

小学校算数科・教科専門科目の講義内容に関する

現況調査の結果と標準モデルの提案

滋賀大学名誉教授 丹羽 雅彦 (Masahiko Niwa)
Shiga University
鳴門教育大学 松岡 隆 (Takashi Matsuoka)
Naruto University of Education
奈良教育大学 川崎 謙一郎 (Ken-ichiroh Kawasaki)
Nara University of Education
京都教育大学 大竹 博巳 (Hiromi Ohtake)
Kyoto University of Education
熊本大学教育学部 伊藤 仁一 (Jin-ichi Itoh)
Faculty of Education, Kumamoto University

1. はじめに

私達のチームは昨年度（平成 21 年度）中学校・高等学校の数学教師を養成するための数学専門科目についての調査・研究を行い（[8]）教員養成学部の現状を把握し、標準的モデル案を作成した（[9]）。今年度（平成 22 年度）は調査・研究のテーマの 1 つとして、小学校算数科のための数学専門科目（以下、算数科内容学という）の現状把握と標準モデル案の作成を目指した。

調査は平成 22 年 6～8 月に実施した。本論文は、私たちのチームの以下の研究集会におけるメンバー間の議論に基づいている。

平成 22 年 8 月 3～5 日 奈良教育大学

平成 22 年 12 月 7～9 日 京都大学数理解析研究所

平成 22 年 12 月 19 日 キャンパスプラザ京都

平成 23 年 6 月 13～15 日 京都大学数理解析研究所

平成 23 年 8 月 23～25 日 奈良教育大学

〔7〕〔9〕において、中学校・高等学校の数学教師を養成するために必要な数学専門科目（教育職員免許法における教科に関する科目）において、育成されるべき能力は次のような能力であることを指摘していた。

- (1) 学校教育における算数・数学科の内容の背景にある数学の理論の本質を理解し、教科内容において重点をおくポイントおよび必要性の低さを的確に見抜く能力。
- (2) 学校数学の内容における重要なポイントに対して独自の工夫を加え、内容を明確で分かりやすく説明できる能力。
- (3) 子どもの発言やつぶやき、またつまづきに含まれる発想の芽や本質的な点を見逃さず拾い上げ発展させる授業を展開できる能力。
- (4) 知的好奇心を呼び起こす教材や数学的活動を創意工夫して作りだし、子どもの興味・関心をひき出す授業を展開できる能力。
- (5) 数学の面白さや美しさを伝えて、子どもの興味・関心を育てる能力。
- (6) 子供が数学を創造するような知的探求の場とする授業を実践できる能力。
- (7) 教科内容がどのように変更されようと、主体的な教材研究を行的確な対応ができる能力。

これらの能力は、小学校算数科を教えるためにも必要な能力であるといえるが、次の2つの理由でこれらの能力を十分に育成することは不可能と言わねばならない。

- ・ 受講者の多くが、高等学校で学んだ数学の科目は数学Ⅰに加えるに数学Ⅱまたは数学Ⅱ＋数学Bだけである、という実態があること。
- ・ 大学で学ぶ数学の科目は算数科内容学だけであり、しかも、この科目は半期1コマが一般的なもので授業時間数が極めて限られていること。

従って、限られた条件のなかで、学ぶべき最低限の内容を見つけないといけない。これは私たちの調査・研究により本論文で明らかにされる。

私たちの今年度の調査・研究で明らかになったことは、担当者が小学校算数科のための数学内容学として扱うべきと考える講義項目に、ほぼ共通の認識があると考えられる（以下に述べる調査結果とその考察）ことである。他方で、学ばせたいと考える講義項目が非常に多いにも拘わらず、半期1コマ2単位の授業で行わねばならないという制約がある。小学校算数科の内容学として2単位では不足で、少なくとも倍の4単位は必要であると主張するのが正論であると考えるが、担当者は上の制約の中で苦勞して学生の育成に効果的なあり方を追求している。

半期1コマ（2単位）という限られた時間で小学校教師としての数学的能力の向上を目指すためには、大別して2つの方向性が考えられる。

- ① 小学校算数科に関連する重点的な4～5のテーマに絞る方向。
- ② 小学校算数科の背景として知っておくべき数学的内容を、個々は浅くなるが広く網羅的にとり扱う方向。

この2つの方向の利点・欠点およびそれぞれの場合の授業構成を具体的に検討し提案するこ

とは、次年度（平成 23 年度）の本チームの課題の 1 つとしたい。

2. 小学校算数科 教科専門科目の講義内容に関する調査とその結果

平成 22 年 6 月～8 月に実施した調査の内容は、以下の通りである。

「小学校算数科専門科目の講義内容調査」の方法 調査についての説明

- (1) 調査の主体：RIMS プロジェクト『数学教師に必要な数学能力の研究』（代表者：熊本大学教育学部 伊藤仁一教授）の第 1 チーム（責任者：滋賀大学教育学部 丹羽雅彦教授）。
- (2) 調査の対象：「日本数学会・教員養成大学・学部数学教員懇談会」に会している大学・学部の小学校算数専門科目を担当している数学専門担当教員または数学教育担当教員。
- (3) 調査の目的：小学校教員の免許を取得する学生全員または大多数に、『これだけはぜひ学ばせたいと考える小学校算数科専門科目の講義内容』を探り、小学校算数科専門科目の標準的モデル案の作成に利用するためです。
- (4) 調査結果の報告：まとめは、京都大学数理解析研究所講究録（2011 年予定）などに記載予定。
- (5) 調査の記入方法

小学校「算数科」の教科に関する科目として開講されている講義科目の内容項目について、

調 査 ①	各大学・学部の現状を聞きます。現時点の状況で、A, B のいずれかを記入。 A：概ね扱っている。 B：扱っていない。
調 査 ②	標準モデル案に入れるべきかあなたの考えを聞きます。C, D のいずれかを記入。 C：小学校教員免許を取得しようとする大多数の学生に学ばせたい内容だと考える。 D：小学校教員志望者に学ばせる必要はない内容だと考える。
調 査 ③	末尾の空欄に、小学校教員免許を取得しようとする大多数の学生に修得させたい講義内容項目として追加すべきだと考えられる項目を自由記述で記入して下さい。

記入上 の注意	項目の設定は、ある程度関連する内容はまとめていますので、部分的に扱わないことが混じっていることがあっても、できるだけ柔軟に肯定的に判断して下さい。
------------	---

「小学校算数科 教科専門科目 調査」の集計結果

調査① 調査②

整理 番号	講義内容の項目	調査① A / A+B %	調査② C / C+D %
「数と計算」領域			
1-1	1対1対応, 基数(濃度), 自然数, 集合数(基数)と順序数(序数).	82 %	95 %
1-2	十進法位取り記数法の発見(零の発見を含む)とその重要性.	68	91
1-3	繰り上がりのあるたし算: 10の補数, 加数分解. 繰り下がりのあるひき算: 減加法, 減減法.	55	82
1-4	たし算, ひき算の意味: 合併, 添加, 求残, 求差, 求補. かけ算, わり算の意味: 同数累加, 数直線の利用, 等分除と包含除等.	77	91
1-5	整数の性質: 倍数・約数・素数, 素因数分解, 商と余り, ユークリッド互除法, 最大公約数・最小公倍数等.	86	95
1-6	分数の演算の指導上の留意点: 分数の加法減法, 分数の除法(分母と分子を逆にしかける理由等).	77	82
1-7	数の構成(自然数, 整数, 有理数, 実数, 複素数への数の拡大).	73	77
1-8	数の歴史, 代数学の歴史(方程式など).	23	59
「量と測定」領域			
2-1	量の理論を基にした数の理論: 量と数の数学的な関係.	32	68
2-2	離散量(分離量)と連続量, 連続量を表す数としての分数と小数, 外延量と内包量.	50	77
2-3	分数の意味: 量分数と割合分数.	77	86
2-4	黄金比, フィボナッチ数列(葉序)等.	32	55
2-5	面積: たて×よこの意味, 種々の直線図形の面積等.	73	91
2-6	円周率(の歴史), 円の面積の公式の理由.	73	95
2-7	体積: カバリエリの原理, 錐体の体積に $1/3$ が現れる理由等.	50	86
「図形」領域			
3-1	図形の性質を考察する観点としての対称性, 敷き詰め等.	68	77
3-2	ユークリッド幾何学の基本とギリシア作図問題.	36	68
3-3	三角形の内角の和と平行線, 三角形の合同条件・相似条件, 決定条件との関係.	50	73
3-4	オイラー標数と正多面体, 立体模型等.	45	64
3-5	幾何学の歴史(ユークリッド幾何および非ユークリッド幾何, さまざまな幾何学等).	23	59

「数量関係」領域			
4-1	比と割合、比例関係等.	55	86
4-2	資料の整理：種々の表・グラフの利用法、データの解析・処理等.	50	91
4-3	確率的な見方（確率論の歴史）、統計的推論.	18	64
4-4	関数概念の歴史、解析学の歴史（微分積分学の成立と発展等）.	14	55
その他			
5-1	数学的な考え方、数学的な問題解決の意味と方法.	59	77
5-2	数学的推論と証明の意義、数学的な表現.	27	64
5-3	応用 1：ISBN, バーコード, QR コード, 暗号などの紹介.	5	27
5-4	応用 2：統計・確率の日常生活や経済、工学等への応用の紹介.	5	55

調査③ 追加事項

追加した方がよい項目に関する自由記述については簡略化して列記する。

【「数と計算」領域】

- ・十進法（漢数字、ローマ数字なども十進法であること）および十進位取り記数法
- ・数の表記（分数、小数）とそれで表される数の区別
- ・かけ算、わり算の意味：基準となる大きさ、割合、割合に当たる大きさ
- ・小数を含む数の四則演算
- ・筆算の意味（筆算のアルゴリズムの正当性）
- ・小学校学習指導要領第 5 学年の教材で小数の割り算で余りがあるものに関して、商を整数に限れば、「9.3 リットルの水を 1.5 リットルのボトルにつめていったら、何本のボトルにつめられ、何リットル余るか」というような問題や、整数とは限らない二つの数の間のユークリッドの互除法など、意味があるが、教科書によっては、商を小数第一位まで求めよという問題も載っているものがある。商を非整数まで拡張し、かつ余りを出すことは、まったく無意味であると考ええる。
- ・この授業科目では、指導法に関する内容は、扱うべきではないと考える。学生は、「指導ができれば自分は勉強ができなくてもいい」と考えがちなので、けじめをつける必要がある。
- ・概数
- ・Rule of Compensation についての知識
- ・かけ算の意味①量のかけ算②倍のかけ算③直積 の明確化
- ・その逆演算として、わり算の意味①等分除と包含除②倍の第 1 用法と第 3 用法
③面積÷長さ。特に、①での乗除の構造図の利用
- ・小数の乗除とその意味

【「量と測定」領域】

- ・小学校学習指導要領解説算数編の比の定義は誤っている。
- ・有効数字
- ・計算の素過程
- ・数直線、台形の面積、三角錐の体積。「量と測定」からみた他領域とのつながり。

【「図形」領域】

- ・直線概念：直線と線分の違い、無限に伸びたものを直線という。
点や直線というものは、本当は見ることのできないものであるということの確認
- ・平面概念
- ・直線と直線、直線と平面、平面と平面の位置関係：垂直、平行の定義
- ・直方体の向かい合った二辺が平行であることの証明
- ・分割合同
- ・立体の見取図と展開図
- ・立体図形の展開図、折り紙
- ・立体製作
- ・図形が存在する空間の認識と座標

【「数量関係」領域】

- ・関数の考え
- ・式に表すこと・式を読むこと
- ・割合に関する文章題

【その他】

- ・学習指導要領とその変遷

3.調査結果に関する考察

- (1) 調査を準備している段階での議論では、小学校6年間で学ぶ算数科の内容は非常に多様であるから、算数科内容学（算数科のための教科専門科目）の授業内容は、各大学の担当者によってバラバラであり、一定の標準案に収束させることは困難になるのではないか、という予測をもつ意見が多かった。しかし、調査を終えて結果を見てみると、[8]で報告した中学校・高等学校の数学教師のための数学専門科目の調査の場合よりむしろ共通性が高かった。つまり、小学校の教師となる学生のために算数科の内容学として、これだけは伝えたい、または、これだけは学習してほしいと授業担当者が考える項目は、かなり高いレベルで一致していることが分かった。
- (2) 調査①の回答は、大きく2つのパターンに分かれた。
 - ア) 講義内容項目の選択が少なく、講義は重点的にテーマをしばって行われていると考えられるケース（5名）
 - イ) 講義内容項目の選択が多く、講義では種々の話題を広く浅く扱っていると考えられるケース（14名）

(その他 2 名は、小学校算数教科の指導法も担当し、話題を分割しているケースである)。

- (3) 調査②の回答については、ア) のケースの方を含め、ほとんどの授業担当者が非常に多くの項目を支持している。その理由として 1 つには、小学校算数の教科専門の講義内容については、これまでほとんど話題にされたことがなかったので、このアンケートで挙げられた多彩な項目に対して、こんな内容も扱ってみたいというような受け止めにされた方もあったのではないかと推測している。
- (4) 現在行われている授業では、ごく少数の人しか扱っていない項目であるにも拘わらず、多くの人が扱うべきだと答えた項目がかなりあった。このことは、今後、これらの分野に関しては、適切な教材 (1~2 コマの授業案等) を提示していく必要があることを示している。
- (5) 特に、(調査②C の%)と(調査①A の%) の差について、大きい順に、5-4 統計・確率の日常生活や経済、工学等への応用の紹介、4-3 確率的な見方 (確率論の歴史)・統計的推論、4-2 資料の整理: 種々の表・グラフの利用法、データの解析・処理等が挙がる。小学校教師を目指す学生が学ぶべき数学の内容として、統計や確率の指導を増やすことへの志向が極めて高いと考えられるが、今のところ、この分野で学生に理解しやすいような簡潔な授業案が不足している。この分野でのテキストが特に求められる。
- (6) 調査③の追加したい授業項目に関する自由記述において、「図形」領域における立体図形の取扱い、特に、立体の見取図と展開図、模型作りなどの話題を追加する方がよいという意見が多かった。
- (7) 調査③の意見のうちいくつかは、調査項目の内容に対する解釈上の違いという側面があるように思われる。
- (8) 小学校算数科に関して、調査の対象としている「教科専門科目 (算数科内容学)」と「教科の指導法に関する科目」とは内容的には重なる部分も多い。重複した場合にも指導法の授業とは異なった教科の専門 (内容学) であるという特色を出していくことが可能だと考えられる。特に、担当者が教科専門教員の場合は、教科教育教員の担当科目とは異なった切り口となるであろう。
- (9) 教員養成学部であってもほとんど大学で半期 2 単位のみ実施されており、上記のような多様な内容項目を 1 回ごとの授業でこなしている大学が多い。「数と計算」領域の背景となる量と数に関する理論や、「資料の整理」領域の背景となる確率・統計など、複数回の授業で扱う方がよい項目も多い。時間的制約の中で、内容は浅くなるが広く行うか、項目をしぼって重点的に行うか、授業担当者はさまざまな試行をしながら効果的な授業を探っていると推測される。
- (10) 今後の課題として、他に、次のような意見があった。
 - ① 小学校算数科内容学の授業では、教員からの視点だけでなく、(分数計算の意味や立体図形など) 学生の弱点である領域や項目に注目するという視点も必要ではないか。
 - ② 調査対象の科目について、これまで余り議論されることがないので、今後、各大学の担当者が授業構成のノウハウを出し合っていくことが必要ではないか。

4. 算数科内容学（小学校算数科・教科専門科目）の標準モデルの提案

調査結果を踏まえて、標準モデルを提案する。

算数科内容学（小学校算数・教科専門科目）の標準

講義内容の項目	
「数と計算」領域	
必修項目	(1-1) 1対1対応と基数（濃度）、自然数、集合数（基数）と順序数（序数）、 (1-2) 位取り記数法（零の発見を含む）、 n 進法、 繰り上がりのあるたし算、繰り下がりのあるひき算、 (1-3) 自然数・分数の四則演算の意味（除法で分母と分子を逆にしてかける理由等）、 (1-4) 整数の性質（倍数・約数・素数、素因数分解、ユークリッド互除法、最大公約数・最小公倍数等）、 (1-5) 数の構成（自然数から出発し、整数、有理数、実数、複素数への数の拡大）。
選択項目	(1-6) 数の歴史、代数学の歴史（方程式など）。
「量と測定」領域	
必修項目	(2-1) 離散量（分離量）と連続量、外延量と内包量、連続量を表す数としての分数と小数、 (2-2) 分数の意味：量分数と割合分数、 (2-3) 面積の意味、種々の直線図形の面積、 円周率（の歴史）、円の面積の公式の理由、 (2-4) 体積：カバリエリの原理、錐体の体積に $1/3$ が現れる理由等。
選択項目	(2-5) 量の理論を基にした数の理論または量と数の数学的な関係。
「図形」領域	
必修項目	(3-1) 図形の性質を考察する観点としての対称性、敷き詰め等、 (3-2) 多角形の内角・外角、三角形の合同条件・相似条件、 (3-3) 立体図形：見取り図、展開図、立体模型等。
選択項目	(3-4) ユークリッド幾何学の基本とギリシア作図問題、 (3-5) 位相的概念：オイラー標数と正多面体、 (3-6) 黄金比、フィボナッチ数列（葉序）等、 (3-7) 幾何学の歴史（ユークリッド幾何および非ユークリッド幾何、様々な幾何学）。
「数量関係」領域	
必修項目	(4-1) 比と比の値、割合。

	(4-2) 関数：比例関係と関数. 式・表・グラフの利用等. (4-3) 資料の統計的处理.
選択項目	(4-4) 割合を用いた文章題. 特殊算の紹介. (4-5) 確率的な見方（確率論の歴史）. 統計的推論. (4-6) 統計・確率の日常生活や経済、工学等への応用の紹介. (4-7) 関数概念の歴史. 解析学の歴史（微分積分学の成立と発展等）.
その他	
必修項目	(5-1) 数学的な考え方、数学的な問題解決の意味と方法.
選択項目	(5-2) 数学的推論と証明の意義. 数学的な表現.

【注意】

- ・項目により重みや授業に必要な時間数は異なる。各項目は1コマの授業を想定して作られたものではないので必ずしも均一ではない。
- ・必修項目のうちのいくつかは、算数科の指導法に関する科目でも扱われる。重なる項目については、扱わないかまたは教科専門的な内容に限って軽めに扱うことが適切である。その場合には、選択項目から扱うものを増やすのが妥当と考える。
- ・算数科の複数の領域に関連した項目もあるが、便宜的にある領域に入れておいた。また、講義項目は算数科の領域に沿って並べたが、算数科内容学の講義で扱う場合の項目の並び順は、数学の学問的な視点等も考慮して、別の系統的配置を行う方が適切であろう。

5.おわりに

小学校算数科の専門科目（算数科内容学）の授業において、学ばせるべき内容については「算数科内容学の標準」という形で明確にした。小学校教師として算数科を教えるための専門的能力を育成するために「算数科内容学」ではどのような授業構成をしたらよいかという課題は次年度の課題であるが、そのことを検討する際に頭においておくべき視点を、最後に述べておくことにする。

第一に、算数科内容学の受講生について、高校では文系に属するものが多く、大学ではこの授業以外に数学の科目を選択しないケースも多いという実態に配慮しなければならないという点である。そうした受講生にとっても、興味をもって真剣に取り組めるような魅力ある内容を工夫する必要がある。

第二に、中学校・高等学校教師として数学を教える者と同様に、小学校教師として算数を教える者にとっても、子どもたちが算数・数学を学ぶ意味を理解していることが重要である、

という点である。

小学校算数で学ぶ内容は、日常生活や社会生活において絶対に必要となる高い実用性をもっているものがほとんどである。また、「数」や「かたち」などの算数で学ぶ概念は国語で学ぶ「ことば」とともにコミュニケーションにおける言語の重要な柱である。数、図形に加えて式、表、グラフなどは算数・数学以外のいろいろな学習での課題解決の手段としても用いられる。さらに、概念の抽象性や問題を解くときの推論の論理性なども、中学校以降の種々の教科の基礎的能力となっていくものである。子どもたちが算数・数学を学ぶ意味を学生が理解するには、算数科内容学の授業において、授業担当者がその必要性を説明するだけでは片方の耳から入り他の耳から出ていくだけである。個々の教材が、中高の数学科の内容、数学の分野や歴史、数学以外の学問分野、自然、社会とどのように繋がっているのかを、学生自身が自分の経験を振り返りながら繋がりを考察する経験によって実感として掴むことができると思う。

第三に、学生が「算数科の内容は子どもの頃に学んだことがあり算数のことは分かっている」と思っているからといって、算数で教える内容を十分に理解しているという訳ではないことである。

算数の内容の根底にある数学の知識や見方・考え方を理解し、児童の状況に応じて授業内容を自ら構成できる力量までが必要であり、これを可能にするには、授業方法の上手・下手ではなく、数学的内容の深い理解こそが必要である。学生が小学校・中学校・高等学校で学んだ知識はもちろん重要であるが、それだけでは十分ではない。算数のさまざまな領域の教育内容の根底にはどんな数学があるのかを知り、それらを「教える立場に立って」考えてみるような経験が必要である。その場合、教える算数の内容が、なぜそうなっているのか、なぜそのような計算をするのか等、意味と理由を理解することが重要である。

算数科内容学は 15 回で構成されるのが普通であるが、学生が上のような視点を持ち毎回の授業で自覚をもって主体的に学習するとすれば、かなりの成果が期待できるであろう。

参 考 文 献

- [1] 川崎謙一郎・伊藤直治・河上哲・市原一裕・石田正樹・藤井智康・和田穰隆・松山豊樹
「理数科高校教員の養成のためのアセスメント実践」奈良教育大学教育実践センター紀要 第 17 号 (2008 年 3 月) pp.275-282
- [2] 川崎謙一郎「理数科教員養成のためのプログラム実践報告ー 1 つのアセスメント実践の報告ー」, 数学教育学会 2008 年春季年会発表論文集 (2008 年 3 月) pp.121-123

- [3] 川崎謙一郎「数学教育における『リンク』に関する1つの考察－教員養成大学教科専門教員として感ずること－」, 数学教育学会 2008 年春季年会発表論文集 (2008 年 3 月) pp.181-183
- [4] 川崎謙一郎「理数科教員養成の中の数学教員養成のカリキュラムの構成の一例－数学教師に必要な数学能力形成に関する学士課程カリキュラム編成の例－」, 数理解析研究所講究録 1657 (2009 年 7 月) pp.83-93
- [5] 松岡隆「第 4 章 数学科の教科内容構成の原理と枠組み」, 西園芳信・増井三夫編「教育実践から捉える教員養成の教科内容学研究」風間書房, 2009 年
- [6] 松岡隆「第 5 章 算数・数学科の教科内容学」, 平成 22 年度日本教育大学協会特別研究助成研究報告書「教員養成における「教科内容学」研究」(研究代表者 増井三夫), 2011 年
- [7] 丹羽雅彦、松岡隆「教員養成学部の「数学」教科専門科目カリキュラムの現状把握と理想的モデル案に向けた調査検討の構想」, 数理解析研究所講究録 1657 (2009 年 7 月) pp.74-82
- [8] 丹羽雅彦、松岡隆、川崎謙一郎、伊藤仁一「「教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容についての調査」の結果とその考察」, 数理解析研究所講究録 1711 (2010 年 9 月) pp.89-105
- [9] 丹羽雅彦、松岡隆、川崎謙一郎、大竹博巳、伊藤仁一「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」, 数理解析研究所講究録 1711 (2010 年 9 月) pp.106-129
- [10] 丹羽雅彦「教員養成課程の教科「数学」専門科目における「証明」の扱いに関する考察 I」, 滋賀大学教育学部紀要 第 56 号(2006)pp.63-75
- [11] 丹羽雅彦「同上 II」, 同上 第 57 号(2007)pp.23-40