

定理 1 1) $Z(\Phi, \varphi; s)$ は全 s -平面に有理形に解析接続され、関数

$$\text{等式 } Z(\Phi, \varphi; s) = Z(\Phi, \check{\varphi}; -s) \text{ 成り立つ。ここで } \check{\varphi}(x, y) = \varphi(y, x).$$

$$2) \quad Z(\Phi, \varphi; s) + \zeta_0^{(1)}(\Phi, \varphi) \cdot (2s+2+p)^{-1} - \zeta_0^{(1)}(\Phi, \check{\varphi}) \cdot (2s-2-p)^{-1} \\ + \begin{cases} \zeta_0^{(2)}(\Phi, \varphi) \cdot (2s+2-p)^{-1} - \zeta_0^{(2)}(\Phi, \check{\varphi}) \cdot (2s-2+p)^{-1} : p \neq 0 \\ -\zeta_0^{(2)}(\Phi, \varphi) \cdot (2s+2)^{-2} - \zeta_0^{(2)}(\Phi, \check{\varphi}) \cdot (2s-2)^{-2} : p = 0 \end{cases}$$

は全 s -平面で正則である。ここで

$$\zeta_0^{(j)}(\Phi, \varphi) = \sum_{\alpha, \beta \in B^* \setminus B_f^* / O_f^*} \zeta_0^{(j)}(\Phi, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}) \cdot \varphi(\alpha, \beta) \quad (j=1, 2).$$

2-2. $\alpha \in B_f^*$ に対して $O_\ell(\alpha) = B \cap (B_\infty \times \alpha \cdot O_f \cdot \alpha^{-1})$ とおく。即ち,

$\alpha = (\alpha_p)_{p < \infty} \in B_f^*$ に対して, right O -ideal $(\alpha) \subset B$ が一意的に存在し

て, $(\alpha) \cdot O_p = \alpha_p \cdot O_p$ for $\forall p < \infty$ となる。このとき $O_\ell(\alpha) = \{x \in B \mid x \cdot (\alpha) \subset (\alpha)\}$

である。ここで $O_\ell(\alpha)^*$ は有限群だから, $\varepsilon(\alpha) = |O_\ell(\alpha)|^{-1}$ とおく

と, ε は $B^* \setminus B_f^* / O_f^*$ 上の関数となる。

$\Phi \in A(1, p)$ と連続関数 $\varphi : (B^* \setminus B_f^* / O_f^*)^2 \rightarrow \mathbb{C}$ に対して,

$$\hat{\Phi}_\varphi \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \int_{B^* \setminus B_f^*} \Phi_1 \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \varphi(x, y, x) d^*x \quad \text{for } y \in B_A^*$$

とおくと,

$$Z(\Phi, \varphi \cdot (\varepsilon \times \varepsilon); s) = \int_{B_A^*} \hat{\Phi}_\varphi \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |N(y)|_A^s d^*y$$

と書いて, これを用いると, 次の定理を得る:

定理 2. $\Xi \in \mathcal{A}(1, P)$ は Hecke eigen form で $\gamma \cdot \Xi = \lambda(\gamma) \cdot \Xi$ for $\forall \gamma \in \mathcal{L}(G, K)$

とする。この Ξ を任意の連続関数 $\varphi: (B^\times \backslash B_f^\times / O_f^\times)^2 \rightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$L(\Xi, \varphi(\xi \times \xi); s) = \hat{\Xi}_\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times d(B)^s \cdot \prod_{p < \infty} H_p(\lambda, p^{-(s+2)})^{-1}$$

となる。ここで

$$H_p(\lambda, T) = \begin{cases} 1 - \lambda(C_p^{(1)}) \cdot T + p^2 T^2 & : \text{PID}(B) \\ 1 - \lambda(C_p^{(1)}) \cdot T + \lambda(C_p^{(2)}) \cdot p T^2 - \lambda(C_p^{(3)}) \cdot p^3 T^3 + p^6 T^4 & : \text{PID}(B) \end{cases}$$

$$\lambda = \prod_{\text{PID}(B)} \pi_p^{-1} \in B_f^\times \quad (\pi_p \in B_p : \text{prime element for PID}(B))$$

とおく。

注意 1. 定理 2 で、 $\text{PID}(B)$ に関する $H_p(\lambda, T)$ は、 $GL(2, B_p) = GL(2, \mathbb{Q}_p)$

の standard な Euler p -factor である (c.f. Satake [2])。

注意 2. simple algebra の乗法群上の保型形式 (保型表現) に附随

する standard な Euler p -factor から定まる L -関数は、Godement -

Jacquet [1] により扱われている。

§3. Rankin-Selberg の方法.

3-1. G' は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群で

$$G'_\mathbb{Q} = \{ g \in GL(2, B) \mid g^* J g = \nu(g) J, \nu(g) \in \mathbb{Q}^\times \} \quad (J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

なるものとする。 $P' = \{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G' \}$ は、 G' の $\mathbb{Q}$ 上定義された

minimal parabolic subgroup である。 $\mathbb{Q}$ 上の 3 テーブル化 G'_A は G_A の

内部分群で、 $K' = K \cap G'_A$ とおく。 $G'_A = P'_A K'$ となるから、 $g \in G'_A$

12 $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}$, $g = \begin{pmatrix} \alpha(g) & * \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix} \cdot k \quad (k \in K')$ とおくと, $\alpha(g) \cdot \delta(g)^{-1} \in \mathbb{Q}_A^\times$ となる。

Eisenstein series

$$E(g, s) = \sum_{x \in \mathbb{P}_\infty \backslash G'_\infty} |\alpha(xg) \cdot \delta(xg)^{-1}|_A^{s + \frac{3}{2}} \quad (g \in G'_A, s \in \mathbb{C})$$

14 $\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}$ で絶対収束し, 全 s -平面へ有理形に解析接続され,

$$G(g, s) = d(B)^s \cdot (1+2s) \cdot \prod_{p \mid D(B)} (1-p^{-(1+2s)}) \cdot Z(1+2s) \cdot Z(\frac{3}{2}+s) \cdot E(g, s)$$

$$(Z(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s))$$

とおくと, 関数等式 $G(g, s) = G(g, -s)$ となる。

3-2. $\Phi \in A(1, P)$ は cuspidal (i.e. $\Phi_0 = 0$) とおくと,

$$Z_\infty^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in G'_\infty \mid 0 < \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset G'_A$$

$$\tilde{\Phi}_1(g) = \int_{\mathbb{B}^\times \backslash \mathbb{B}_f^\times} \Phi_1 \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot g \right) d^\times x \quad \text{for } g \in G_A$$

とおくと,

$$\int_{Z_\infty^+ G'_\infty \backslash G'_A} \Phi(g) \cdot E(g, s) d g = \int_{\mathbb{Q}_A^\times} \tilde{\Phi}_1 \left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot |y|_A^{s - \frac{3}{2}} d^\times y$$

となる。これを用いて, 次の定理を得る;

定理 3. $\Phi \in A(1, P)$ は cuspidal Hecke eigen form とし, $\psi \cdot \Phi = \lambda(\psi) \cdot \Phi$

for $\forall \psi \in \mathcal{L}(G, K)$ とする,

$$\begin{aligned} & \int_{Z_\infty^+ G'_\infty \backslash G'_A} \Phi(g) \cdot G(g, s) d g \times Z(s + \frac{1}{2}) \\ &= \tilde{\zeta}_1(\Phi) \times d(B)^s \cdot \Gamma_\mathbb{A}(s + \frac{3}{2}) \cdot \Gamma_\mathbb{C}(s + \frac{1}{2}) \cdot \Gamma_\mathbb{R}(s + \frac{1}{2} + P) \cdot \Gamma_\mathbb{R}(s + \frac{1}{2} - P) \cdot \prod_{p < \infty} \tilde{H}_p(\lambda, p^{-(s + \frac{1}{2})})^{-1} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\tilde{C}_1(\Xi) = \int_{B^x \setminus B_f^x} C_1(\Xi, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}) d^2x$$

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s), \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}), \quad Z(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \cdot \zeta(s).$$

又, Euler factor $\tilde{H}_p(\lambda, T)$ は次の様に定める; $PID(B)$ のとき,

定理 2 の Euler P-factor

$$H_p(\lambda, T) = 1 - \lambda(C_p^{(1)})T + p^2 T^2 = (1 - \alpha T)(1 - \beta T)$$

に代りて,

$$\tilde{H}_p(\lambda, T) = (1 - \alpha^2 p T)(1 - \alpha \beta p T)(1 - \beta^2 p T)(1 - p^2 T)$$

とおく。 $PID(B)$ のときは, 定理 2 の Euler P-factor

$$\begin{aligned} H_p(\lambda, T) &= 1 - \lambda(C_p^{(1)})T + \lambda(C_p^{(2)})pT^2 - \lambda(C_p^{(3)})p^3T^3 + p^6T^4 \\ &= (1 - \alpha_1 T)(1 - \alpha_2 T)(1 - \alpha_3 T)(1 - \alpha_4 T) \end{aligned}$$

に代りて, $GL(4, \mathbb{C})$ の $V = \{X \in Mat(4, \mathbb{C}) \mid {}^t X = -X\}$ 上の表現 $\rho \in$

$\rho(g) \cdot X = g \cdot X \cdot {}^t g$ により定めるとき,

$$\tilde{H}_p(\lambda, T) = \det \left(1 - \rho \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_4 \end{pmatrix} \cdot T \right)$$

とおく。

注意 定理 3 において, $\tilde{C}_1(\Xi) \neq 0$ とするに, $\forall PID(B)$ に代りて

$\lambda(C_p^{(1)}) = \lambda(C_p^{(3)})$ となる。これは Ξ が old form であることを示し

ている。即ち, Ξ は B^x 上の保型形式からの lifting で, $PID(B)$ なる

P-local 表現の対応は, L-group の対応 $Sym^3: GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(4, \mathbb{C})$ に

附随するものと思われる。

一方、一般の (old form でない) $\psi \in A(1, P)$ に対して 定理 3 を意味あるものにするためには、 $E(g, S)$ の代りに、 P' の Lenn point 上の保型形式でひねった Eisenstein series を用いればよい。

以上二点にっつては、尚若干の考察を要する。

References.

- [1] Godement, R. and Jacquet, H.: Zeta Functions of Simple Algebras.
Lecture Notes in Math. 260 (1972) Springer-Verlag.
- [2] Satake, I.: Theory of spherical functions on reductive
algebraic groups over $\mathfrak{f}$ -adic fields.
Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 18 (1963) 5-69.