

Hamiltonian の諸形態

大阪教育大・物理 鯖田秀樹*

(1980年11月18日受理)

§ 1. はじめに

Hamiltonian はふつうエネルギーの次元をもった物理量と考えられ、そうした取扱いがなされる。ところが非保存系である散逸力学系での Hamiltonian はエネルギーの次元をもたない。時間変数 t を陽に含まないときには、非保存系の Hamiltonian も保存力学量である。

散逸力学系で Hamiltonian が求まっている例はそう多くはない。その多くない力学系の例について Hamiltonian の物理的意味づけをやりたいものである。

一方、保存力学系ではエネルギーの次元をもつ Hamiltonian 以外の Hamiltonian を考えることができる。それら Hamiltonian の形態からエネルギー以外の Hamiltonian の物理的意味を考えて、非保存系の Hamiltonian の物理的意味を考えることができないか。つまり、保存系のエネルギーを除いた Hamiltonian と非保存系の Hamiltonian との間に共通な物理的意味が付与できないか。

そういう最終的な意図をもって、この小稿では簡単のために自由粒子の集まりである力学系について考察する。Lagrangian および Hamiltonian は与えられた力学系で、一意的なものではなく、無限個存在する場合もある。

自由粒子からなる力学系では当然、無限個存在する。それは、可積分系であるから保存量が無限個あることからもうなずける。

§ 2. 自由粒子系の Hamiltonian

N 個の単位質量をもった自由粒子の集まりを考える。座標変数を q_k ($k = 1, 2, \dots, n = 3N$) で表わす。

運動方程式は

$$\ddot{q}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

で表わされる。

この系の Lagrangian としてふつうは、

$$L = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \dot{q}_k^2 \quad (2)$$

*) SABATA Hideki

鯖田秀樹

をとり, Legendre 変換により Hamiltonian を

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} p_k^2 \quad (3)$$

と求める。

しかし, この Lagrangian は一意的でない。全く特別な場合を考えているに過ぎない。

たとえば

$$L = \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k)^{m+2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

にとりここともできる¹⁾。 $m = 0$ の場合が式(2)と考えられる。

(4)から出発して解析力学のふつうの手順をたどると,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = (m+2) \dot{q}_k^{m+1}, \quad \dot{q}_k = \left(\frac{1}{m+2} \right)^{\frac{1}{m+1}} p_k^{\frac{1}{m+1}} \quad (5)$$

となり, Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H &= \sum_k \dot{q}_k p_k - L = \sum_k \left(\frac{1}{m+2} \right)^{\frac{1}{m+1}} p_k^{\frac{m+2}{m+1}} - \sum_k \left(\frac{1}{m+2} \right)^{\frac{m+2}{m+1}} p_k^{\frac{m+2}{m+1}} \\ &= \sum_k \left[\left(\frac{1}{m+2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \frac{m+1}{m+2} p_k^{\frac{m+2}{m+1}} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

と求まる。今,

$$m+1 \equiv a \quad (7)$$

とおくと,

$$H = \sum_k \left(\frac{1}{1+a} \right)^{\frac{1}{a}} \frac{a}{1+a} p_k^{1+\frac{1}{a}} \quad (8)$$

であり, 係数部分をまとめて A_a と書くと,

$$H = \sum_k A_a p_k^{1+\frac{1}{a}} \quad (9)$$

となる。

この形の Hamiltonian は t を陽に含んでいないから当然, 保存量である。 a つまり m の値を変えると, いろいろな関数形の Hamiltonian が得られ, その物理量の次元も異なる。2つの特別の場合, $m = 0$ ($a = 1$), $m \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$) を考えてみよう。

(i) $m = 0$ ($a = 1$)

$$H = \sum_k \frac{1}{4} p_k^2 \quad (9')$$

$\frac{1}{2}$ ではなく $\frac{1}{4}$ が係数になっているのは、単に式(4)の係数を1にしたためである。この場合はふつう考えられているもので次元もエネルギーと同じであり、Hamiltonianは運動エネルギーを表わしている。

m を $1, 2, 3, \dots$ としていくと、 p_k の巾が2より少くなり、Hamiltonianはエネルギーの意味を失ってくる。

$$(ii) m \rightarrow \infty \quad (a \rightarrow \infty)$$

この場合、 p_k の巾は1に近ずき、Hamiltonianの次元は運動量の次元に近ずく。

係数 A_a を評価すると、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = 1 \quad (10)$$

から、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} A_a = 1 \quad (11)$$

が求まる。よって、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} H = \sum_k p_k \equiv H^\infty \quad (12)$$

という不思議な結論が得られる。

つまり、全 Hamiltonian は全粒子の運動量の和である。

この極限 Hamiltonian を使って正準方程式を書き下すと、

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H^\infty}{\partial q_k} = 0, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H^\infty}{\partial p_k} = 1 \quad (13)$$

が得られ、方程式(1)には矛盾しないが、 $\dot{q}_k$ が任意の値をとれない。Inverse Legendre 変換を行い、 L を p_k の関数のままで計算すると、

$$L^\infty = \sum_k \dot{q}_k p_k - H = \sum_k p_k - \sum_k p_k = 0 \quad (14)$$

となる。一方、Lagrangian (4)式のように $\dot{q}_k$ の関数として計算すると、

$$L^\infty = \sum_k 1 = n \quad (15)$$

となり異なる値になる。これは問題点であり、次節で議論しよう。

いずれにせよ H^∞ はHamiltonianであり、保存量である。それは運動量が保存量であることからもうなずける。

これまでは m を整数としたが、 $m \geq 0$ の任意の実数でも同じ結論が得られる。 $m < 0$ の場合

は、 $m = -1, -2$ では運動方程式にゼロとなる係数がかかり採用できない。

$m \neq -1, -2$ の負数でも $q_k = 0$ が特異点になることから工合が悪い。しかし、ゼロや特異点が含まれないかぎり、実は $\dot{q}_k^{m+2}$ にかぎらず $\dot{q}_k$ の任意関数でよいのである。

$$L = \sum_k f(\dot{q}_k) \quad (15')$$

にとってみる。Lagrange の運動方程式を書き下すと、

$$f''(\dot{q}_k) \ddot{q}_k = 0 \quad (16)$$

となり、 $f''(\dot{q}_k)$ がいわゆる積分因子になっている。

もちろん、 q_k が入ったり、他の粒子の $q_l, \dot{q}_l$ の入った関数を Lagrangian として採用してもよい。そうすると、Hamiltonian の形が複雑になりここでの考察には適さない。

§ 3. 議 論

二階常微分方程式系が与えられたとき、かなり広い条件で Lagrangian, Hamiltonian が存在する。それらを求める一方法が積分因子をかけて微分方程式系を Self-adjoint にすることである。Lagrangian の存在の必要十分条件が微分方程式系が Self-adjoint であることである。Lagrangian が求まると Hamiltonian が求まり、微分方程式系が解析力学の対象になる。

上の例は最初から Self-adjoint になっている微分方程式系にことさら積分因子をかけて、Lagrangian, Hamiltonian の種々の形を求めた。

この場合は、積分因子をかけることによって、Hamiltonian が全エネルギーという意味から全運動量までのいろいろな次元をもった物理量に対応することがわかった。

(14)式と(15)式の見かけの矛盾は以下のように考えると理解できよう。

p_k と $\dot{q}_k$ との間の関係式(5)に着目する。 $\dot{q}_k$ を任意の値 c_k にとり、 p_k を m の関数と考えると、 m が有限の間は p_k も有限値であるが、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_k = \infty \quad (17)$$

と c_k の値によらないで発散する。ただし、 c_k を正と考えておく。 c_k を 1 にしても同じ。

一方、 p_k を正の任意の値 c_k として、 $\dot{q}_k$ を c_k の関数と考えると同様にして、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \dot{q}_k = 1 \quad (18)$$

なる c_k の値によらない極限值が得られ、これは(13)式に一致する。

H^∞ を $\dot{q}_k$ の関数として表わした極限值として計算すると、

$$H^\infty = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_k (m+1) \dot{q}_k^{m+2} = \lim_{m \rightarrow \infty} n (m+1) = \infty \quad (19)$$

となり、 p_k で表わした極限值

$$H^\infty = \sum_k p_k = n \times \infty = \infty \quad (20)$$

と一致する。

Hamiltonian については矛盾はなく、Lagrangian については(14)式と(15)式の不一致が起こる。一応の説明としては、(5)式はあくまでも m が有限のときに成立つ関係式であり、極限ではこの関係式は使えない。実用的な説明としては、Lagrangian は $\dot{q}_k$ の関数として表わしたものでなければならず、 m が有限のとき $L(m, \dot{q}_k)$ の形を求め、

$$L^\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} L(m, \dot{q}_k) \quad (21)$$

とすべきである。又、Hamiltonian も $H(m, p_k)$ を使って、

$$H^\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} H(m, p_k) \quad (22)$$

とすべきである。

このように考えると、(14)式と(15)式の不一致になやまされることもない。以上において $\{p_k\}$, $\{\dot{q}_k\}$ を $p_k, \dot{q}_k$ と略記した。

この問題点から考えると、(4)式の m は有限の実数にしておく方が無難といえる。

§ 4. おわりに

いわゆる Inverse Problem (Inverse Scattering Problem ではない。誤用されることが多い。) はもともとハドロン物理学と関係している。

拡がりをもった粒子の量子力学の建設のため古典力学で基礎固めをしようという目的で研究がなされている。しかし、物性研究者にとっても興味をもてる問題と思われる。

それは散逸系を保存系と同等に扱うことを目指すからである。

ここではもっとも単純な例について徹底的に考察して、その不思議さと面白さを示したが、非線形系についての adjointness は更に興味深く筆者の研究課題である。最後に京大理学部生物物理教室寺本研の新田克己氏に議論に加わっていただいたことを感謝します。

参 考 文 献

- 1) R. M. Santilli, Foundation of Theoretical Mechanics I. Springer-Verlag (1978) P. 149 脚注。
II (Preprint 校正刷)