

Lubin-Tate 群の指数級数と p 進補間

九大・理 白谷 克巳 (Katsumi SHIRATANI)

九大・理 今田 恒久 (Tsunehisa IMADA)

§ 1. 有理 p 進数体の Lubin-Tate 群

$F(X, Y) \in \mathbb{Z}_p[[X, Y]]$ を有理 p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の 1 つの Lubin-Tate 群とする. 即ち $\pi = p\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$ を素元, $f(X) \equiv \pi X \pmod{\deg 2}$, $f(X) \equiv X^p \pmod{p}$ なる Frobenius 級数 $[\pi]_F(X) = f(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ に対し $f \circ F = F \circ f$ で一意に定まる形式群とする.

height 1 の $\mathbb{Z}_p$ 上の 1 次元形式群はすべて Lubin-Tate 群である.

特に, $f(X) = \pi X + X^p$ から生ずる Lubin-Tate 群を基本 Lubin-Tate 群 $\xi(X, Y)$ という.

乗法群 $G_m(X, Y) = (1+X)(1+Y)-1$ は, $\mathbb{Q}_p$ の $[p]_{G_m}(X) = (1+X)^p - 1$ から生ずる Lubin-Tate 群で, 局所類体論 [1] により, $G_m(X, Y)$ と $F(X, Y)$ は, $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大 K の完備化 $\bar{K}$ の整数環 $O_{\bar{K}}$ 上で同型である. 即ち $\phi(X) = \kappa^{-1}X + \cdots \in XO_{\bar{K}}[[X]]$, $\kappa \in O_{\bar{K}}^\times$ があって

$$\phi : G_m \xrightarrow{\sim} F.$$

F の対数級数 $\lambda_F : F \xrightarrow{\sim} G_a$ (加法群), 指数級数 $e_F : G_a \xrightarrow{\sim} F$ で $\lambda'_F(0) = e'_F(0) = 1$ となるものをとる.

$\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の完備化 $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{C}_p$ の整数環を O として $h(X) \in O((X))^\times$ を任意にとり

$$\frac{Xh'(e_F(X))}{\lambda'_F(e_F(X))h(e_F(X))} = e^{B(F,h)X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(F,h)}{n!} X^n$$

で, 数 $B_m(F, h) \in \mathbb{C}_p$ を定義する.

h の選び方でこれは既知の色々な数を含む. $c \in \mathbb{Z}_p^\times$, $c \neq 1$ をとって X を cX にかえると $H_c(e_F(X), h) = e^{B(F,h)cX} - e^{B(F,h)X} \in XO[[e_F(X)]]$ がすぐ分かるから $e_F(X) = \phi(e^{\kappa X} - 1)$ を代入して, $e^{\kappa X} - 1$ で展開する.

従って, $\alpha_i(h, c) \in O$ があって

$$H_c(e_F(X), h) = X \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(h, c) \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} e^{j\kappa X}$$

が得られ, 係数を比較すると

$$(c^m - 1) \frac{1}{m} B_m(F, h) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(h, c) \Delta^i 0^{m-1} \kappa^{m-1},$$

$$\Delta^i 0^{m-1} = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^{m-1}.$$

これから色々な Kummer 合同式が得られる.

§ 2. p 進補間

さて, ζ を 1 の原始 p 乗根とすると $v = \phi(\zeta - 1)$ は F の真の π 分点で

$$e_F(X) + [\nu]_F(v) = \phi(\zeta^\nu e^{\kappa X} - 1) \quad (\nu = 1, 2, \dots, p).$$

従って

$$H_c(e_F(X), h) - \frac{1}{p} \sum_{\gamma \in \Lambda_{F,1}} H_c(e_F(X) + \gamma, h)$$

は, 上記第 2 項の和で, $(j, p) = 1$ なる条件の j についての和となる. ここで, $\Lambda_{F,1} = \{\gamma \in \mathbf{C}_p; [\pi]_F(\gamma) = 0\}$.

一般に $h(X) \in O((X))$ に対し Coleman ノルム作用素 $Nh(X) \in O((X))$ が定義され,

$$(Nh)([\pi]_F(X)) = \prod_{\gamma \in \Lambda_{F,1}} h(X + \gamma).$$

$h(X) \in O((X))^\times$ なら $Nh(X) \in O((X))^\times$ である.

これを対数微分とすると

$$\frac{\pi(Nh)'([\pi]_F(X))}{\lambda_F'([\pi]_F(X))(Nh)([\pi]_F(X))} = \sum_{\gamma \in \Lambda_{F,1}} \frac{h'(X_F + \gamma)}{\lambda_F'(X_F + \gamma)h(X_F + \gamma)}.$$

X に $e_F(X)$ を代入して, X をかけると
上記は

$$H_c(e_F(X), h) - \frac{1}{p} H_c(e_F(\pi X), Nh)$$

に等しいから

$$\begin{aligned} (c^m - 1) \left\{ \frac{1}{m} B_m(F, h) - \frac{1}{p} \pi^m \frac{1}{m} B_m(F, Nh) \right\} \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(h, c) \sum_{(j,p)=1} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^{m-1} \kappa^{m-1}. \end{aligned}$$

さて, 同型 $\phi(X) = \kappa^{-1}X + \dots$ は, 素元 $\pi = p\varepsilon, \varepsilon \in \mathbf{Z}_p^\times$ に対し $\varepsilon = \kappa^{1-\sigma}$ なる $\kappa \in O_{\bar{K}}^\times$ でとれる [1]. σ は $\bar{K}/\mathbf{Q}_p$ の Frobenius 自己同型である. 従って, $\kappa \equiv \kappa_0 \pmod{p}$, $\kappa_0 \in K$, $f = [\mathbf{Q}_p(\kappa_0) : \mathbf{Q}_p]$, $q_0 = p^f$, $e_0 = p-1$ または $2, d = (p-1, \frac{q_0-1}{p-1})$ とおくと, $\kappa = \omega(\kappa) < \kappa >$, $< \kappa > \equiv 1 \pmod{p}$, $\omega(\kappa)^{e_0 d} = 1$ が分かる. このとき f は κ_0 に依存するから最小の f をとる.

そこで, 普通の場合 ($\kappa = 1$ の場合) より粗い点で上の数を補間する $\mathbf{Z}_p$ 上の連続関数 ($s \neq 1$) が作られる.

定理 1. $\mathbf{Z}_p$ 上の局所解析的関数 $\zeta_p(s, F, h)$ ($s \neq 1$) があって, 正整数 $m \equiv 0 \pmod{e_0 d}$ に対し

$$\zeta_p(1-m, F, h) = -\frac{1}{m} \{ B_m(F, h) - p^{m-1} \varepsilon^m B_m(F, Nh) \}$$

となる.

Lichtenbaum([4]) は, 虚数乗法をもつ $\mathbf{Z}$ 上の楕円曲線 E から生ずる形式群 $F = \hat{E} = \xi$, $\pi = p\varepsilon$, $h(X) = X$ の場合である.

χ を導手 f の Dirichlet 指標とすると, 各 i , $1 \leq i \leq f$, に対し $h_i(X) \in O((X))^\times$ を定め, $h(X) = \prod_{i=1}^f h_i(X)$ とおく. 一般 Bernoulli 数, p 進 L 関数の拡張も

$$e^{B(F, h, \chi)X} = \frac{\chi(-1)}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{i=1}^f \bar{\chi}(i) e^{B(F, h_i)X}$$

$$L_p(s, F, h, \chi) = \frac{\chi(-1)}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{i=1}^f \bar{\chi}(i) \zeta_p(s, F, h_i)$$

で定義するとよい. $\tau(\bar{\chi})$ はガウス和である.

§ 3. $s = 1$ の値

これらの関数の $s = 1$ での留数または値も容易に計算されて次の様になる.

定理 2. $h(X) = X^l h_1(X)$, $h_1(X) \in O[[X]]^\times$, $l \geq 0$ とする.

$$l \neq 0 \text{ なら } \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_p(s, F, h) = l(1 - \frac{1}{p}),$$

$$l = 0 \text{ なら } \zeta_p(1, F, h) = -\log h(0) + \frac{1}{p} \log Nh(0).$$

証明は, $\log e_F(X)$ 及び $\log h(e_F(X))$ を X のべきに展開して, 両辺を微分し, X をかけ係数を比較する. そして, 例えば $l = 0$ のときには

$$\zeta_p(1, F, h) = \lim_{\substack{|m| \rightarrow 0 \\ m \equiv 0 \pmod{e_0 d}}} \zeta_p(1-m, F, h) = -\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{p^\rho e_0 d} B_{p^\rho e_0 d}(F, h)$$

$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \kappa^{p^\rho e_0 d} = 1$, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Delta^i 0^{p^\rho e_0 d} = -\frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^p (\zeta^\nu - 1)^i$ に注意してもとにもどすと

$$\zeta_p(1, F, h) = -\log h(0) + \frac{1}{p} \log Nh(0)$$

が得られる.

これは Leopoldt 公式の類似と見做してよい.

- [1] K.Iwasawa, Local class field theory, Oxford Univ. Press, 1986.
- [2] A.Kudo, *On p -adic Dedekind sums (II)*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. **45** (1991), 245-284.
- [3] E.Kummer, *Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungscoefficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen*, J. reine angew. Math. **41** (1851), 368-372.
- [4] S.Lichtenbaum, *On p -adic L -functions associated to elliptic curves*, Inv. math. **56** (1980), 19-55.
- [5] K.Shiratani and S.Yamamoto, *On a p -adic interpolation of the Euler numbers and its derivatives*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. **39** (1985), 113-125.
- [6] K.Shiratani, *On certain values of p -adic L -functions*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. **28** (1974), 59-82.
- [7] K.Shiratani and T.Imada, *The exponential series of the Lubin-Tate groups and p -adic interpolation*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. **46** (1992), 351-365.