

楕円差分 Painlevé 方程式の Lax 形式

山田泰彦 神戸大学理学研究科

概要. 論文 [15] に基づき, 楕円差分 Painlevé 方程式の Lax 形式の構成について述べる. 証明も含めて, できるだけ自己完結した記述となるよう努めた.

1 はじめに

Painlevé 方程式の差分類似は過去 20 年程にわたり研究されてきた (例えば [6], [12] など参照). 今日では, Painlevé 方程式のいくつかの側面, 特に代数的あるいは幾何学的な側面については, 微分の場合と差分の場合とを並行して扱うことで, より普遍的な理解が得られることが認識されてきている.

論文 [12] において, 坂井は差分 Painlevé 方程式を有理曲面の立場から考察し, それらを 3 つのクラス: 加法的 (additive), 乗法的 (multiplicative, q -difference) および楕円的 (elliptic), に分類した. 分類は以下の図式にまとめられる:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{ell.} & E_8^{(1)} & \\
 & & \nearrow \mathbb{Z} \\
 \text{mul.} & E_8^{(1)} \rightarrow E_7^{(1)} \rightarrow E_6^{(1)} \rightarrow D_5^{(1)} \rightarrow A_4^{(1)} \rightarrow A_{2+1}^{(1)} \rightarrow A_{1+1}^{(1)} \rightarrow A_1^{(1)} \rightarrow D_6 & \\
 \text{add.} & E_8^{(1)} \rightarrow E_7^{(1)} \rightarrow E_6^{(1)} \rightarrow D_4^{(1)} \rightarrow A_3^{(1)} \rightarrow A_{1+1}^{(1)} \rightarrow A_1^{(1)} \rightarrow \mathbb{Z}_2 & \\
 & & \searrow \downarrow \\
 & & A_2^{(1)} \rightarrow A_1^{(1)} \rightarrow 1
 \end{array}$$

この最上位に位置する楕円 Painlevé 方程式 [12] は, 全ての 2 階 Painlevé 方程式を統括するものである. これは, $E_8^{(1)}$ 型のアフィンワイル群対称性を持ち, 他の全ての場合はその退化極限となる¹.

よく知られているように, 微分 Painlevé 方程式は, 線形微分方程式のモノドロミー保存変形としての記述 (Lax 形式) をもつ. この Lax 形式による定式化は, Painlevé 方程式に関する種々の深い結果の源泉であり, これを差分方程式の場合に探することは重要な問題である.

実際, いくつかの差分 Painlevé 方程式については, その Lax 形式が知られている (例えば [1][3][4][5][7] など参照). 例として $D_5^{(1)}$ 型対称性をもつ q -差分系の場合を見ておこう. この系は, 次の双有理変換の定める離散力学系であり, 神保-坂井の q - P_{VI} 方程式と呼ばれ

¹図の矢印は格子の包含関係を表しており, 方程式の退化を示すものではない.

る [7].

$$T : \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3, a_4; f, g \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} qa_1, qa_2, a_3, a_4; \dot{f}, \dot{g} \\ qb_1, qb_2, b_3, b_4 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\dot{f}f = \frac{(\dot{g} - b_1)(\dot{g} - b_2)}{(\dot{g} - b_3)(\dot{g} - b_4)} a_3 a_4, \quad \dot{g}g = \frac{(f - a_1)(f - a_2)}{(f - a_3)(f - a_4)} b_3 b_4,$$

ここで $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は従属変数であり, a_i, b_i は, 関係式 $q = a_3 a_4 b_1 b_2 / (a_1 a_2 b_3 b_4)$ に従う複素パラメータである.

上記 q - P_{VI} 方程式 (1) は, 元来, ある 2×2 行列の Lax 対の両立条件:

$$Y(qz) = A(z)Y(z), \quad T(Y(z)) = B(z)Y(z), \quad (2)$$

から導かれたものであるが, ベクトル $Y(z)$ の第 1 成分 $y(z)$ に関するスカラー方程式の対としても表せる. その 1 つは (適当なゲージ変換の下で)

$$\begin{aligned} & \frac{(a_1 - z)(a_2 - z)}{a_1 a_2 (z - f)} y(qz) - \left(c_0 + c_1 z + \frac{c_2 z}{z - f} + \frac{c_3 z}{z - qf} \right) y(z) \\ & + \frac{a_1 a_2 (z - qa_3)(z - qa_4)}{b_3 b_4 q^2 (z - qf)} y\left(\frac{z}{q}\right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

ただし

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{a_1 a_2}{f} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \right), & c_1 &= \frac{1}{q} \left(\frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} \right), \\ c_2 &= \frac{(f - a_1)(f - a_2)}{qfg}, & c_3 &= \frac{(f - a_3)(f - a_4)g}{b_3 b_4 f}, \end{aligned} \quad (4)$$

と書け, もう一方の方程式は次のようになる:

$$qgy(qz) - a_1 a_2 y(z) + z(z - f)T^{-1}(y(z)) = 0. \quad (5)$$

楕円差分の場合にも, 次のようなスカラー Lax 対が自然に期待される:

$$\begin{aligned} C_1 y(z - \delta) + C_2 y(z) + C_3 y(z + \delta) &= 0, \\ C_4 y(z - \delta) + C_5 y(z) + C_6 T(y(z)) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, 係数 $C_1, \dots, C_6$ は変数 z や他のパラメータに関する楕円関数である. しかし, 多くの変数に対する複雑な楕円的依存性のために, このような Lax 対の具体的構成は困難な課題となっていた.

本論では, $E_8^{(1)}$ 対称性をもつ楕円差分 Painlevé 方程式について, その Lax 形式を幾何学的方法により構成する [15]. 主要なアイデアは Lax 対 (6) を Painlevé 方程式の未知変数 (f, g) に関する代数曲線の式とみなすことである. 従来の研究では, 加法的差分における $E_8^{(1)}$ 型の場合の Boalch [4] の結果があり, 最近では, 楕円差分の場合の別の方法が, Arinkin, Borodin, Rains [2], [11] により提案されていることを注意しておく.

本論の構成は以下の通りである. まず 2 節では, 楕円差分 Painlevé 方程式の幾何学的記述について $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の定式化を復習する. 3 節で, 楕円 Painlevé 方程式の Lax 形式を

定式化する. いくつかの多項式について後に必要になる性質を 4 節で準備する. 最後に, 5 節において, Lax 対の両立条件を調べ, それが楕円 Painlevé 方程式と等価であること (定理 5.6) を示す. 付録 A, B では, 離散 Painlevé 方程式の幾何学的特徴について補足する. 付録 C では, 微分の場合を議論し, 付録 D では行列型の Lax 形式との関係を述べる.

この節を終えるにあたって, 以下の構成の動機となるひとつの観察について述べておこう. 以下では, (3) や (5) などの Lax 方程式を 2 通りの観点から考察する. 一方は未知関数 $y(z)$ に対する差分方程式と見る標準的な見方である. そこでは, 変数 (f, g) はパラメータに過ぎない. もう一方では発想を変えて, これらの方程式を変数 $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対する代数曲線の方程式と見る. その場合は, $y(z), y(qz), y(z/q)$ や $T^{-1}(y(z))$ は単にパラメータとなる. q - P_{IV} のスカラー Lax 方程式 (3) (5) を後者の観点から見ると, 次のことが観察される:

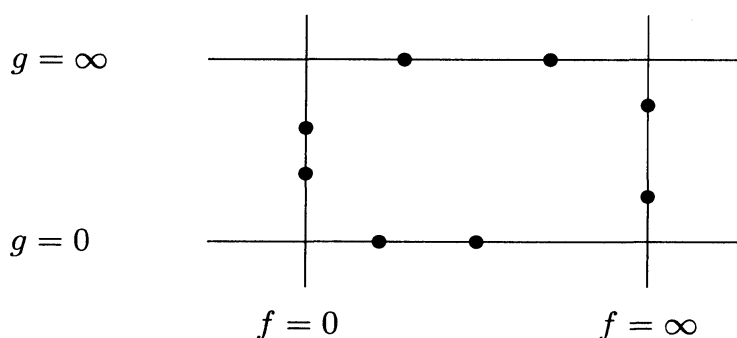
命題 1.1 方程式 (3) は, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の次数 $(3, 2)$ の代数曲線として, 次の 12 点を通る条件によって一意的に特徴づけられる:

$$(0, b_1/q), (0, b_2/q), (\infty, b_3), (\infty, b_4), (a_1, 0), (a_2, 0), (a_3, \infty), (a_4, \infty), \\ (z, \infty), \left(\frac{z}{q}, 0\right), \left(z, \frac{a_1 a_2}{q} \frac{y(z)}{y(qz)}\right), \left(\frac{z}{q}, \frac{a_1 a_2}{q} \frac{y(z/q)}{y(z)}\right). \quad (7)$$

同様に, 方程式 (5) も次の 3 点を通る次数 $(1, 1)$ の曲線として特徴づけられる:

$$(\infty, \infty), \left(z, \frac{a_1 a_2}{q} \frac{y(z)}{y(qz)}\right), \left(z - \frac{a_1 a_2}{z} \frac{y(z)}{T^{-1}y(z)}, 0\right). \quad (8)$$

坂井の理論では, Painlevé 方程式は $\mathbb{P}^2$ 上の 9 点配置またはそれと等価な $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の 8 点配置により特徴づけられる. 式 (7) にある最初の 8 点は, ちょうど q - P_{VI} 方程式を特徴づける配置であることに注意しよう.



Lax 方程式と点配置の間のこのような関係は, 他の微分および差分 Painlevé 方程式に関しても見られる [14] (微分 P_{VI} の場合は付録 C 参照). それゆえ, 楕円 Painlevé 方程式の Lax 対も代数曲線としての適当な特徴づけにより決定できると期待するのは自然である. 以下で, 実際そうになっていることを示す.

2 楕円 Painlevé 方程式

$P_1, \dots, P_8$ を $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 8 点とし, その配置は一般的であると仮定する. すなわち, これら 8 点を通る次数 (2,2) の曲線 C_0 は唯一つの非特異楕円曲線を定めるとする. この楕円曲線 C_0 の方程式を $\varphi_{22}(f, g) = 0$ と表す. ここで (f, g) は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の非同次座標である. 本論では, 次の規則 (i) と (ii) により楕円 Painlevé 方程式 $T = T_{ij}$ ($1 \leq i \neq j \leq 8$) を定義する.

(i) Painlevé 方程式のパラメータである点 $P_1, \dots, P_8$ の変換:

$$\begin{aligned} T(P_k) &= P_k, \quad (k \neq i, j), \\ P_1 + \dots + P_{i-1} + T(P_i) + P_{i+1} + \dots + P_8 &= 0, \\ T(P_i) + T(P_j) &= P_i + P_j, \end{aligned} \quad (9)$$

ただし, 和は $P_1, \dots, P_8$ を通る楕円曲線 C_0 上の加法による.

(ii) Painlevé 方程式の従属変数 P の変換: P_i を除く 7 点と P を通る楕円曲線を C とする (このとき $T(P_i)$ も C 上にある). そこで $T(P)$ を次で定める,

$$T(P_i) + T(P) = P_j + P, \quad (10)$$

ただし, ここでの和は C 上の加法による.

曲線 C_0 上の点を表すのに, 次のような Jacobian パラメータ $P_u = (f_u, g_u)$ を導入すると都合がよい. すなわち, (1) $P_u + P_v = P_{u+v}$. (2) C_{mn} を次数 (m, n) の曲線, P_{x_i} ($i = 1, \dots, 2(m+n)$) を C_{mn} と C_0 との交点とすると,

$$mh_1 + nh_2 - x_1 - \dots - x_{2(m+n)} = 0, \quad (\text{mod. period}) \quad (11)$$

ここで h_1, h_2 は定数パラメータである.

u_i を点 $P_i = P_{u_i}$ に対応するパラメータとし, $\delta = 2h_1 + 2h_2 - u_1 - \dots - u_8$ とおく². $f_u = f_{h_1-u}$ および $g_u = g_{h_2-u}$ に注意する. 上記のようなパラメータ表示は例えば

$$f_u = \alpha \frac{[u+a][u-h_1-a]}{[u+b][u-h_1-b]}, \quad g_u = \beta \frac{[u+c][u-h_2-c]}{[u+d][u-h_2-d]}, \quad (12)$$

で与えられる. ここで $[u]$ は奇のテータ関数であり $\alpha, \beta, a, b, c, d$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の非同次座標 (f, g) のとり方 ($\text{PSL}(2) \times \text{PSL}(2)$ の自由度がある) に依存する定数である. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ における楕円 Painlevé 方程式については, Weierstrass $\wp$ 関数を用いた表示が村田により与えられている [10].

以下では, 例として平行移動 $T = T_{21}$ の場合を扱い, 任意の変数 x に対して次の記号を用いる:

$$\dot{x} = T_{21}(x). \quad (13)$$

式 (9) より, 次がわかる

$$\dot{u}_k = u_k, \quad (k \neq 1, 2), \quad \dot{u}_1 = u_1 - \delta, \quad \dot{u}_2 = u_2 + \delta. \quad (14)$$

²この $\delta \in \mathbb{C}$ は複素パラメータ. 式 (70) の $\delta \in \text{Pic}(X)$ とは異なる.

以下の構成では、次数と零点の条件で特徴づけられる $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の種々の多項式が必要となる。それらを表す記号を用意しておこう。

定義 2.1 $\Phi_{mn}(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots)$ を次数 (m, n) で点 p_i を多重度 m_i の零点とする $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の多項式のなす線形空間とする。

集合 $\Phi_{mn}(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots)$ に属する多項式 F たちの共通零点を (対応する曲線族の) 基点という。割り当てられた点 $p_1, p_2, \dots$ 以外に、割り当て外の基点をもつ場合もある。定義 (i)(ii) に関して言えば、与えられた 7 点を通る (2,2) 次曲線の族 $\Phi_{22}(P_1 P_3 \dots P_8)$ の定める 8 点目の共通零点はその典型であり、それが $T(P_2)$ に他ならない。また、拡張した記号

$$\Phi_{mn}^d(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots | p_1'^{n_1} p_2'^{n_2} \cdots), \quad (15)$$

も用いる。ここで付加的な情報 d および $p_1'^{n_1} p_2'^{n_2} \cdots$ は、族の (多項式としての) 次元

$$d = \dim \Phi_{mn}(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k} | \cdots) = (m+1)(n+1) - \sum_{i=1}^k \frac{m_i(m_i+1)}{2}, \quad (16)$$

および割り当て外の基点 p'_i とその多重度 n_i を示す。

3 Lax 方程式

この節で 1 対の 2 階差分方程式を定義する (これが求める楕円 Painlevé の Lax 対となることを後に示す)。

曲線 C_0 の一般点 (生成点) を P_z とする。変数 z は Lax 方程式の差分方程式としての独立変数となる。未知関数を $y = y(z)$ とし、簡単のため次の記号を用いる

$$\bar{F}(z) = F(z + \delta), \quad \underline{F}(z) = F(z - \delta). \quad (17)$$

我々の Lax 対は次の形である:

$$\begin{aligned} (L1) \quad & L_1 = C_1 \underline{y} + C_2 y + C_3 \bar{y} = 0, \\ (L2) \quad & L_2 = C_4 \bar{y} + C_5 y + C_6 \dot{y} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで $\dot{y} = T(y)$ であり、係数 $C_1, \dots, C_6$ は $P_1, \dots, P_8, P_z$ および $P = (f, g)$ に依存する。

我々の構成の主要なアイデアは方程式 (18) を $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に関する曲線の方程式と見なすことである。

第 1 の Lax 方程式 (L1) は次で定義される。

定義 3.1 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 点 Q_z と $Q_{\underline{z}}$ を非同次座標 (f, g) により次で与える:

$$\begin{aligned} Q_z &\in \{f = f_z\} \cap \{(g - g_z)y = (g - g_{h_1-z})\bar{y}\}, \\ Q_{\underline{z}} &\in \{f = f_{\underline{z}}\} \cap \{(g - g_{\underline{z}})\bar{y} = (g - g_{h_1-\underline{z}})y\}. \end{aligned} \quad (19)$$

これらの点は変数 $P_1, \dots, P_8$ および z 以外に $\bar{y}, y, \underline{y}$ にも依存することに注意する。このとき、曲線 $L_1 = 0$ を次の条件により定義する:

$$(L1a) \quad L_1 \in \Phi_{32}^3(P_1 \dots P_8 P_z | P_{h_1-z}).$$

$$(L1b) \quad \text{曲線 } L_1 = 0 \text{ は } Q_z \text{ および } Q_{\underline{z}} \text{ を通る.}$$

補題 3.2 条件 (L1a),(L1b) により曲線 $L_1 = 0$ は一意に定まり, それは式 (18) の (L1) の形になる.

証明. 次数 (3, 2) の多項式は 12 個の任意係数をもつ. 条件 (L1a) はそのうちの 9 個を決め, 3 パラメータ族

$$c_1 G_1(f, g) + c_2 G_2(f, g) + c_3 G_3(f, g) = 0 \quad (20)$$

が条件 (L1a) の一般解となる. 条件 (L1b) は係数 c_1, c_2, c_3 に対して 2 個の線形関係式を付加する. よって曲線 $L_1 = 0$ は無意味な全体の定数倍を除いて一意に決まる. 得られる方程式が $\underline{y}, y, \bar{y}$ について線形であることを示すため, 上記の族の基底を次のようにとる:

$$G_1 = (f - f_z) \varphi_{22}(f, g), \quad G_2 = \varphi_{32}(f, g), \quad G_3 = (f - f_{\underline{z}}) \varphi_{22}(f, g). \quad (21)$$

ここで, $\varphi_{22} = 0$ は曲線 C_0 の方程式であり, φ_{32} は, 直線 $f = f_z$ および $f = f_{\underline{z}}$ と P_z および $P_{h_1-\underline{z}}$ においてそれぞれ接するような次数 (3, 2) の多項式である. このとき

$$\begin{aligned} G_1 = 0, \quad G_2 \propto (g - g_z)^2, \quad G_3 \propto (g - g_z)(g - g_{h_1-z}), \quad \text{for } f = f_z, \\ G_1 \propto (g - g_{\underline{z}})(g - g_{h_1-\underline{z}}), \quad G_2 \propto (g - g_{h_1-\underline{z}})^2, \quad G_3 = 0, \quad \text{for } f = f_{\underline{z}}, \end{aligned} \quad (22)$$

となる. これより, $c_1 \propto \underline{y}$, $c_2 \propto y$, $c_3 \propto \bar{y}$ がわかる. □

(18) の第 2 の Lax 方程式 (L2) もほぼ同様に定義される.

定義 3.3 Q_{u_1} を次で定まる点 $(f, g) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とする.

$$Q_{u_1} \in \{f = f_{u_1}\} \cap \{(g - g_{u_1})y = (g - g_{h_1-u_1})\dot{y}\}, \quad (23)$$

これは変数 $y, \dot{y}$ に依存する. そこで, 曲線 $L_2 = 0$ を次で定める

$$(L2a) \quad L_2 \in \Phi_{32}^3(P_1 P_3 \dots P_8 P_{z+u_2-u_1} P_{h_1-\underline{z}} | P_1).$$

$$(L2b) \quad \text{曲線 } L_2 = 0 \text{ は式 (19) の点 } Q_{\underline{z}} \text{ と } Q_{u_1} \text{ を通る.}$$

関係式 (11) により, 曲線 $L_2 = 0$ は点 P_1 で C_0 と接するが, 一般には P_1 で非特異である.

条件 (L2a),(L2b) で定まる曲線が一意であり式 (18) の (L2) の形になることは補題 3.2 と同様に示される. 実際, 今の場合, 曲線 $L_2 = 0$ は次の形となる

$$c_1(f - f_1) \varphi_{22} \underline{y} + c_2 F_{32}(h_1 - \underline{z}) y + c_3(f - f_{\underline{z}}) \varphi_{22} \dot{y} = 0. \quad (24)$$

ここで $F_{32}(h_1 - \underline{z}) = 0$ は直線 $f = f_1$ および $f = f_{\underline{z}}$ に P_1 および $P_{h_1-\underline{z}}$ においてそれぞれ接するという条件からスカラー倍を除いて決まる. このとき, 曲線 $F_{32}(h_1 - \underline{z}) = 0$ は点 P_1 において $f = f_1$ と C_0 の両方に接する, つまり特異点 (2 重点) である. すなわち $F_{32}(h_1 - \underline{z}) \in \Phi_{32}^2(P_1^2 P_3 \dots P_8 P_{h_1-\underline{z}})$.

多項式 $F_{32}(z)$ は以下で重要なので, その定義関係式を書いておこう:

定義 3.4 z をパラメータとする (f, g) の多項式 $F_{32}(z)$ を次で定義する

$$F_{32}(z) \in \Phi_{32}^2(P_1^2 P_3 \cdots P_8 P_z),$$

$$F_{32}(z) = 0 \text{ は直線 } f = f_z \text{ に点 } P_z \text{ で接する.}$$

この条件で, 多項式 $F_{32}(z)$ は規格化を除いて一意に決まる.

4 有用な関係式

この節では, $f, g, \dot{f}$ および $\dot{g}$ の間の有用な関係式を導く. いくつかの結果 (補題 4.2, 4.4 および 4.9) は, 次節で Lax 方程式の両立性を調べる際に用いられる.

補題 4.1 一般の点 $Q = (x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対して, $F = F(f, g)$ を $F \in \Phi_{54}^1(P_1^4 P_3^2 \cdots P_8^2 Q)$ となる (f, g) の多項式とする. このとき $\dot{f} = \dot{x} \Leftrightarrow F = 0$.

証明. 付録 B で与えた変換 T の性質より, $P = (f, g)$ の時間発展 $\dot{P} = (\dot{f}, \dot{g})$ は次で与えられる:

$$\dot{f} = \frac{F_1(f, g)}{F_2(f, g)}, \quad \dot{g} = \frac{G_1(f, g)}{G_2(f, g)}. \quad (25)$$

ここで, $F_1, F_2 \in \Phi_{54}^2(P_1^4 P_3^2 \cdots P_8^2)$ である. そこで, 多項式 $F \in \Phi_{54}^1(P_1^4 P_3^2 \cdots P_8^2 Q)$ は $F \propto F_1(P)F_2(Q) - F_2(P)F_1(Q)$ と書ける. 従って $F = 0 \Leftrightarrow \dot{f} = F_1(P)/F_2(P) = F_1(Q)/F_2(Q) = \dot{x}$ (ただし $F_2(P) \neq 0, F_2(Q) \neq 0$) となる. $\square$

点 P が $P = P_z \in C_0$ の場合, 式 (10) より

$$\dot{P}_z = P_{z+u_1-u_2-\delta}, \quad (26)$$

である. そこで, 上記補題で $Q = P_{z+\delta-u_1+u_2}$ (i.e. $\dot{Q} = P_z$) として次が得られる.

補題 4.2 $\varphi_{54}(z) \in \Phi_{54}^1(P_1^4 P_3^2 \cdots P_8^2 P_{z+\delta-u_1+u_2} | P_{h_1+\delta-z-u_1+u_2})$ とすれば, $\dot{f} = f_z$ において $\varphi_{54}(z) = 0$.

この補題は $\dot{f}$ の 1 つの特徴づけとして, 次節 (補題 5.3) で用いられる. 後では, 多項式 $F_{32}(z)$ の性質を用いた $\dot{g}$ の特徴づけも必要となる. その記述のために, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の involution

$$r : (f, g) \mapsto (f, \tilde{g}(f, g)). \quad (27)$$

を導入する. 定義は次の通りである. $Q = (x, y)$ を一般の点, $F(f, g) \in \Phi_{2,2}^1(P_1 \dot{P}_2 P_3 \cdots P_8 Q)$ とする. すなわち, special な 8 点 $P_1 \dot{P}_2 P_3 \cdots P_8$ を通る (2,2) 次曲線の pencil のうち Q を通るものが $F = 0$ である. ここで $f = x$ として得られる g の 2 次方程式 $F(x, g) = 0$ の 2 つの解のうち, 自明 ($g = y$) でない方 $g = \tilde{g}(x, y)$ を求める変換と定める. $\tilde{g}(f, g)$ は, f の 4 次

式を係数とする g の 1 次分数式であり, その分母分子の多項式は共に $\Phi_{41}^2(P_1 P_3 \cdots P_8 | \dot{P}_2)$ に属する. また, 曲線 C_0 上の一般点 P_z に対しては,

$$r(P_z) = P_{h_1-z}, \quad (28)$$

である.

r の $\text{Pic}(X)$ への作用は

$$r(H_1) = H_1, \quad r(H_2) = 4H_1 + H_2 - E_1 - \cdots - E_8, \quad r(E_i) = H_1 - E_i, \quad (29)$$

で与えられる (ただし, E_2 は $\dot{P}_2$ に対する例外因子). これから, 変換 r と T の関係として

$$\lambda/.r/.T = \lambda, \quad \lambda = 3H_1 + 2H_2 - 2E_1 - E_3 - \cdots - E_8, \quad (30)$$

が成り立つ. 実際, 式 (72) と (29) から $\lambda/.r = H_1 + \delta + E_1 - E_2$, 従って $\lambda/.r/.T = \lambda$ となる. これより, 次が成り立つ.

補題 4.3 多項式 $\{F_1, F_2, F_3\}$ を $\Phi_{3,2}^3(P_1^2 P_3 \cdots P_8)$ の基底とする. このとき方程式 (P が既知で P' が未知)

$$(F_1(P) : F_2(P) : F_3(P)) = (F_1(P') : F_2(P') : F_3(P')) \quad (31)$$

は唯一の割り当て外の解 $P' = rT(P)$ をもつ.

証明. 方程式は $F_i(P)F_3(P') = F_3(P)F_i(P')$ ($i = 1, 2$) を意味し, その次数は (3,2) であるので 12 個の解をもつ. 内 11 個は割り当てられたもの: P_1 (多重度 $2^2 = 4$), $P_3, \dots, P_8$ および 自明解 $P' = P$ である. 従って割り当て外の解は一つで, それは関係式 (30) により $rT(P)$ である. $\square$

次は上記補題の特別な場合である.

補題 4.4 多項式 $\{F_1, F_2\}$ を $\Phi_{3,2}^2(P_1^2 P_3 \cdots P_8 P_z)$ の基底とするとき,

$$rT\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_1}{F_2}, \quad (\forall z). \quad (32)$$

この節の残りの部分で, 特別な多項式 $\mathcal{F}$ を考察する. その性質 (補題 4.9) は次節で重要である. (f, g) の多項式として, $\mathcal{F}$ を次で定義する

$$\mathcal{F} \in \Phi_{32}^2(P_1^2 P_3 \cdots P_8 Q), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial g} \Big|_{P=Q} = 0. \quad (33)$$

$\mathcal{F}$ を特殊化したもの $\mathcal{F}|_{Q=P_z}$ は定義 (3.4) の $F_{32}(z)$ の性質をもつことに注意する. $\mathcal{F}$ は規格化因子を除いて一意であるが, 規格化は Q に依存し得る. 我々はその依存性を $\mathcal{F}$ が $Q = (x, y)$ の多項式として最小次数となるように決める. このとき次が成り立つ.

補題 4.5 $Q = (x, y)$ の多項式として, $\mathcal{F}$ は次数 $(5, 2)$ であり, 零点 P_1 (2重), $P_3, \dots, P_8$, P (各 1重) をもつ. さらに次が成り立つ.

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0. \quad (Q = P_3, \dots, P_8, P) \quad (34)$$

証明. 次の 12×12 行列式を考える:

$$D = m_{P_1} \wedge \frac{\partial m_{P_1}}{\partial f} \wedge \frac{\partial m_{P_1}}{\partial g} \wedge m_{P_3} \wedge \dots \wedge m_{P_8} \wedge m_P \wedge m_Q \wedge \frac{\partial m_Q}{\partial y}, \quad (35)$$

ここで

$$m_{(f,g)} = \left\{ (1, f, f^2, f^3), (1, f, f^2, f^3)g, (1, f, f^2, f^3)g^2 \right\} \in \mathbb{C}^{12} \quad (36)$$

は次数 $(3, 2)$ のモノミアルのなすベクトルである. (f, g) の多項式として, 行列式 D が条件 (33) を満たすことは容易にわかる. $Q = (x, y)$ の多項式としては, D の次数は見かけ上 $(6, 4)$ であるが, 変数 y の次数は実は 2 である. というのは 行列式の y 依存部分 $m_Q \wedge \frac{\partial m_Q}{\partial y}$ は次のように書き直せるからである.

$$\begin{aligned} & \left\{ (1, x, x^2, x^3), (1, x, x^2, x^3) \frac{y}{2}, (0, 0, 0, 0) \right\} \\ & \wedge \left\{ (0, 0, 0, 0), (1, x, x^2, x^3), (1, x, x^2, x^3) 2y \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

さらに, 行列式 D は $(x - f_1)$ で割り切れる ($P_1 = (f_1, g_1)$). これは次の関係式から従う.

$$2m_{P_1} + (y - g_1) \frac{\partial m_{P_1}}{\partial g_1} - 2m_Q + (y - g_1) \frac{\partial m_Q}{\partial y} = 0 \quad \text{at } x = f_1. \quad (38)$$

よって, $\mathcal{F} = D/(x - f_1)$ とすることができこれは (x, y) について次数 $(5, 2)$ である. 補題の要求する条件は行列式 (35) の形から容易に確かめられる. 全部で 17 個の消滅条件があるので, 次数 $(5, 2)$ は最低である. $\square$

補題 4.6 式 (35) の行列式 D に対して, 次が成り立つ

$$D = (g - g_1)^2 (x - f_1)^2 G, \quad (f = f_1). \quad (39)$$

ここで, G は $P = (f, g)$ に依存せず, $Q = (x, y)$ については $(4, 2)$ 次の多項式で, 次の関係を満たす.

$$G = \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (Q = P_1, P_3, \dots, P_8). \quad (40)$$

証明. $D|_{f=f_1} \propto (g - g_1)^2$ は明らかなので, 次を示せば十分である.

$$D = \frac{\partial D}{\partial x} = 0, \quad (f = x = f_1). \quad (41)$$

これを示すため、 D の i 番目のベクトルを M_i としよう. すると $f = x = f_1$ において次の線形関係式が得られる

$$\begin{aligned} (g-y)(g+y-2g_1)M_1 + (g-y)(g-g_1)(y-g_1)M_3 + (y-g_1)^2M_{10} &= (g-g_1)^2M_{11}, \\ 2(g_1-y)M_1 + (g-g_1)(g+g_1-2y)M_3 + 2(y-g_1)M_{10} &= (g-g_1)^2M_{12}. \end{aligned} \quad (42)$$

よって、 $M_{11} \wedge M_{12}$ と $\frac{\partial}{\partial x}(M_{11} \wedge M_{12})$ は $M_1 \wedge M_3 \wedge M_{10}$ に掛けると零となる. $\square$

補題 4.7 G を上記補題 4.6 における多項式とし、 $A = A(x), B = B(x), C = C(x)$ を、involution $r : (x, y) \mapsto (x, \tilde{y})$ (27) を与える 1 次分数変換

$$\tilde{y} = \tilde{y}(x, y) = -\frac{A + By}{B + Cy}, \quad (43)$$

の係数とする. このとき、規格化因子を除いて $G = A + 2By + Cy^2$ である.

証明. $Q = (x, y)$ に対して、 $\phi_{22}(f, g) = \phi_{22}(f, g; x, y)$ を $\Phi_{22}^1(P_1 P_3 \cdots P_8 Q)$ に属する $P = (f, g)$ の多項式とする. involution r の定義より、

$$\phi_{22}(x, \tilde{y}; x, y) = (y - \tilde{y})(A + B(y + \tilde{y}) + Cy\tilde{y}), \quad (44)$$

である. 一方、多項式 $\phi_{22}(f, g; x, y)$ は次の 9×9 行列式

$$\phi_{22}(f, g; x, y) = m'_{P_1} \wedge m'_{P_3} \wedge \cdots \wedge m'_{P_8} \wedge m'_Q \wedge m'_P \quad (45)$$

としても表される. ここで $m'_{(f,g)} \in \mathbb{C}^9$ は $(2,2)$ 次単項式 $f^i g^j$ ($0 \leq i, j \leq 2$) を成分とするベクトルである. これより、

$$\begin{aligned} A + 2By + Cy^2 &= \lim_{\tilde{y} \rightarrow y} \frac{\phi_{22}(x, \tilde{y}; x, y)}{y - \tilde{y}} \\ &= m'_{P_1} \wedge m'_{P_3} \wedge \cdots \wedge m'_{P_8} \wedge m'_Q \wedge \frac{\partial m'_Q}{\partial y}, \end{aligned} \quad (46)$$

となる. 最後の行列式は (x, y) の $(4, 2)$ 次式であり、補題 4.6 にある G の消滅条件を満たす. $\square$

補題 4.8 多項式 $G = A + 2By + Cy^2$ と変換 $\tilde{y} = \tilde{y}(x, y)$, $\tilde{g} = \tilde{g}(f, g)$ に対して、次が成り立つ.

$$\frac{G(x, \tilde{y})}{G(x, y)} = \frac{AC - B^2}{(B + Cy)^2} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} = -\frac{(\tilde{g} - \tilde{y})(g - \tilde{y})}{(\tilde{g} - y)(g - y)} \Big|_{f=x}. \quad (47)$$

証明. いずれも, 変換式 (43) の変換式

$$\tilde{y}(x, y) = -\frac{A + By}{B + Cy}, \quad \tilde{g}(f, g) \Big|_{f=x} = -\frac{A + Bg}{B + Cg}, \quad (48)$$

を用いて直接計算すればよい. $\square$

補題 4.9 次が成り立つ.

$$\frac{\mathcal{F}(f, g; x, \tilde{y})}{\mathcal{F}(f, g; x, y)} \Big|_{f=f_1} = -\frac{(\tilde{g} - \tilde{y})(g - \tilde{y})}{(\tilde{g} - y)(g - y)} \Big|_{f=x}. \quad (49)$$

また, 等式の両辺とも g によらない.

証明. 補題 4.6, 4.7 および 4.8 より明らか. $\square$

5 両立性

この節では, 定義 3.1 および 3.3 で与えた Lax 対 (L1), (L2) の両立性を考察する. これは以下の 4 つの step で調べられる (Fig.1).

1. (L1) (L2) から $\underline{y}$ を消去 $\rightarrow y, \bar{y}, \dot{y}$ の間の関係式 (L3).
2. (L2) (L3) から $\underline{y}$ を消去 $\rightarrow y, \dot{y}, \underline{\dot{y}}$ の間の関係式 (L4).
3. $\overline{(L2)}$ (L3) から $\bar{y}$ を消去 $\rightarrow y, \dot{y}, \bar{\dot{y}}$ の間の関係式 (L5).
4. (L4) (L5) から y を消去 $\rightarrow \dot{y}, \underline{\dot{y}}, \bar{\dot{y}}$ の間の関係式 (L6).

両立性は (L6) $\Leftrightarrow T_{21}(\text{L1})$ の同値性を意味し, これが主結果 (定理 5.6) となる.

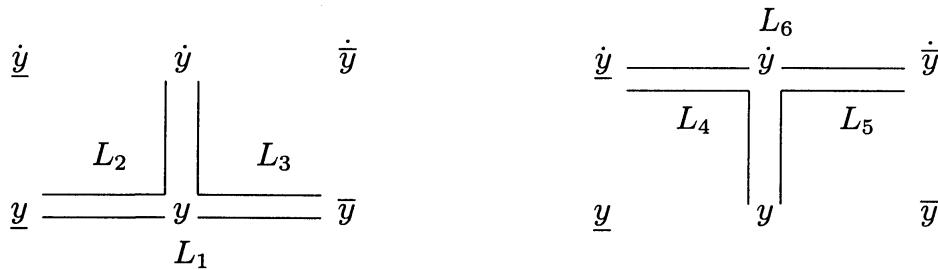


Figure 1: Lax equations

以下, 方程式 L3 から L6 を順次追跡する. 結果をあらかじめ表にまとめておく.

eq. term	coefficient	divisor	additional zeros	
L_1	$\underline{y}$	$(f - f_z)\varphi_{22}$	$(H_1) + (\delta)$	P_z, P_{h_1-z}
	y	φ_{32}	$(H_1 + \delta)$	$P_z, P_{h_1+\delta-z}$
	$\bar{y}$	$(f - f_z)\varphi_{22}$	$(H_1) + (\delta)$	$P_{z-\delta}, P_{h_1+\delta-z}$
L_2	$\underline{y}$	$(f - f_1)\varphi_{22}$	$(H_1 - E_1) + (\delta)$	—
	y	$F_{32}(h_1 - \underline{z})$	$(H_1 + \delta - E_1 + E_2)$	$P_{z-u_1+u_2}, P_{h_1+\delta-z}$
	$\dot{y}$	$(f - f_z)\varphi_{22}$	$(H_1) + (\delta)$	$P_{z-\delta}, P_{h_1+\delta-z}$
L_3	$\dot{y}$	$(f - f_z)\varphi_{22}$	$(H_1) + (\delta)$	P_z, P_{h_1-z}
	y	$F_{32}(z)$	$(H_1 + \delta - E_1 + E_2)$	$P_z, P_{h_1+\delta-u_1+u_2-z}$
	$\bar{y}$	$(f - f_1)\varphi_{22}$	$(H_1 - E_1) + (\delta)$	—
L_4	y	$\varphi_{54}(\underline{z})$	$(H_1 + 2\delta - 2E_1 + 2E_2)$	$P_{z-u_1+u_2}, P_{h_1+2\delta-u_1+u_2-z}$
	$\dot{y}$	$F_{32}(\underline{z})\varphi_{22}$	$(H_1 + \delta - E_1 + E_2) + (\delta)$	$P_{z-\delta}, P_{h_1+2\delta-u_1+u_2-z}$
	$\underline{\dot{y}}$	$(f - f_1)(\varphi_{22})^2$	$(H_1 - E_1) + 2(\delta)$	—
L_5	y	$\varphi_{54}(z)$	$(H_1 + 2\delta - 2E_1 + 2E_2)$	$P_{z+\delta-u_1+u_2}, P_{h_1+\delta-u_1+u_2-z}$
	$\dot{y}$	$F_{32}(h_1 - z)\varphi_{22}$	$(H_1 + \delta - E_1 + E_2) + (\delta)$	$P_{z+\delta-u_1+u_2}, P_{h_1-z}$
	$\bar{\dot{y}}$	$(f - f_1)(\varphi_{22})^2$	$(H_1 - E_1) + 2(\delta)$	—
L_6	$\underline{\dot{y}}$	$\varphi_{54}(z)\varphi_{22}$	$(H_1 + 2\delta - 2E_1 + 2E_2) + (\delta)$	$P_{z+\delta-u_1+u_2}, P_{h_1+\delta-u_1+u_2-z}$
	$\dot{y}$	φ_{76}	$(H_1 + 3\delta - 2E_1 + 2E_2)$	$P_{z+\delta-u_1+u_2}, P_{h_1+2\delta-u_1+u_2-z}$
	$\bar{\dot{y}}$	$\varphi_{54}(\underline{z})\varphi_{22}$	$(H_1 + 2\delta - 2E_1 + 2E_2) + (\delta)$	$P_{z-u_1+u_2}, P_{h_1+2\delta-u_1+u_2-z}$

Step 1:

補題 5.1 *Lax* 方程式 $L_3 = 0$ は次で一意に特徴づけられる:

$$(L3a) \quad L_3 \in \Phi_{32}^3(P_1 P_3 \cdots P_8 P_z P_{h_1+\delta-z-u_1+u_2} | P_1).$$

$$(L3b) \quad 2 \text{ 点 } Q_{u_1} \text{ (23) および } Q_z \text{ (19) を通る.}$$

証明. 条件 (L3b) は, 対応する条件 (L1b) と (L2b) より直ちに従う. そこで, 条件 (L3a) を示そう. *Lax* 方程式 (L1), (L2) は次の形をしていた:

$$\begin{aligned} (L1) \quad L_1 &= (f - f_z)\varphi_{22}\underline{y} + Fy + *(f - f_z)\varphi_{22}\bar{y} = 0, \\ (L2) \quad L_2 &= (f - f_1)\varphi_{22}\underline{y} + F'y + *(f - f_z)\varphi_{22}\dot{y} = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

ここで, F, F' は次数 $(3, 2)$ のある多項式であり, $*$ は (f, g) に依らない定数である. 方程式 $(f - f_1)L_1 - (f - f_z)L_2 = 0$ より, $y, \bar{y}, \dot{y}$ の間の 3 項関係式が得られる. この関係式は見かけ上 $(4, 2)$ 次であるが, 実は $f - f_z$ で割り切れる. というのは, もし割り切れないとすると, $f = f_z$ のとき g の値によらず $y = 0$ となってしまう (L1b)(L2b) の各々 2 番目の条件に反するからである. そこで商は $(3, 2)$ 次となり, それと $C_0 : \varphi_{22} = 0$ との交点は $P_1^2 P_3 \cdots P_8 P_z$ (および $P_{h_1+\delta-z-u_1+u_2}$) である. よって $L_3 \in \Phi_{32}^3(P_1 P_3 \cdots P_8 P_z P_{h_1+\delta-z-u_1+u_2} | P_1)$ となる. 一方, これらの条件で L_3 が一意であることは次元の勘定からわかる. $\square$

補題 5.2 規格化された方程式

$$\begin{aligned} \text{(L2)} \quad & \underline{y} - A_2(z)y + B_2(z)\dot{y} = 0, \\ \text{(L3)} \quad & \bar{y} - A_3(z)y + B_3(z)\dot{y} = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

について, 次が成り立つ.

$$A_3(h_1 - \underline{z}) = A_2(z), \quad B_3(h_1 - \underline{z}) = B_2(z). \quad (52)$$

証明. 定義条件 (L2a,b) と (L3a,b) が $\underline{y} \leftrightarrow \bar{y}$ および $z \leftrightarrow h_1 - \underline{z}$ によって関係していることから従う.□

Step 2:

補題 5.3 *Lax* 方程式 $L_4 = 0$ は次で一意に特徴づけられる:

$$\begin{aligned} \text{(L4a)} \quad & L_4 \in \Phi_{54}^3(P_1^3 P_3^2 \cdots P_8^2 P_{z-u_1+u_2} P_{h_1+2\delta-z-u_1+u_2} | P_1) \\ \text{(L4b)} \quad & 2 \text{点 } Q_{u_1} \text{ (23) および } \dot{Q}_{\underline{z}} \text{ を通る.} \end{aligned}$$

ただし, $\dot{Q}_{\underline{z}}$ は次で定義される点とする.

$$\dot{Q}_{\underline{z}} \in \{\dot{f} = f_{\underline{z}}\} \cap \{(\dot{g} - g_{h_1-\underline{z}})\dot{y} = (\dot{g} - g_{\underline{z}})\dot{y}\}. \quad (53)$$

証明. (L2) と (L3) から $\underline{y}$ を消去して得られる $y, \dot{y}, \ddot{y}$ の 3 項関係式は, 見かけ上 (6, 4) 次となるが, 補題 5.1 の証明と同じ議論により, $f - f_{\underline{z}}$ で割り切れることが言える. その商が L_4 であり, これが $\Phi_{54}^3(P_1^3 P_3^2 \cdots P_8^2 P_{z-u_1+u_2} P_{h_1+2\delta-z-u_1+u_2} | P_1)$ に属することは簡単に確かめられる. また, (L4b) の条件のうち, Q_{u_1} については, (L2b) および (L3b) の対応する条件から直ちに従う.

残るは条件 (L4b) の $\dot{Q}_{\underline{z}}$ に関する部分, すなわち, $\dot{f} = f_{\underline{z}}$ において, (L4) 方程式の y の係数が零になり, そこで $\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = \frac{\dot{g} - g_{h_1-\underline{z}}}{\dot{g} - g_{\underline{z}}}$ となることである. 以下これを示そう. ここが両立性の追跡の核心部分であり, 前節の計算はこのための準備であった.

補題 5.2 より,

$$\begin{aligned} \text{(L2)} \quad & \underline{y} - A_2(z)y + B_2(z)\dot{y} = 0, \\ \text{(L3)} \quad & \underline{y} - A_2(z')\underline{y} + B_2(z')\dot{\underline{y}} = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

ここに $z' = h_1 + 2\delta - z$ (i.e. $\underline{z} + \underline{z}' = h_1$), $A_2(z) = \frac{F_{32}(h_1 - \underline{z})}{(f - f_1)\varphi_{22}}$, $B_2(z) = c(z) \frac{f - f_{\underline{z}}}{f - f_1}$ である³. これから $\underline{y}$ を消去して

$$Ky + A_2(z')B_2(z)\dot{y} + B_2(z')\dot{\underline{y}} = 0. \quad (55)$$

ここで $K = 1 - A_2(z)A_2(z')$. K の分子の多項式 $(f - f_1)^2\varphi_{22}^2 - F_{32}(h_1 - \underline{z})F_{32}(h_1 - \underline{z}')$ は $(f - f_{\underline{z}})$ で割り切れ, その商 K_1 について,

³ F_{32} の規格化をこれで定める. 係数 $c(z)$ は f, g によらない.

$$\begin{aligned} F_{32}(h_1 - \underline{z}) \text{ の零点: } & P_1(2 \text{ 重}), P_3, \dots, P_8, P_{h_1 - \underline{z}}, P_{z - u_1 + u_2}, \\ F_{32}(h_1 - \underline{z}') \text{ の零点: } & P_1(2 \text{ 重}), P_3, \dots, P_8, P_{\underline{z}}, P_{h_1 + 2\delta - z - u_1 + u_2}, \end{aligned}$$

に注意すれば,

$$K_1 \propto \varphi_{54}(\underline{z}) \in \Phi_{54}^1(P_1^4 P_3^2 \cdots P_8^2 P_{z - u_1 + u_2} | P_{h_1 + 2\delta - z - u_1 + u_2}). \quad (56)$$

よって 補題 4.2 より, $K = K_1 = 0$ ($\dot{f} = f_{\underline{z}}$ のとき) となる. 従って (55) より,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{y}} = -b(z)A_2(z'), \quad (\dot{f} = f_{\underline{z}}) \quad (57)$$

を得る. ここで (f, g) によらない係数 $\frac{B_2(z)}{B_2(z')}$ を $b(z)$ とおいた.

まず $A_2(z')|_{f=f_{\underline{z}}}$ を計算する. (L2b) の $Q_{\underline{z}}$ の条件より, $f = f_{\underline{z}}$ において

$$A_2(z)|_{f=f_{\underline{z}}} = \frac{y}{y}|_{f=f_{\underline{z}}} = \frac{g - g_{h_1 - \underline{z}}}{g - g_{\underline{z}}}. \quad (58)$$

そこで, 補題 4.4 の結果: $A_2(z; f, g) = rT(A_2(z; f, g)) = A_2(z; \dot{f}, \tilde{g})$ に注意すれば,

$$A_2(z)|_{f=f_{\underline{z}}} = \frac{\tilde{g} - g_{z'}}{\tilde{g} - g_{\underline{z}}}, \quad \text{i.e.} \quad A_2(z')|_{f=f_{\underline{z}}} = \frac{\tilde{g} - g_{\underline{z}}}{\tilde{g} - g_{z'}}, \quad (59)$$

が得られる,

次に, 係数因子 $b(z)$ を求めよう. (L2b) の Q_{u_1} の条件より, $f = f_1$ において

$$\lim_{f \rightarrow f_1} \frac{A_2(z)}{B_2(z)} = \frac{\dot{y}}{y}|_{f=f_1} = \frac{g - g_{u_1}}{g - g_{h_1 - u_1}} \quad (60)$$

である. これが z によらないこと, および $A_2(z) = \frac{F_{32}(h_1 - \underline{z})}{(f - f_1)\varphi_{22}}$ に注意すれば,

$$b(z) = \frac{B_2(z)}{B_2(z')} = \frac{A_2(z)}{A_2(z')}|_{f=f_1} = \frac{F_{32}(\underline{z}')}{F_{32}(\underline{z})}|_{f=f_1}. \quad (61)$$

ここで, 補題 4.9 を $Q = (x, y) = P_{\underline{z}}$ の場合に適応すれば, $x = f_{\underline{z}} = f_{\underline{z}'}$, $y = g_{\underline{z}}$, $\tilde{y} = g_{\underline{z}'}$, $\mathcal{F}|_{Q=P_{\underline{z}}} \propto F_{32}(\underline{z})$ であるので,

$$\frac{F_{32}(\underline{z}')}{F_{32}(\underline{z})}|_{f=f_1} = \frac{\mathcal{F}(f, g; x, \tilde{y})}{\mathcal{F}(f, g; x, y)}|_{f=f_1, Q=P_{\underline{z}}} = -\frac{(\tilde{g} - g_{z'})(\dot{g} - g_{\underline{z}'})}{(\tilde{g} - g_{\underline{z}})(\dot{g} - g_{\underline{z}})}|_{f=f_{\underline{z}}}, \quad (62)$$

を得る. 最後の等式では, f がダミー変数であること, およびこの式の値が g に依存しないことを用いて, 変数 (f, g) を $(\dot{f}, \dot{g})$ に取り換えた.

式 (59), (61) および (62) より

$$\frac{\dot{y}}{\dot{y}} = \frac{\dot{g} - g_{z'}}{\dot{g} - g_z}, \quad (\dot{f} = f_z). \quad (63)$$

が得られる. これで (L4b) の $\dot{Q}_z$ の条件も示された. $\square$

Step 3:

補題 5.4 *Lax* 方程式 $L_5 = 0$ は次の条件により一意に特徴づけられる:

$$\begin{aligned} \text{(L5a)} \quad & L_5 \in \Phi_{54}^3(P_1^3 P_3^2 \cdots P_8^2 P_{z+\delta-u_1+u_2} P_{h_1+\delta-z-u_1+u_2} | P_1) \\ \text{(L5b)} \quad & 2 \text{ 点 } Q_{u_1} \text{ (23) および } \dot{Q}_z \text{ を通る.} \end{aligned}$$

ここに

$$\dot{Q}_z \in \{\dot{f} = f_z\} \cap \{(\dot{g} - g_{h_1-z})\dot{y} = (\dot{g} - g_z)\dot{y}\}. \quad (64)$$

証明は Step 2 と同様なので省略する.

Step 4:

補題 5.5 *Lax* 方程式 $L_6 = 0$ は次の条件により一意に特徴づけられる:

$$\begin{aligned} \text{(L6a)} \quad & L_6 \in \Phi_{76}^3(P_1^5 P_2 P_3^3 \cdots P_8^3 P_{z+\delta-u_1+u_2} | P_{h_1+2\delta-z-u_1+u_2}). \\ \text{(L6b)} \quad & 2 \text{ 点 } \dot{Q}_z \text{ (64) と } \dot{Q}_z \text{ (53) を通る.} \end{aligned}$$

証明. 方程式

$$\begin{aligned} \text{(L4)} \quad & \varphi_{54}(z)y + *A_{32}(z)\varphi_{22}\dot{y} + *(f - f_1)(\varphi_{22})^2\dot{y} = 0, \\ \text{(L5)} \quad & \varphi_{54}(z)y + *A_{32}(h_1 - z)\varphi_{22}\dot{y} + *(f - f_1)(\varphi_{22})^2\dot{y} = 0, \end{aligned} \quad (65)$$

から y を消去して $\varphi_{54}(z)L_4 - \varphi_{54}(z)L_5 = 0$ を得る. これは見かけ上 (10, 8) 次であるが, 前と同様の理由から $(f - f_1)\varphi_{22}$ で割り切れることがわかる. よって次数 (7, 6) の方程式が得られる. 零点の条件は L_4 と L_5 に関するそれから容易に従う. $\square$

次が本論文の主結果である.

定理 5.6 (両立性) 方程式 (L6) は方程式 (L1) を $T = T_{21}$ で時間発展させたものに等しい:

$$u_i \mapsto \dot{u}_i, \quad y \mapsto \dot{y}, \quad (f, g) \mapsto (\dot{f}, \dot{g}). \quad (66)$$

言い替えれば, *Lax* 対 (L1)(L2) の両立性は, 変数 (f, g) が T に対する楕円 Painlevé 方程式を満たすことと同値である.

証明. 既に (L6) の特徴づけが得られているので, それと $T(L1)$ の特徴づけとを比較すればよい.

(1) 式 (72) より, 次が成り立つ

$$T(L1) \in T(H_1 + \delta) = H_1 + 3\delta - 2E_1 + 2E_2. \quad (67)$$

(2) 方程式 (L1) は付加的な零点 $P = P_z$ および $P = P_{h_1+\delta-z}$ をもつので, その時間発展 $T(L1)$ は, $\dot{P} = P_z$ および $\dot{P} = P_{h_1+\delta-z}$ に零点をもつ. 式 (26) より, これら $T(L1)$ の零点は時間発展前の座標 $P = (f, g)$ で書けば, $P = P_{z-u_1+u_2+\delta}$ および $P = P_{h_1+2\delta-z-u_1+u_2}$ である.

これら 2 つのことから, $T(L1)$ は補題 5.5 の条件 (L6a) を満たすことがわかる. 一方, 条件 (L6b) は対応する条件 (L1b) を T で時間発展させたものに他ならない. $\square$

A 格子の記号

本文で用いた Picard 格子についてごく簡単に説明する. 無定義語がたくさんあるが, 本文では曲線の性質を表す便利な記号として用いるだけなので詳細は必要ない.

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を 8 点 $P_1, \dots, P_8$ で blow up して得られる有理曲面を X と表す. その Picard 格子 $\text{Pic}(X)$ は次で与えられる:

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}H_1 \oplus \mathbb{Z}H_2 \oplus \mathbb{Z}E_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}E_8, \quad (68)$$

ここで H_1, H_2 は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の $(1,0)$ 次および $(0,1)$ 次の直線の類であり, E_j ($j = 1, \dots, 8$) は P_j を blow up して得られた例外直線を表す. この基底に対する非自明な交点数は

$$(H_1, H_2) = (H_2, H_1) = 1, \quad (E_j, E_j) = -1, \quad (69)$$

である. 曲面 X は $\mathbb{P}^2$ の 9 点 blow up と双有理同値である.

最も一般的な状況では, 曲面 X 上の Cremona 変換の群は $E_8^{(1)}$ 型アフィンワイル群となり, その平行移動部分 $\mathbb{Z}^8$ が楕円 Painlevé 方程式を与える ([12][10]). $\text{Pic}(X)$ における $E_8^{(1)}$ 単純ルート $\alpha_0, \dots, \alpha_8$ は, $\alpha_0 = E_1 - E_2$, $\alpha_1 = H_1 - H_2$, $\alpha_2 = H_2 - E_1 - E_2$, $\alpha_i = E_{i-1} - E_i$, ($i = 3, \dots, 8$) で与えられる. null ルート δ ($= -K_X$: X の反標準因子類) は

$$\delta = 2H_1 + 2H_2 - E_1 - E_2 - \dots - E_8, \quad (70)$$

で, これはアフィンワイル群不変である. α 方向への平行移動 T_α の $\text{Pic}(X)$ への作用は Kac の公式

$$T_\alpha(\beta) = \beta + (\delta, \beta)\alpha - \left((\delta, \beta)\frac{(\alpha, \alpha)}{2} + (\alpha, \beta) \right)\delta, \quad (71)$$

で与えられる. 例えば, $E_i - E_j$ ($1 \leq i \neq j \leq 8$) 方向の平行移動 $T = T_{E_i - E_j}$ について,

$$\begin{aligned} T(H_k) &= H_k + 2(E_i - E_j) + 2\delta, \quad (k = 1, 2) \\ T(E_j) &= E_i, \\ T(E_i) &= E_i + (E_i - E_j) + 2\delta, \\ T(E_k) &= E_k + (E_i - E_j) + \delta, \quad (k \neq i, j) \end{aligned} \quad (72)$$

である. この式は本文中で何度か使うので, 次の節では, これを 2 節の定義 (i)(ii) に基づいて初等的方法により導いておく.

B Painlevé 方程式を表す有理式の特徴づけ

加法定理による定義 (i)(ii) に基づいて, 離散 Painlevé 方程式を表す有理式の特徴づけを与えておこう. まず, 次の補題を用意する.

補題 B.1 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ において, $P_1, \dots, P_8$ を *special* な配置の 8 点とし, P を一般の点とする. $P_1, \dots, P_8$ を通る (2, 2) 次曲線の *pencil* の中で P を通るものを C とする. C 上の加法で, $P + P_1 + P_2 + Q = 0$ により決まる点を Q とすれば, $M_{12}: P \mapsto Q$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の双有理変換であり, 次の特徴をもつ⁴.

$$\begin{aligned} M_{12}(H_1) &= H_1 + 2H_2 - 2E_1 - 2E_2 + \delta, \\ M_{12}(H_2) &= 2H_1 + H_2 - 2E_1 - 2E_2 + \delta, \\ M_{12}(E_1) &= H_1 + H_2 - 2E_1 - E_2 + \delta, \\ M_{12}(E_2) &= H_1 + H_2 - E_1 - 2E_2 + \delta, \\ M_{12}(E_k) &= H_1 + H_2 - E_1 - E_2 - E_k. \quad (k \neq 1, 2) \end{aligned} \quad (73)$$

ここで, 記号 $d_1H_1 + d_2H_2 - m_1E_1 - m_2E_2 - \dots - m_8E_8$ は $P_1, \dots, P_8$ を $m_1, \dots, m_8$ 重に通る (d_1, d_2) 次曲線を表す.

証明. 加法の定義より, 4 点 P, P_1, P_2, Q は, ある (1, 1) 曲線と C との交点になっている. $P \in E_k$ ($k \neq 1, 2$) の場合. 点 P が例外曲線 E_k を動くと, pencil の P_k の接線の傾きが変化する. このとき, 3 点 P, P_1, P_2 を通る (1, 1) 曲線は P_k, P_1, P_2 を通っており, pencil の変化によって, 点 Q はこの (1, 1) 曲線上を動く. よって E_k の像 $M_{12}(E_k)$ は $H_1 + H_2 - E_1 - E_2 - E_k$ である.

$P \in E_1$ の場合 ($P = P_2$ の場合も同様). $Q = (x, y)$ を定める (1, 1) 曲線と (2, 2) 曲線 P_1 で接しており, その接線の傾きが $P \in E_1$ によって変化する. 両曲線の方程式は, 共通の傾きパラメータ t を用いて

$$U + tV = 0, \quad F + tG = 0, \quad (74)$$

の形にかける. (U, V) は (1, 1) 次式で P_1, P_2 で零であり, 点 P_1 で $(U_x, U_y) = (1, 0)$, $(V_x, V_y) = (0, 1)$. F, G は (2, 2) 次式で $P_1, \dots, P_8$ で零であり, 点 P_1 で $(F_x, F_y) = (1, 0)$, $(G_x, G_y) =$

⁴任意の M_{ij} ($i \neq j$) も同様に定義され, 明らかに $M_{ij} = M_{ji} = M_{ij}^{-1}$ である.

(0, 1) ととれる.) 式 (74) から t を消去して得られる

$$\psi = \begin{vmatrix} U & V \\ F & G \end{vmatrix} = 0, \quad (75)$$

が像 $M_{12}(E_1)$ の方程式となる. これは (3, 3) 次であり, 零点: $P_1(3 \text{ 重}), P_2(2 \text{ 重}), P_3, \dots, P_8$ (各 1 重) をもつ. 従って $M_{12}(E_1) = H_1 + H_2 - 2E_1 - E_2 + \delta$ となる.

P が $E_1, \dots, E_8$ 以外の場合. $Q = (x, y)$ を定める方程式を $F_{22}(x, y) = F_{11}(x, y) = 0$ とする. F_{22}, F_{11} は, 変数 $P = (f, g)$ についても, 各々 (2, 2) 次, (1, 1) 次である. $F_{11}(x, y) = 0$ より $y = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ (係数は (f, g) の (1, 1) 次式で P_1, P_2 で零). これを $F_{22}(x, y) = K(x) + L(x)y + M(x)y^2 = 0$ (係数は x について 2 次, (f, g) について (2, 2) 次式で $P_1, \dots, P_8$ で零) に代入すれば,

$$K(x)(Cx + D)^2 + L(x)(Ax + B)(Cx + D) + M(x)(Ax + B)^2 = 0, \quad (76)$$

となる. これは $x - f$ で割り切れて x の 3 次式

$$R + Sx + Tx^2 + Ux^3 = 0, \quad (77)$$

(係数は (f, g) の (3, 4) 次式, $P_1(3 \text{ 重}), P_2(3 \text{ 重}), P_3, \dots, P_8$ (各 1 重) で零) を得る. この 3 根のうち 2 つは f_1, f_2 であり残りの 1 個が求める x である. 根と係数の関係により

$$x = -f_1 - f_2 - \frac{T}{U} =: \frac{V}{W}, \quad (78)$$

となる. ここに V, W は T, U と同じ零点をもつ (f, g) の (3, 4) 次式. H_1 型の直線: $x = c$ (定数) の逆像を考えて $M_{12}(H_1) = M_{12}^{-1}(H_1) = 3H_1 + 4H_2 - 3E_1 - 3E_2 - E_3 - \dots - E_8$ がわかる. $M_{12}(H_2)$ も同様である.⁵ □

Painlevé 方程式の変換は, M_{ij} の合成として求めることができる. Painlevé 方程式の設定では, $P_1, \dots, P_8$ は special な配置ではないが, 定義 (i) より $T_{ij}(P_i)$ と残りの 7 点 P_j ($j \neq i$) は special な配置になっていることに注意しよう. この配置に関して, 定義 (ii) は次を意味する:

$$T_{ij}(P) = M_{ik}M_{jk}(P). \quad (k \neq i, j) \quad (79)$$

実際, $Q = M_{jk}(P)$ とおけば $T_{ij}(P) = M_{ik}(Q)$ となり, $P + Q + P_j + P_k = 0$, $Q + T_{ij}(P) + T_{ij}(P_i) + P_k = 0$ より $P + P_j = T_{ij}(P) + T_{ij}(P_i)$ が従う. そこで上記補題を適用して,

$$\begin{aligned} T_{21}(H_1) &= (H_1/.M_{23})/.M_{13} = (H_1 + 2H_2 - 2E_2 - 2E_3 + \delta)/.M_{13} \\ &= (H_1 + 2H_2 - 2E_1 - 2E_3 + \delta) + 2(2H_1 + H_2 - 2E_1 - 2E_3 + \delta) \\ &\quad - 2(H_1 + H_2 - E_1 - E_2 - E_3) - 2(H_1 + H_2 - E_1 - 2E_3 + \delta) + \delta \\ &= H_1 - 2E_1 + 2E_2 + 2\delta, \end{aligned} \quad (80)$$

⁵ $M_{12}(H_1 - E_1) = H_2 - E_2$ などからも導ける.

が得られる.⁶ これは $T_{21} : (f, g) \mapsto (\frac{F_1(f, g)}{F_2(f, g)}, \frac{G_1(f, g)}{G_2(f, g)})$ における F_1, F_2 が, (f, g) の多項式として $(5, 4)$ 次で P_1 (4重), $P_3, \dots, P_8$ (各2重) を零点とすることを意味する.

C 微分方程式の場合

この付録では, 第六 Painlevé 方程式 P_{VI} を例として, 微分方程式の場合を考える. P_{VI} 方程式は Hamiltonian 形式

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (81)$$

に表すことができ Hamiltonian は次で与えられる

$$H = \frac{1}{t(t-1)} \left[q(q-1)(q-t)p^2 + \{(a_1 + 2a_2)(q-1)q + a_3(t-1)q + a_4t(q-1)\}p + a_2(a_1 + a_2)(q-t) \right]. \quad (82)$$

($a_0 + a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 = 1$) この方程式 (81) は, $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \infty\}$ 上の Fuchs 型微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(\frac{1-a_4}{z} + \frac{1-a_3}{z-1} + \frac{1-a_0}{z-t} - \frac{1}{z-q} \right) \frac{\partial y}{\partial z} + \left\{ \frac{a_2(a_1+a_2)}{z(z-1)} - \frac{t(t-1)H}{z(z-1)(z-t)} + \frac{q(q-1)p}{z(z-1)(z-q)} \right\} y = 0, \quad (83)$$

のモノドロミー保存変形

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{z(z-1)(q-t)}{t(t-1)(q-z)} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{zp(q-1)(q-t)}{t(t-1)(z-q)} y = 0, \quad (84)$$

を表している. 方程式 (83), (84) は P_{VI} 方程式の Lax 対と見なされる. これらの Lax 方程式の幾何学的意味を見るために, 次のような同次座標 $(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2$ を導入する:

$$q = \frac{Z}{Z-X}, \quad p = \frac{Y(Z-X)}{XZ}. \quad (85)$$

そのとき, 次が成り立つ.

命題 C.1 方程式 (83) は, $\mathbb{P}^2$ 上の 4 次の代数曲線 $F(X, Y, Z) = 0$ として, 次の条件により一意に特徴づけられる:

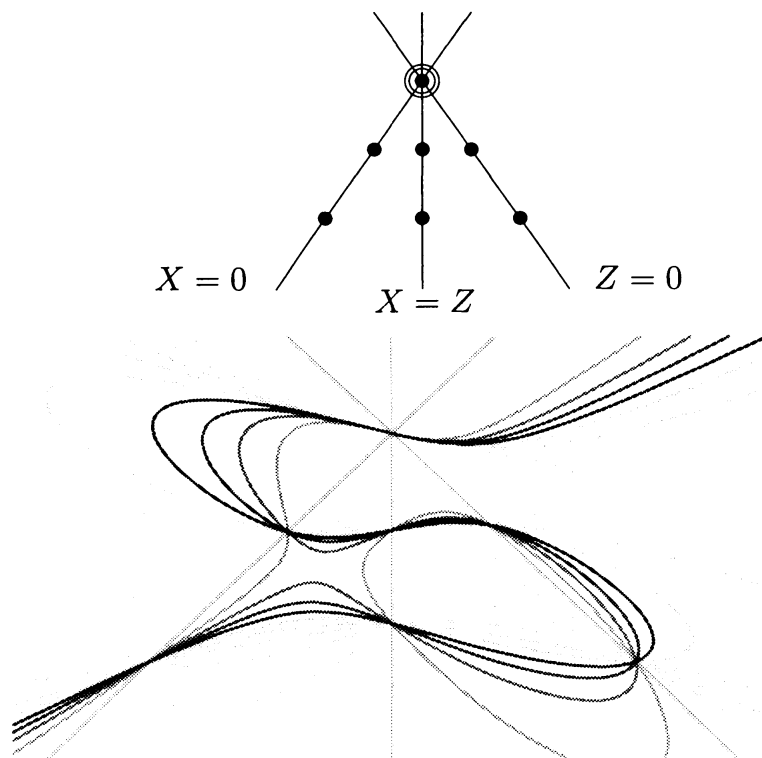
$$\begin{aligned} F(0, 0, 1) &= F(1, -a_2, 1) = F(1, 0, 0) \\ &= F(0, a_3, 1) = F(1, -a_1 - a_2, 1) = F(1, a_4, 0) = 0, \\ F((t-1)\varepsilon, 1, t\varepsilon - a_0 t \varepsilon^2) &= O(\varepsilon^3), \\ F((z-1)\varepsilon, 1, z\varepsilon + z \varepsilon^2) &= O(\varepsilon^4), \\ F\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{1}{z-1}\right) \Big|_{z \mapsto z+\varepsilon} &= O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (86)$$

⁶変換の合成 $x \mapsto y \mapsto z$ を表す式は後の変換式 $z = z(y)$ の y に先の変換式 $y = y(x)$ を代入したもの: $z/. \{z \rightarrow z(y)\} /. \{y \rightarrow y(x)\}$ (Mathematica の記号).

同様に, 2 番目の Lax 方程式 (84) も 2 次曲線 $R(X, Y, Z) = 0$ で以下を満たすものとして一意に決まる.

$$\begin{aligned} R(0, 1, 0) &= R(1, 0, 0) = 0, \\ R((t-1)\varepsilon, 1, t\varepsilon - \frac{t^2(t-z)}{z} \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial t} \varepsilon^2) &= O(\varepsilon^3), \\ R(\frac{1}{z}, \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{1}{z}) &= 0. \end{aligned} \quad (87)$$

P_{VI} の Lax 方程式のこのような特徴づけは, 本文中の我々の構成の退化した場合と見なせる. $F(X, Y, Z)$ を特徴づける条件のうち, $z, y(z)$ によらない 9 個の条件は, Hamiltonian H (82) の 3 次曲線の pencil としての特徴づけ [9] に対するものと同じである.



最後に, 見かけの特異点と非対数条件について補足しておこう. 式 (82) の Hamiltonian H は, 通常, 式 (83) の見かけの特異点 $z = q$ における非対数条件により決定される. すなわち, 微分方程式 (83) は, 見かけ上 $z = q$ を特性指数 0, 2 の特異点とするが, 解はその点で正則となる. 定義 3.1 で与えられた差分 Lax 方程式 (L1) において, その係数に現れる因子 $(f - f_z)$ や $(f - f_{\bar{z}})$ は “見かけの特異点” の類似とみなすことができる. 非対数条件は微分方程式 (83) の基本的な性質であるので, その差分版の類似を考えることは興味深い問題である.

D 2×2 行列の Lax 形式との対応

本文ではスカラー Lax 対を考察したが、スカラー型であることに本質的意味はない。実際、以下に見るように、行列型でも同様な議論ができる。

一般に次のスカラー Lax 対を考える。

$$\begin{aligned} L_1: \quad \bar{y} + p_1 y + p_2 \underline{y} &= 0, \\ L_2: \quad \dot{y} + a y + b \underline{y} &= 0. \end{aligned} \quad (88)$$

これを行列型にするために、 $Y = \begin{bmatrix} y \\ \underline{y} \end{bmatrix}$ とおけば、 $\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 y - p_2 \underline{y} \\ y \end{bmatrix}$ であるから、

$$\bar{Y} = AY, \quad A = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

また、 $L_2 - \frac{b}{p_2} L_1 = 0$ より、 $c = \frac{bp_1}{p_2} - a$ とおいて、

$$L_3: \quad \dot{y} - cy - \frac{b}{p_2} \bar{y} = 0, \quad (90)$$

である。従って、

$$\dot{Y} = BY, \quad B = \begin{bmatrix} -a & -b \\ \frac{b}{p_2} & c \end{bmatrix}, \quad (91)$$

となる。行列型の Lax 形式 (89, 91) の両立条件は $\dot{\bar{Y}} = \bar{Y}$ ，すなわち、

$$\dot{A}B = \bar{B}A, \quad (92)$$

である。この (2,1) 成分 (2,2) 成分は自動的に成り立っており、(1,1) 成分および (1,2) 成分から、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{b}{p_2} \dot{p}_2 + \bar{b} - \bar{a} p_1 + a \dot{p}_1 &= 0, \\ -\frac{b}{p_2} p_1 \dot{p}_2 + b \dot{p}_1 - \bar{a} p_2 + a \dot{p}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (93)$$

一方スカラー型では、 $cL_2 + bL_3 = 0$ ，および、 $\bar{a}L_3 + \frac{b}{p_2} \bar{L}_2 = 0$ より、

$$\begin{aligned} L_4: \quad c\dot{y} + b\dot{\underline{y}} + d y &= 0, \\ L_5: \quad \bar{a}\dot{y} + \frac{b}{p_2} \dot{\bar{y}} - \bar{d} y &= 0, \end{aligned} \quad (94)$$

ただし $d = a\underline{c} - \frac{b\underline{b}}{p_2}$ となり, 最後に, $\bar{d}L_4 + dL_5 = 0$ より,

$$L_6 : \quad \frac{bd}{p_2} \bar{y} + (\bar{d}\underline{c} + d\bar{a})\dot{y} + \bar{d}b\dot{y} = 0, \quad (95)$$

を得る. これは, $\dot{L}_1$ と比較すべき式であり, $L_6 = \dot{L}_1$ となる条件として,

$$p_1 = \frac{p_2}{db}(\bar{d}\underline{c} + d\bar{a}), \quad p_2 = \frac{\bar{d}}{d}p_2, \quad (96)$$

が得られる. 行列型の両立条件 (93) とスカラー形式の両立条件 (96) は当然ながら同値であり, それは直接計算で確かめられる.

謝辞. 本研究に関して, RIMS 研究集会「可積分系数理とその応用」(はこだて未来大学)での講演の機会を与えていただいた研究代表者の礒島伸氏ならびに関係者の皆様に感謝します. 本研究には科学研究費補助金 No.17340047, No.21340036 の補助を得ています.

References

- [1] D.Arinkin and A.Borodin, *Moduli spaces of d -connections and difference Painlevé equations*, Duke Math. J. **134** (2006) 515-556.
- [2] D.Arinkin, A. Borodin and E. Rains, Talk at the SIDE 8 workshop (June, 2008) and MPIM (July 2008).
- [3] D.Arinkin and S.Lysenko, *Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$ -bundles with connections on $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$* , Math. Res. Lett. **4** (1997) 181-190; *On the moduli of $SL(2)$ -bundles with connections on $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$* , Internat. Math. Res. Notices **19** (1997) 983-999.
- [4] P.Boalch, *Quivers and difference Painlevé equations*, arXiv:0706.2634.
- [5] A.Borodin, *Discrete gap probabilities and discrete Painlevé equations*, Duke Math. J. **117** (2003) 489-542; *Isomonodromy transformations of linear systems of difference equations*, Ann. of Math. (2) **160** (2004) 1141-1182.
- [6] B.Grammaticos, F.W.Nijhoff and A.Ramani, *Discrete Painlevé equations*, in “The Painlevé Property : One Century Later”, R.Conte ed., CRM Series in Mathematical Physics, Springer-Verlag, (1999) 413-516.
- [7] M.Jimbo and H.Sakai, *A q -analog of the sixth Painlevé equation*, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 145-154.

- [8] K.Kajiwara, T.Masuda, M.Noumi, Y.Ohta and Y.Yamada, ${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation, J. Phys. **A36** (2003) L263-L272.
- [9] K.Kajiwara, T.Masuda, M.Noumi, Y.Ohta and Y.Yamada, Cubic pencils and Painlevé Hamiltonians, Funkcial. Ekvac. **48** (2005) 147-160.
- [10] M.Murata, New expressions for discrete Painlevé equations, Funkcial. Ekvac. **47** (2004) 291-305.
- [11] E.Rains, An isomonodromy interpretation of the elliptic Painlevé equation. I, arXiv:0807.0258v1.
- [12] H.Sakai, Rational surfaces with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Commun. Math. Phys. **220** (2001) 165-221.
- [13] Y.Yamada, Padé method to Painlevé equations, Funkcial. Ekvac. **52** (2009) 83–92.
- [14] Y.Yamada, Talk at the Workshop: "Elliptic integrable systems, iso-monodromy problems, and hypergeometric functions" 21-25 July, 2008, Max Planck Institute for Mathematics.
- [15] Y.Yamada, A Lax formalism for the elliptic difference Painlevé equations, SIGMA, **5** (2009) 042 (15 pages).