

On the cubics defining abelian varieties

関口 力 (中央大理工)

0. 標数 p の代数体 K 上定義された abelian variety を X とし, その上の ample な invertible sheaf を L とする。整数 a (≥ 3) に対し, $\Psi_a: X \hookrightarrow \mathbb{P}(P(L^a))$ を標準的な埋め込みとし, $\mathcal{K} = \text{Ker}(S^3(P(L^3)) \rightarrow P(L^9))$ (但し, S^3 は 3 次の symmetric product を意味する) とおく。本講の目的は, 以上の設定の下に, 次の定理を証明することにある。

定理. $p \neq 2, 3$ の時, $\Psi_3(X) = \bigcap_{F \in \mathcal{K}} F$ ideal-theoretically. 但し, "ideal-theoretically" の意味は, Mumford [5] の意によるものとする。

一般的な偏極 abelian variety については, 標数に関する制限なしで, Morikawa [4] により, この事実が与えられている。4 以上の a に対しては, Mumford [5] により, $\Psi_a(X)$ が ideal-theoretically に, 2 次曲面の交わりとして表わされることが示されている。我々は, この Mumford の定理を用いて, 上記の定理を導く。

1. Mumford の定理

$a \geq 4$ とし, 2以上の整数 p, g を $p+g=a$ とし任意に固定する。 P を $X \times X$ 上の Poincaré invertible sheaf とし, $\alpha \in \hat{X}$ に対し, $P_\alpha = P|_{X \times \{\alpha\}}$ とおく。更に, $\alpha \in \hat{X}$, $u_1, u_2 \in \Gamma(L^p \otimes P_\alpha)$, $v_1, v_2 \in \Gamma(L^g \otimes P_\alpha)$ に対し, $Q_{u_1, u_2, v_1, v_2}^{(\alpha)} = u_1 t_1 \odot u_2 t_2 - u_1 t_2 \odot u_2 t_1 \in S^2(\Gamma(L^a))$ とおく。但し, 記号 $\odot$ は, $S(\Gamma(L^a))$ にあける積を意味する。

定理 (Mumford [5]). Ideal-theoretically,

$$\Psi_n(X) = \bigcap_{\alpha \in \hat{X}} \bigcap_{\substack{u_1, u_2 \in \Gamma(L^p \otimes P_\alpha) \\ v_1, v_2 \in \Gamma(L^g \otimes P_\alpha)}} Q_{u_1, u_2, v_1, v_2}^{(\alpha)}.$$

この定理は容易に、次の形に変えることが出来る。

系 U を $\hat{X}$ の任意の空でない開集合とする

なるは, $\Psi_n(X) = \bigcap_{\alpha \in U} \bigcap_{\substack{u_1, u_2 \in \Gamma(L^p \otimes P_\alpha) \\ v_1, v_2 \in \Gamma(L^g \otimes P_\alpha)}} Q_{u_1, u_2, v_1, v_2}^{(\alpha)}$

ideal-theoretically.

2. 正規生成性について

定理 2.1. 標数 $p \neq 2$ とし, α, β を $\hat{X}$ の任意の点とする。このとき, 点 γ を $\hat{X}$ の一般的に

位置にとれば，積写像

$$\Gamma(L^2 \otimes P_{\alpha+\gamma}) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_{\beta-\gamma}) \longrightarrow \Gamma(L^4 \otimes P_{\alpha+\beta})$$

は，全射となる。

証明は， ψ -関数の加法公式を用いて，上記の写像を行列表示とし，行列式を計算することにより容易に示されるのであるが，簡単な割には有用で，我々の議論の鍵になるものであり，標数 $p=2$ の場合にも証明されることが望まれる。

次の定理は $a, b \geq 4$ に対しては Mumford [5] で与えられ，Koizumi [3] により標数 0 の場合には， $a \geq 2$, $b \geq 3$ まで拡張された。更に任意標数について Sekiguchi [7], [8] に与えられている。

定理 2.2. $a \geq 2$, $b \geq 3$ の時，任意の 2 点 $\alpha, \beta \in \hat{X}$ に対し，

$$\Gamma(L^a \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L^b \otimes P_\beta) \longrightarrow \Gamma(L^{a+b} \otimes P_{\alpha+\beta})$$
 は全射である。

特に，標数 $p \neq 2$ の場合には，定理 2.1 より簡単にこの定理が導かれる。実際，Mumford の補題 ([5], §3)

補題 2.3. L, M を X 上の ample な invertible

sheaf とし, U を X の任意の空でない開集合とする。

$$\sum_{\alpha \in U} \Gamma(L \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(M \otimes P_\alpha) \longrightarrow \Gamma(L \otimes M)$$

は全射。

を用いれば, $a=2, b=3$ の場合を示せばよいことがわかる。ここで定理 2.1. により, X の開集合 U を, $\alpha \in U$ に対し, $\Gamma(L^2) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \longrightarrow \Gamma(L^4 \otimes P_\alpha)$ が全射となるように選ぶ。このとき, 図形

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(L^2) \otimes \Gamma(L^3) & \longrightarrow & \Gamma(L^5) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma(L^2) \otimes \left\{ \sum_{\alpha \in U} \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L \otimes P_\alpha) \right\} & \longrightarrow & \sum_{\alpha \in U} \Gamma(L^4 \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L \otimes P_\alpha) \end{array}$$

の下段の写像は, U の選びえから全射であり, 右端の写像は補題 2.3 により全射である。従って上段の写像の全射を得る。

更に, 簡単な計算により, 次の補題を得る。

補題 2.4. 標数 $p \neq 3$ のとき,

$$\sum_{\alpha \in \hat{X}_3} \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L \otimes P_\alpha) \longrightarrow \Gamma(L^3)$$

は全射。但し, $\hat{X}_3$ は X の 3 分点のなす部分群を意味する。

3. 主定理の証明.

命題 3.1. 次の図形は可換である。

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{(\Psi_3, \Psi_4)} & \mathbb{P}(\Gamma(L^3)) \times \mathbb{P}(\Gamma(L^4)) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P}(\Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^4)) \\ X & \xleftarrow{\Psi_7} & & & & \\ & & \xrightarrow{\Psi_7} & \mathbb{P}(\Gamma(L^7)) & \xleftarrow{\mathbb{P}(\tau)} & \end{array}$$

但し, τ は Segre embedding であり, $\tau: \Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^4) \rightarrow \Gamma(L^7)$ は積写像である。更に,

$$J^{-1}(I_m(\mathbb{P}(\tau))) \cap \{\mathbb{P}(\Gamma(L^3)) \times \Psi_4(X)\} = I_m(\Psi_3, \Psi_4)$$

が成り立つ。

証明 X の点 x と, $u_1, u_2 \in \Gamma(L^2 \otimes P_x)$, $v_1, v_2 \in \Gamma(L^2 \otimes P_x)$

$u, v \in \Gamma(L^3)$ に對し, $F_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2}^{(*)} = (u \otimes u_1, v_1) \odot (v \otimes u_2, v_2) - (u \otimes u_1, v_2) \odot (v \otimes u_2, v_1) \in S^2(\Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^4))$ とおくと, 明らかに,

$$J(\mathbb{P}(\Gamma(L^3)) \times \Psi_4(x)) \subset F_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2}^{(*)}.$$

一方, $S^2(\tau)(F_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2}^{(*)}) = Q_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2}^{(*)}$ であり, 定理 2.2 と Mumford の定理に注意すれば,

$$\mathbb{P}(\tau)^{-1}\left(\bigcap_{\substack{\alpha \\ u,v \\ u_1,u_2 \\ v_1,v_2}} F_{u,v,u_1,u_2,v_1,v_2}^{(*)}\right) = \Psi_7(x)$$

がわかる。従って, $\mathbb{P}(\tau)^{-1}(J(\mathbb{P}(\Gamma(L^3)) \times \Psi_4(x))) \subset \Psi_7(x)$ となり, 逆の包含関係は明白であるから,

$$J(\mathbb{P}(\Gamma(L^3)) \times \Psi_4(x)) \cap I_m(\mathbb{P}(\tau)) = \mathbb{P}(\tau)(\Psi_4(x))$$

を得。我々の結果を得る。

non-trivial な線型写像 $\ell: \Gamma(L^3) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し決まる $\mathbb{P}(\Gamma(L^3))$ の点を $[\ell]$ と書くこととする。任意の点 $\alpha \in \hat{X}$ に対し, $\mathcal{Q}_\alpha = \{Q_{u_1, u_2, v_1, v_2}^{(\alpha)} \mid u_1, u_2 \in \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha), v_1, v_2 \in \Gamma(L \otimes P_\alpha)\}$ とおく。このとき, 簡単な計算で次の事実がわかる。

補題 3.2. $[\ell] \in \mathbb{P}(\Gamma(L^3))$ に対し,

$$[\ell] \in V(\mathcal{K}) \implies \text{任意の } \alpha \in \hat{X} \text{ に対し, } [\ell] \in V(\mathcal{Q}_\alpha)$$

$\iff$ 各 α に対し, 次の図形を可

換にする線型写像 $m_\alpha: \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$, $n_\alpha: \Gamma(L \otimes P_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L \otimes P_\alpha) & \xrightarrow{\tau_\alpha} & \Gamma(L^3) \\ & \searrow m_\alpha \otimes n_\alpha \quad \swarrow \ell & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

更に, $\ell|_{\text{Im}(\tau_\alpha)} \neq 0$ なるば, m_α, n_α は定数倍を除いて一意的に定まる。

以下, $[\ell] \in V(\mathcal{K})$ とする。このとき, $\mathcal{K}$ の定義より, 図形

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^3) & \xrightarrow{\quad} & \Gamma(L^9) \\ & \searrow \ell \otimes \ell \otimes \ell \quad \swarrow \alpha & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

を可換にする α が存在する。更に, α を α の

一般的な位置にとれば，次のような可換図形を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma(L^3) \otimes \{ \Gamma(L \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \} \otimes \{ \Gamma(L \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \} & \longrightarrow & \Gamma(L \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^4) \\
 \searrow & & \downarrow \\
 & & \Gamma(L \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L^3) \\
 & & \downarrow \\
 & & \Gamma(L^9) \\
 \swarrow \scriptstyle \ell \otimes (\eta_\alpha \otimes m_\alpha) \otimes (\eta_\alpha \otimes m_\alpha) & \searrow \scriptstyle \Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^3) \longrightarrow & \Gamma(L^9) \\
 & \downarrow \scriptstyle \ell \otimes \ell \otimes \ell & \swarrow \scriptstyle x \\
 & \ell_c &
 \end{array}$$

次のとおりより， $\ell|_{\text{Im}(\tau_\alpha)} \neq 0$ かつ $\ell|_{\text{Im}(\tau_{-\alpha})} \neq 0$ となることから，この図形より，次の図形を可換にする y_α, z_α が一意的に定まる。

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_{-\alpha}) & \longrightarrow & \Gamma(L^4) \\
 \searrow \scriptstyle m_\alpha \otimes m_{-\alpha} & & \swarrow \scriptstyle z_\alpha \\
 & \ell_c &
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Gamma(L^3) \otimes \Gamma(L^4) & \longrightarrow & \Gamma(L^7) \\
 \searrow \scriptstyle \ell \otimes z_\alpha & & \swarrow \scriptstyle y_\alpha \\
 & \ell_c &
 \end{array}$$

ここで，点 $[z_\alpha]$ は方程式 $Q_{u_1, u_2, v_1, v_2}^{(4)} = 0$ ($u_1, u_2 \in \Gamma(L^2 \otimes P_\alpha)$, $v_1, v_2 \in \Gamma(L^2 \otimes P_{-\alpha})$) を満たすことを注意する。従って，一般的な位置にあるかつ $\alpha \in X$ に対し，点 $[z_\alpha]$ が α に無関係な点 x を定めることは，Mumfordの定理により， $x \in \mathbb{P}_4(X)$ がわかり，更に， $[y_\alpha]$ も α に無関係な点 $y \in \mathbb{P}(\Gamma(L^7))$ を定め，命題 3.1 によ

り, $[\alpha] \in \mathcal{U}_3(X)$ がわかる。従って, α, β を $\mathcal{X}$ の一般的存位置にある点として, $[\mathcal{X}_\alpha] = [\mathcal{X}_\beta]$ を示せばよい。ここで, $\phi_L(x) \in \hat{X}_3$ となるような点 $x \in X$ をとれば, $T_x: X \rightarrow X$ ($y \mapsto y+x$) は定数倍を除いて一意的に $\Gamma(L^3)$ の自己同型 U_x を定める。更に, これは自然に図形

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi_3} & \Gamma(\Gamma(L^3)) \\ T_x \downarrow & & \downarrow \mathbb{P}(U_x) \\ X & \xrightarrow{\psi_3} & \Gamma(\Gamma(L^3)) \end{array}$$

を可換にし, $\mathcal{X} = S^3(U_x)(\mathcal{X})$ がわかる。従って, 補題 2.4 により, $\mathcal{L}$ のかわりに適当な x に対し, $\mathcal{L} \circ U_x$ を考えれば, $\mathcal{L}$ は $\text{Im}(\Gamma(L) \otimes \Gamma(L^2) \rightarrow \Gamma(L^3))$ 上 non-trivial であると仮定してよいことがわかる。ここで, 可換な図形

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma(L^2 \otimes P_2) \otimes \Gamma(L \otimes P_2) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \Gamma(L) \otimes \Gamma(L \otimes P_2) \otimes \Gamma(L \otimes P_2) & \longrightarrow & \Gamma(L) \otimes \Gamma(L^2) & \longrightarrow & \Gamma(L^3) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \Gamma(L \otimes P_2) \otimes \Gamma(L^2 \otimes P_2) & & \end{array}$$

を考えれば, 一般的存位置にある点 $\alpha, \beta \in \hat{X}$ に対し, $\mathcal{L}(\theta\theta^{(\alpha)}\theta^{(-\alpha)}) = m_\alpha(\theta\theta^{(\alpha)})\eta_\alpha(\theta^{(-\alpha)}) - m_{-\alpha}(\theta\theta^{(-\alpha)})\eta_\alpha(\theta^{(\alpha)}) \neq 0$ かつ, $\mathcal{L}(\theta\theta^{(\beta)}\theta^{(-\beta)}) = m_\beta(\theta\theta^{(\beta)})\eta_\beta(\theta^{(-\beta)}) - m_{-\beta}(\theta\theta^{(-\beta)})\eta_\beta(\theta^{(\beta)}) \neq 0$ な

る元 $\theta \in P(L)$, $\theta^{(k)} \in P(L \otimes P_\alpha)$, $\theta^{(-k)} \in P(L \otimes P_\alpha)$, $\theta^{(p)} \in P(L \otimes P_\beta)$, $\theta^{(-p)} \in P(L \otimes P_\beta)$ が存在する ω がある。 ω を $P(L^4)$ の任意の元とする
 と, 写像 $P(L^2 \otimes P_\alpha) \otimes P(L^2 \otimes P_\alpha) \rightarrow P(L^4)$, $P(L^2 \otimes P_\beta) \otimes P(L^2 \otimes P_\beta) \rightarrow P(L^4)$
 で ω に写す $\pm$ ける元 $\sum_i u_i \otimes u'_i \in P(L^2 \otimes P_\alpha) \otimes P(L^2 \otimes P_\alpha)$, $\sum_j v_j \otimes v'_j$
 $\in P(L^2 \otimes P_\beta) \otimes P(L^2 \otimes P_\beta)$ が存在する。ここで,

$$F = \theta \theta^{(p)} \theta^{(-p)} \odot \left\{ \sum_i (\theta^{(-k)} u_i) \odot (\theta^{(k)} u'_i) \right\} - \theta \theta^{(k)} \theta^{(-k)} \odot \left\{ \sum_j (\theta^{(-p)} v_j) \odot (\theta^{(p)} v'_j) \right\}$$

$\in S^3(P(L^3))$ とおくと F は K の元となる。

従って,

$$\ell(\theta \theta^{(p)} \theta^{(-p)}) \eta_{-\alpha}(\theta^{(-k)}) \eta_{\alpha}(\theta^{(k)}) z_{\alpha}(\omega) = \ell(\theta \theta^{(k)} \theta^{(-k)}) \eta_{-\beta}(\theta^{(-p)}) \eta_{\beta}(\theta^{(p)}) z_{\beta}(\omega)$$

が成り立ち, $[z_{\alpha}] = [z_{\beta}]$ がある。以上の議論

は, k -valued point のかわりに, $(\mathbb{R}^{1,1}/\mathbb{R}^2)$ -valued point
 に対しても成り立つ。これで証明が完了した。

文献

- [1] S. Koizumi, On the structure of the graded $\mathbb{C}$ -algebra of theta functions, Proc. Japan Acad. 51, (1975), 1-5.
- [2] S. Koizumi, Theta relations and projective normality of abelian varieties, Amer. J. Math., 98, (1975), 865-889.
- [3] S. Koizumi, The rank theorem on matrices of theta functions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 24, (1977), 115-122.

- [4] H. Morikawa, On the defining equations of abelian varieties, Nagoya Math. J., 30, (1967), 143-162.
- [5] D. Mumford, Varieties defined by quadratic equations, Questioni sulle varietà algebriche, Corsi del C.L.M.E., Edizioni Cremonese, Roma, (1969).
- [6] D. Mumford, Abelian varieties, Tata Inst. Studies in Math., Oxford Univ. Press, London and New York, 1970.
- [7] T. Sekiguchi, On projective normality of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan, 28, (1976), 307-322.
- [8] T. Sekiguchi, On projective normality of abelian varieties II, J. Math. Soc. Japan, 29, No. 4, (1977), 1-18.