

111

Group prescheme 係数の cohomologies

について.

京大理 宮西正直

Introduction. この小論で, 我々は prescheme X 上の X -group prescheme G を係数とする幾つかの Grothendieck cohomologies について触れよう. X 上の Brauer 群 $Br(X)$ を調べるためには $H^2(X_{\text{ét}}, G_m)$ (2nd étale cohomology) が大事であるが, 我々は $G = G_m, X$ のみならず, 一般の group prescheme について, $X_{\text{ét}}$ のみならず, 他の topology とも眺め, それらの topology に関する cohomologies と比較する. そのために §1 に於いて, Grothendieck topology の定義及び簡単な諸結果を思い出す. §2 に於いては, 具体的な G について各 cohomology と比較した結果を示す. §3 に於いては X 上の各 topology での cohomological dimension について種々の結果を紹介する. §4 に於いては, SGAA 等に於いて知られている重要な étale cohomology に関する結果及び group prescheme に関する結果と与える.

§1. Grothendieck topology の定義及びその topology に

関する cohomology について、特に Leray spectral sequence, Hochschild-Serre の spectral sequence 及び Giraud の gerbe, lien 等の紹介.

§ 2. Group prescheme 係数の各 cohomologies の比較.

§ 3. Cohomological dimension について.

§ 4. Etale cohomology についての重要な結果について.

その結果の豊富さ、又古典的な結果を包含する：ことに於いても étale cohomology は、他の cohomologies に較べて中心的である。しかしより新しく、一般的な結果は (fppf) - または (fpfc) - cohomology に求められる必要があると考える。その意味に於いて、§ 2, § 3 の結果は不足であり、更に refine されねばならない。特に § 3 の結果を prescheme X 上の (fppf) - または (fpfc) - topology で考えられた結果に拡張することについては、別の機会に取り上げたいと思う。

§ 1. Grothendieck topology の定義 & 其の topology に関する cohomology. 特に Leray Spectral Sequence, Hochschild-Serre Spectral Sequence & Giraud の gerbe, lien の紹介.

これらの結果は文献が豊富であるから、原則として証明は与えない.

1.1. Grothendieck topology T は category $\text{Cat } T$ & 其の coverings の集合 $\text{Cov } T$ より成り、次の条件を満たす:

- (i) $\phi : \text{isomorphism} \in \text{Cat } T \Rightarrow \{\phi\} \in \text{Cov } T$.
- (ii) $\{\sigma_i \rightarrow \sigma\}_i, \{V_{ij} \rightarrow \sigma_i\}_j \in \text{Cov } T \Rightarrow \{V_{ij} \rightarrow \sigma\}_{ij} \in \text{Cov } T$
- (iii) $\{\sigma_i \rightarrow \sigma\}_i \in \text{Cov } T, V \rightarrow \sigma \in \text{Cat } T \Rightarrow \exists \sigma_i \times_{\sigma} V \in \text{Cat } T$
かつ $\{\sigma_i \times_{\sigma} V \rightarrow V\}_i \in \text{Cov } T$.

prescheme X 上の (fpgc)-topology (resp. (fppf)-topology, étale topology, étale finite topology, Zariski topology) は次の 2 種の open coverings に T 生成される:

- 1) $\{\sigma_\lambda \rightarrow X\}_\lambda$: open set σ_λ かつ X への open immersion $\sigma_\lambda \rightarrow X$ の集合で、 $\bigcup \sigma_\lambda = X$ を満たす.
- 2) $\{\sigma_i \xrightarrow{f_i} \sigma\}_i$: flat, quasi-compact (resp. flat, of finite presentation, étale, étale finite, ϕ) morphism f_i の有限集合で $\bigcup f_i(\sigma_i) = \sigma$.

この時上記の topologies の間には $(fpgc) \geq (fptf) \geq (\text{étale})$
 $\geq (\text{étf}) \geq (\text{Zariski})$ なる関係がある。但し $\geq$ はその左辺の
topology が右辺のものより細かい事を示す。X に上記の topology
を付け加えた時 X を $(fpgc)$ - (resp. $(fptf)$ -, étale -, (étf) -, Zariski)-
site と呼び、 X_{pg} (resp. X_{pt} , $X_{\text{ét}}$, $X_{\text{étf}}$, X_{Zar}) と表わす。

X_{pg} (resp. X_{pt} , $X_{\text{ét}}$, $X_{\text{étf}}$, X_{Zar}) 上の集合 (group, abel 群,
ring) の sheaf とは、 X_{pg} (resp. X_{pt} , $X_{\text{ét}}$, $X_{\text{étf}}$, X_{Zar}) より,
category (Sets) ((gp) , (Ab) , (Rings)) への contravariant
functor F で、上記 1), 2) の集合の族に対して、

$$a) \quad F(X) \longrightarrow \prod_{\lambda} F(U_{\lambda}) \rightrightarrows \prod_{\lambda, \mu} F(U_{\lambda} \cap U_{\mu}) \quad : \text{exact}$$

$$b) \quad F(U) \longrightarrow \prod_i F(V_i) \rightrightarrows \prod_{i, j} F(V_i \times_U V_j) \quad : \text{exact}$$

を満たすものである。 X_{pg} 上の集合の sheaves のなす category
を $X_{pg}^{\sim}$, abel groups の sheaves のなす category を $X_{pg}^{\sim, \text{ab}}$, X_{pg}
上の rings ($\Rightarrow 1$) の sheaf A について、 A -modules の sheaves の
なす category を $X_{pg}^{\sim, A}$ と表わしたりする。 X_{pt} , $X_{\text{ét}}$ 等についても
同様の記号を使う。

例えば、 X_{pg} 上の (Sets) -valued contravariant functor G について、 G より次の様にして、 (Sets) -valued sheaf LG を作られる：

$$LG(U) = \varinjlim_{\substack{\{U_{\alpha} \rightarrow U\} \\ \text{open covering}}} \ker \left(\prod_{\alpha} G(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} G(U_{\alpha} \times_U U_{\beta}) \right), \quad LG = L(LG).$$

($LG \in G$ a separated presheaf とい; 時がある.)

この時, functor $G \mapsto aG$ は finite projective limits 及 inductive limits と可換である.

1.2. $f: X \rightarrow Y$ は preschemes の morphism とする. 1.1

とは $(fpgc)$ -topology において, sites X_{pg}, Y_{pg} の間に sites の morphism $f_{pg}: X_{pg} \rightarrow Y_{pg}$, $(Y' \xrightarrow{f_{pgc}} Y) \mapsto (Y'_Y \times Y \rightarrow Y)$ がある, (cf. SGAA, III, 2.7). 従って X_{pg} は, 例として, abelian sheaves の topoi の間に direct image functor f_* , inverse image functor f^* が定まる;

$$X_{pg}^{\sim, ab} \xrightleftharpoons[f^*]{f_*} Y_{pg}^{\sim, ab}.$$

具体的には, 次の様にかける;

$$f_*(F)(Y') = F(X_Y^{\sim, ab}), \quad F \in X_{pg}^{\sim, ab}, \quad Y' \in \text{Cat}(Y_{pg}),$$

$$f^*(G)(X) = \varinjlim_{\{V_\lambda \rightarrow Y\} \in J(X'_Y)} \text{Ker} \left(\prod_\lambda G(V_\lambda) \rightrightarrows \prod_{\lambda, \mu} G(V_\lambda \times_Y V_\mu) \right)$$

但し, $G \in Y_{pg}^{\sim, ab}$, $J(X'_Y)$ は $\text{Cov}(Y_{pg})$ の open covering $\{V_\lambda \rightarrow Y\}$ で $\left\{ \begin{array}{ccc} V_\lambda \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \uparrow & \nearrow & \\ X' & & \end{array} \right\}$ となるもののなす category.

f^*, f_* は互いに adjoint な pair をなす. $(fpgc)$ -topology 以外の topology でも, 同様の事柄が成立する.

又 $X_{pg}, X_{pc}, X_{\text{ét}}, X_{\text{ét}}, X_{\text{Zar}}$ の間に sites の morphisms

も考えられる。例えば、 X_{pe} , X_{et} について言えば、

$$p: X_{pe} \longrightarrow X_{et}$$

(étale topology の open covering と自然に (fppf)-topology の open covering とみる morphism.) がある。従って

$$\begin{array}{ccc} X_{pe}^{\sim, ab} & \xrightleftharpoons[p^*]{p_*} & X_{et}^{\sim, ab} \end{array}$$

も考えられる。 $X_{pe}^{\sim, ab} \ni F$ と $p_* F$ と同一視する。これにより、自然に étale sheaf と考えられる。同様にして、 X 上の各種の sheaves に対して、次の inclusions がある。

$$(Sch/X) \subseteq (fpgc\text{-sheaves}) \subseteq (fppf\text{-sheaves}) \subseteq (\text{étale sheaves}) \subseteq (\text{étf-sheaves}) \subseteq (\text{Zariski sheaves}).$$

上段左の inclusion は (fpgc)-morphism から preschemes の morphisms のなす fibre category について effective descent morphism であることによる。

1.3. Cohomologies. $X_{p_1}^{\sim, ab}$, $X_{pe}^{\sim, ab}$, ..., $X_{zar}^{\sim, ab}$ と考える。

例えば $X_{p_1}^{\sim, ab}$ について、これは generator を持ち、(filtered) inductive limits の exact functor である abelian category であることは容易に見られるから、十分に多くの injective objects をもつ category である。従って $F \in X_{p_1}^{\sim, ab}$ は injective resolutions をもつ。この時 functor $F \longmapsto F(X)$ の q -th right derived functor は $H^q(X_{p_1}, F)$ とかく。

morphism $f: X \rightarrow Y$ によって, direct image functor $f_*: X_{p\delta}^{\sim, ab} \rightarrow Y_{p\delta}^{\sim, ab}$ は $X_{p\delta}^{\sim, ab}$ の injective object $I \in Y_{p\delta}^{\sim, ab}$ の acyclic object $f_* I$ (i.e. $H^i(Y_{p\delta}, f_* I) = 0, \forall i > 0$) になる (cf. SGA4, V, 3.8 & 3.9). 今 $F \in X_{p\delta}^{\sim, ab}$ によって, functor $F \mapsto f_* F$ の $\frac{p}{p-1}$ -th right derived functor $R^i f_{p\delta,*} F$ と書く. $R^i f_{p\delta,*} F$ は presheaf $Y' \mapsto H^i((X \times_{Y'} Y)_{p\delta}, F)$ の associated sheaf である. 上記の acyclicity に関する事実を便に, composite morphism $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ によって, Leray の spectral sequence

$$(I) \quad E_2^{p,q} = R^p g_{p\delta,*} R^q f_{p\delta,*} F \implies R^*(g^+)_{p\delta,*} F, \quad F \in X_{p\delta}^{\sim, ab},$$

が得られる. 又同様に spectral sequence

$$(II) \quad E_2^{p,q} = H^p(Y_{p\delta}, R^q f_{p\delta,*} F) \implies H^*(X_{p\delta}, F), \quad F \in X_{p\delta}^{\sim, ab}$$

が得られる.

次に Čech cohomology を定義しよう. 上と同様に $X_{p\delta}$ を例にとり, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\lambda \rightarrow X\}$ は X の open covering とする. この時, semi-simplicial complex

$$\prod_\lambda F'(\mathcal{U}_\lambda) \rightrightarrows \prod_{\lambda, \mu} F'(\mathcal{U}_\lambda \times_X \mathcal{U}_\mu) \rightrightarrows \prod_{\lambda, \mu, \nu} F'(\mathcal{U}_\lambda \times_X \mathcal{U}_\mu \times_X \mathcal{U}_\nu) \rightrightarrows \cdots$$

を考える. 但し F' は $X_{p\delta}$ の (Ab)-valued contravariant functor である.

この complex の q -th cohomology は $H^q(\mathcal{U}, F')$ と書く. $\check{H}^q(X_{p\delta}, F')$

$= \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)} H^q(\mathcal{U}, F')$ によって定義し, F' の q -th Čech cohomology と

呼ぶ. この時 Čech cohomology と ordinary cohomology の間には,

次の spectral sequence を得た,

$$(III) \quad E_2^{p,q} = \check{H}^p(X_{p,q}, \mathcal{H}^q(F)) \implies H^*(X_{p,q}, F)$$

但し $F \in X_{p,q}^{\sim, ab}$, $\mathcal{H}^q(F)$ は $X_{p,q} \subset \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{H}^q(F)(\mathcal{X}') = H^q(\mathcal{X}'_{p,q}, F)$

なる contravariant functor である, (cf. SGAA, V, 2.5). Spectral sequence (III) は spectral sequence

$$(III') \quad E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(F)) \implies H^*(X_{p,q}, F)$$

の inductive limit として得られる. (III') において, $\mathcal{U}$ は $\mathbb{A}^1$ の

morphism $Z \rightarrow X$ から成り, 更に Z は $X \subset \text{groupscheme } G$

の principal homogeneous space (i.e. $\exists G$ の action $\sigma: G \times Z \rightarrow Z$,

such that $(\sigma, \text{pr}_2): G \times Z \xrightarrow{\sim} Z \times_X Z$) であるならば, (III') は

次の spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(G_Z, \mathcal{H}^q(F)_Z) \implies H^*(X_{p,q}, F)$$

となる. 但し $H^p(G_Z, \mathcal{H}^q(F)_Z)$ は group functor G_Z の cohomology,

(cf. SGAD, I). 特に G は abstract finite group であるならば,

Hochschild-Serre の spectral sequence

$$(III'') \quad E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(Z_{p,q}, F)) \implies H^*(X_{p,q}, F)$$

を得る.

(III) から写像 $\pi^p: \check{H}^p(X_{p,q}, \mathcal{H}^0(F)) \longrightarrow H^p(X_{p,q}, F)$ を導かれ

るが, 定義自身により π^0 は, 又 $\pi^0 = \text{id}_{X_{p,q}}$ から π^0 は exact

functor であることに注意; $\pi^1 = 0$, 従って π^1 は isomorphism

となる. π^2 は π^1 のとき monomorphism となる.

又 $H^i(F) = 0$, $0 < i < n$ が成立するならば, $\mathbb{E}^p$ ($0 \leq p \leq n$) が isomorphism, $\mathbb{E}^{n+1}$ が monomorphism となるのは明らかである。

次に X 上の 2 つの sites の cohomologies と結合 spectral sequence を与えよう。例として, $X_{pe} \xrightarrow{p} X_{et}$ を取り上げよう。この時 p_* は X_{pe}^{ab} の acyclic object と X_{et}^{ab} の acyclic object に移す, (cf. SGAA, V, 3.3). $F \in X_{pe}^{ab}$ について $(p_* F)(X) = F(X)$ であるから, composite functor の spectral sequence は spectral sequence,

$$(IV) \quad E_2^{p,q} = H^p(X_{et}, R^q p_* F) \implies H^*(X_{pe}, F)$$

が得られる。1.3 に於いて X_{ps} , $X_{pe} \xrightarrow{p} X_{et}$ について述べた定義と結果は, X_{ps} , X_{pe} , X_{et} , X_{etf} , X_{zar} 及びこれらの可能な任意の pair について成立する事柄である。

1.4. Strict henselization と étale sheaf の geometric fibre について。

Henselian local ring 及び local ring の henselization, strict henselization については, EGA, IV, §18 に詳述されているので以下では, 後に必要な記述のみにとどめる。

1.4.1. A を local ring, $\mathfrak{m}$ をその maximal ideal とす。

(i) 先ず次の条件は同値である。

(1) A : henselian local ring, i.e. 任意の finite A -algebra

B is local components of product.

(v) $S = \text{Spec}(A)$, $S_0 = \text{Spec}(k)$, $k = A/\mathfrak{m}$ とする. 任意の étale morphism $g: S' \rightarrow S$ について, $S'_0 = S' \times_S S_0$ とする. この時,

$$\Gamma(S'/S) \xrightarrow{\sim} \Gamma(S'_0/S_0).$$

但し morphism $X \rightarrow Y$ について, $\Gamma(X/Y)$ は X の Y -sections 全体を表わす.

(vi) (Hensel's lemma). 任意の A -係数 1 変数 monic polynomial $F \in A[T]$ について, F_0 ($= F$ の image in $k[T]$) が $F_0 = G_0 \cdot H_0$, $G_0, H_0 \in k[T]$, $G_0 k[T] + H_0 k[T] = k[T]$ と分解されるならば, $\exists G, H \in A[T]$, $F = G \cdot H$, $GA[T] + HA[T] = A[T]$ と出来る.

(vii) 任意の locally of finite type な morphism $f: X \rightarrow S$ について, f から X の点 x で quasi-finite かつ $f(x) = S_0$ であるものは, $\mathcal{O}_{X,x}$ は finite A -algebra である.

(viii) $f: X \rightarrow S$ は smooth morphism とする. $X_{S_0} = f^{-1}(S_0)$ とする. 但し S, S_0 について (ii), (iv) に同じである. この時,

$$\Gamma(X/S) \longrightarrow \Gamma(X_{S_0}/S_0)$$

は surjective である.

(ix) local ring A について, A -algebra B がある étale A -algebra の prime ideal における localization である時, B は essentially étale A -algebra という. 特に $k(A) = k(B)$ が成立する時, B は strictly essentially étale A -algebra という. この時, strictly

essentially étale A -algebras B の集合 $\mathcal{G}$ が存在して, 任意の strictly essentially étale A -algebra は $\mathcal{G}$ の $\mathbb{1}$ 上に A -同型であるように出来る. この時次の結果が成立する.

A_1, A_2 を strictly essentially étale A -algebras とする.

(1) $A_1 \xrightarrow{u} A_2$ なる local A -morphism は高々 $\mathbb{1}$ 上の A -同型である.

(2) strictly essentially étale A -algebra A_3 及び local A -morphisms $u_i: A_i \rightarrow A_3$ ($i=1, 2$) が存在して,

$$\begin{array}{ccccc} & & A_1 & \xrightarrow{u_1} & A_3 \\ & \nearrow & & & \\ A & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & A_2 & \xrightarrow{u_2} & A_3 \end{array}$$

と可換にするこゝが出来た.

この結果により $\mathcal{G} = \{A_\lambda\}$ は filtered inductive system となる. この時, $\hat{A} = \varinjlim_{\mathcal{G}} A_\lambda$ を A の henselization といい, $\hat{A}$ は次の性質を満たす.

a) $\hat{A}$ は henselian local ring である.

b) 自然な local morphism $A \rightarrow \hat{A}$ により, $\hat{A}$ は faithfully flat A -module, 又 $\mathfrak{m}_{\hat{A}} \hat{A}$ は $\hat{A}$ の maximal ideal である.

c) $\hat{A} = \varinjlim_n A/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} \hat{A} = \varinjlim_n \hat{A}/\mathfrak{m}^n \hat{A}$.

d) $\hat{A}$: Noetherian $\iff A$: Noetherian.

e) 更に $\hat{A}$ は functor: (local henselian rings の category) $\ni B \mapsto \text{loc Hom}(A, B) \in (\text{Sets}, \ni \text{represent } f \text{ is } f \text{ の } \mathbb{1} \text{ 上での } f \text{ の } \text{image})$ である.

(f) A は henselian であれば, $kA \cong A$.

1.4.2. A, m, k は (1.4.1) の通りとする.

(i) 先ず次の条件は同値である.

(1) A : henselian で, k は separably closed.

(2) A : henselian で, 任意の étale covering $f: X \rightarrow S$

(i.e. étale finite morphism) は trivial (i.e. section をもつ).

(1) 任意の étale morphism $f: X \rightarrow S$ 及び任意の点 $x \in f^{-1}(s_0)$

について, S -section u で $u(s_0) = x$ となるものがある.

この同値な条件を満たす時, A は strict local ring 又は strict henselian ring という.

(ii) Ω と k のある separable algebraic closure とする. この時

essentially étale A -algebra B で local A -morphism $A' \xrightarrow{\lambda} \Omega$

をもつもの (A', λ) の集合 Θ' で, 任意の上記の性質をもつ

essentially étale A -algebra (B, μ) は Θ' の 1 つに同型

i.e. $A \xrightarrow{\lambda} \Omega$: 可換, となるものが存在する. Θ' は次の結

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda} & \Omega \\ \downarrow \text{S} & \nearrow \mu & \\ B & & \end{array}$$

果により filtered inductive system となる.

(1) A_1, A_2 は essentially étale A -algebras とする. 任意の

k -morphism $k(A_1) \xrightarrow{\gamma} k(A_2)$ について, 高々 1 つの A -morphism

$\psi: A_1 \rightarrow A_2$ が存在して, $\overline{\psi} = \gamma$, 但し $\overline{\psi} = \psi \otimes_A k$.

(2) $(A_1, \beta_1), (A_2, \beta_2)$ について, essentially étale A -algebra

A_3 及 A -morphism $\beta_3: A_3 \rightarrow \Omega$, $\varphi_i: A_i \rightarrow A_3$, $i=1,2$ が存在して, $\beta_1 = \beta_3 \circ \varphi_1$, $\beta_2 = \beta_3 \circ \varphi_2$ と満たす.

$\mathcal{G}' = \{(A_\lambda, M_\lambda)\}$ について, $k^s A = \varinjlim_{\mathcal{G}'} A_\lambda$ は A の strict henselization と呼ぶ. この時 $k^s A$ は local ring であり, $m^{k^s A}$ は $k^s A$ の maximal ideal, $k = k(k^s A) = \varinjlim_{\mathcal{G}'} k(A_\lambda) \xrightarrow{\omega} \Omega$ (k -同型). 一般に $k^s A$ は injection $i: k \rightarrow \Omega$ に依存するから, $k^s A_{(i)}$ と書く. $k^s A$ は次の性質をもつ.

- (a) $k^s A$ は strict local ring.
- (b) 自然な morphism $A \rightarrow k^s A$ により, $k^s A$ は faithfully flat A -module.
- (c) $k^s A$: Noetherian $\iff A$: Noetherian.
- (d) B は strict local ring, $u: A \rightarrow B$ は local homomorphism $v: \Omega \rightarrow k(B)$ は k -homomorphism として, A -morphism $k^s A \xrightarrow{\psi} B$ と $v = (\Omega \xrightarrow{\omega^{-1}} k(k^s A) \xrightarrow{\bar{\psi}} k(B))$ となるものが唯一存在する. 特に $i: k \rightarrow \Omega'$ が k のある separable algebraic closure を与える時, k -同型 $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega'$ について, $\psi_\sigma: k^s A_{(i)} \xrightarrow{\sim} k^s A'_{(i)}$ が唯一通り存在する. これより明らかに, $\text{Aut}_A(k^s A) \cong \text{Aut}_k(\Omega) = \text{Gal}(\Omega/k)$.

1.4.3 A, m, k は (1.4.1) に同じとする. 先ず次の結果が成立する.

- (1) A : reduced (resp. normal, regular) $\iff k_A$: reduced (resp.

normal, regular) $\iff k^s A$: reduced (resp. normal, regular).

(iv) $\text{Spec}(k^s A)$: irreducible $\iff A$: unibranch (i.e. A_{red} : integral $\hookrightarrow A_{\text{red}}$ integral closure $\tilde{A}_{\text{red}}$ local ring).

(v) $\text{Spec}(k^s A)$: irreducible $\iff A$: geometrically unibranch (i.e. A : unibranch $\hookrightarrow k(\tilde{A}_{\text{red}}) \leftarrow k(A_{\text{red}})$ purely inseparable).

次に étale sheaf の geometric fibre について一言しよう。先ず k を体とし, $X = \text{Spec}(k)$ について, $X_{\text{ét}}, X_{\text{ét}}^{\sim}, X_{\text{ét}}^{\sim, ab}$ を考へる。 k^s は k の separable closure, $\pi = \text{Gal}(k^s/k)$ (profinite group) とする。 $i: X_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{ét}}^{\sim}$, $j: X_{\text{ét}}^{\sim} \longrightarrow (\text{left } \pi\text{-sets})$

と $i(X')(X'') = \text{Hom}_X(X'', X')$, $j(F) = \varinjlim_{\substack{k_2 \subset k^s \\ k_2/k: \text{finite}}} F(\text{Spec}(k_2))$ で定義する。

但し left π -set で, π が左より連続に作用する集合を表わす。この時, よく知られた議論により $j \circ i$ は 2 つの categories の equivalence と与えさる。 (left π -set E に対して, $E = \coprod_{\lambda} E_{\lambda}$, $E_{\lambda} = \pi e_{\lambda}$: π -orbit に分解する。 $\pi_{\lambda} = \text{Stabilizer of } e_{\lambda}$ は π の open subgroup. 今 $X' = \coprod_{\lambda} \text{Spec}(k^s)^{\pi_{\lambda}}$ とすると, $X' \longrightarrow X$ は明らかに étale surjective で $j i(X') \cong E$.) 従って i は fully faithful. 又任意の $F \in X_{\text{ét}}^{\sim}$ について, $i \cdot (j \cdot i)^{-1} j(F)$ が F と同型であることを見るのは困難ではない。従って i, j 共に category の equivalence と与えさる。特に j により, $X_{\text{ét}}^{\sim, ab}$ は π -modules の category (left π -modules) と同値になる。従って,

$F \in X_{\text{ét}}^{\sim, \text{ab}}$ について

$$H^*(X_{\text{ét}}, F) \cong H^*(\pi, j_*(F))$$

となる。但し $H^*(\pi, j_*(F))$ は profinite group π の Galois cohomology.

$k = k_0$ であれば, $X_{\text{ét}}^{\sim} \cong (\text{Sets})$, $X_{\text{ét}}^{\sim, \text{ab}} \cong (\text{Ab})$, $H^p(X_{\text{ét}}, F) = 0$ $\forall p > 0$, $F \in X_{\text{ét}}^{\sim, \text{ab}}$ 等は明らかである。

今 X は prescheme, $x \in X$ とする。 $\overline{k(x)}$ で $k(x)$ のある separable closure, $\bar{x}$ で X の geometric point $\bar{x} = \text{Spec}(\overline{k(x)}) \xrightarrow{i_{\bar{x}}} X$ ($k(x) \xrightarrow{i} \overline{k(x)}$ により定まる自然な morphism) と表わす。 $i_{\bar{x}}$ により, $i_{\bar{x}}^*: X_{\text{ét}}^{\sim} \longrightarrow (\bar{x})_{\text{ét}}^{\sim} \xrightarrow{\sim} (\text{Sets})$ が得られる。 $F \in X_{\text{ét}}^{\sim}$ について, $\Gamma_{\bar{x}} i_{\bar{x}}^*(F) = F_{\bar{x}}$ と書いて, étale sheaf F の $\bar{x}$ に於ける geometric fibre と呼ぶ。 $i_{\bar{x}}$ から $i_{\bar{x}}: \bar{x} \longrightarrow X = \text{Spec}(k(x)) \xrightarrow{i_x} X$ と分解される事に注意すれば, $F_{\bar{x}}$ は $i_x^* F$ と知る事と同じである。 従って $\pi_x = \text{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$ として, $F_{\bar{x}}$ は π_x -set である。 ($i_{\bar{x}}': \bar{x}' \longrightarrow X$ から $x \in \text{image}$ に $\bar{x}$ ともう一つの geometric point であれば, $k(x)$ -morphism $\bar{x} \xrightarrow{u} \bar{x}'$ が存在して, $\bar{x} \xrightarrow{\sim} \bar{x}':$ 可換, と出来る。 従って, $F_{\bar{x}} \xrightarrow{u'} F_{\bar{x}'}$.)

この u' は u に functorially 依存する。) $F_{\bar{x}}$ は $i_{\bar{x}}^*$ の定義により, $F_{\bar{x}} = \varinjlim_{X' \in \bar{C}_{\bar{x}}} F(X')$ と表わされる。 但し $\bar{C}_{\bar{x}}$

は $\bar{x}$ -pointed X -étale prescheme (X', i') $\left(\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ i' \swarrow & & \nearrow i_{\bar{x}} \end{array} : \text{可換} \right)$

の作る category. $F \in X_{\text{ét}}^{\sim} \longmapsto F_{\bar{x}} \in (\text{Sets})$ は inductive limit
 と finite fibre product と可換である. 又 $F \in X_{\text{ét}}^{\sim} \longmapsto$
 $\{F_{\bar{x}}\}_{\bar{x} \in X} \in (\text{Sets})$ は conservative である, i.e. 任意の morphism
 $\alpha: F \rightarrow G \in X_{\text{ét}}^{\sim}$ に対して,

$$\alpha: \text{isomorphism} \iff \forall x \in X \text{ に対して, } \alpha_{\bar{x}}: F_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} G_{\bar{x}} \\ \text{isomorphism}$$

今 $W(\mathcal{O}_X)$ (i.e. $W(\mathcal{O}_X)(X') = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$, $W(\mathcal{O}_X) \in X_{\text{ét}}^{\sim, ab}$) に対して,
 $W(\mathcal{O}_X)_{\bar{x}}$ を考えよう. $W(\mathcal{O}_X)_{\bar{x}} = \varinjlim_{X' \in \mathcal{C}_{\bar{x}}^{\circ}} W(\mathcal{O}_X)(X') = \varinjlim_{X' \in \mathcal{C}_{\bar{x}}^{\circ}} \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$
 $= \varinjlim_{X' \in \mathcal{C}_{\bar{x}}^{\circ}} \mathcal{O}_{X', x'} \cong \mathcal{O}_{X, x} (\cong \mathcal{O}_{\bar{X}, \bar{x}} \text{ とおくと}).$
 ($x': X'$ の中での $\bar{x}$ の image)
 $\bar{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{X}, \bar{x}})$, $j_{\bar{x}}: \bar{X} \rightarrow X$, $\bar{F} = j_{\bar{x}}^*(F)$ とすると, $\bar{x}$
 は $\bar{X}$ の geometric point と考えられるから, (1.4.2) (i), (ii) により
 $\bar{F}_{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}) = \varinjlim_{X' \in \mathcal{C}_{\bar{x}}^{\circ}} F(X') = F_{\bar{x}}$, 即ち, $F_{\bar{x}} = \Gamma(\bar{X}, \bar{F})$ が得られる.

次に $f: X \rightarrow Y$ は preschemes の morphism とし, F は X 上の
 groups の sheaf (resp. abelian sheaf) とする. 更に f が quasi-
 compact かつ quasi-separated と仮定する. Y の点 y に対して,
 y 上の geometric point $\bar{y}$, $\bar{Y} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{Y}, \bar{y}})$ と strict local scheme
 とし, $\bar{X} = X \times_Y \bar{Y}$, $\bar{F} = F_{\bar{X}} \bar{X}$ とおく. この時, 次の事柄が
 証明される.

$$R^i f_{\text{ét}*}(F)_{\bar{y}} \cong H^i(\bar{X}, \bar{F}) \quad , \quad i = 0, 1.$$

(resp. $R^p f_{et,*}(F)_{\bar{y}} \cong H^p(\bar{X}, \bar{F})$, $\forall p \geq 0$).

[証明] $R^p f_{et,*}(F)$ は Y 上の presheaf $Y' \mapsto H^p(X_{\bar{y}} Y', F)$ の associated sheaf として得られること, 及び任意の presheaf P について, $(\alpha P)_{\bar{y}} = \varinjlim_{Y' \in C_{\bar{y}}^o} P(Y')$ として得られることから,

$$R^p f_{et,*}(F)_{\bar{y}} = \varinjlim_{Y' \in C_{\bar{y}}^o} H^p(X_{\bar{y}} Y', F) \stackrel{(*)}{=} H^p(\varinjlim (X_{\bar{y}} Y'), F) = H^p(\bar{X}, \bar{F}).$$

但し等式(*)は f が quasi-compact, quasi-separated である事より従う。

J. Giraud の Gerbe 及び Lien の紹介は, 別の機会に譲って, 省略させていただきます。

Appendix.

ここで, S. Lubkin, A p -adic proof of Weil's conjectures, Ann. of Maths., (196), pp. 105-254, で定義された, combinatorial cohomology の多くの場合, 我々の Grothendieck cohomology に等しくなることを注意しよう。

X を quasi-compact, quasi-separated な prescheme として, 例之は, X_{pe} について考える。勿論, 他 site でもかまわない。 X_{pe} の open sets の集合 $\mathcal{U}$ が X の finite covering であるとは, 次の条件を満たす時にいう:

- 1) $\forall x \in X$ について, $E \ni x$ なる $E \in \mathcal{U}$ は有限個しかない。

$$2) \quad E, E' \in \mathcal{U}, \quad x \in E, E' \implies \exists E'' \in \mathcal{U}, \quad x \in E'', E'' \subset E \cap E'.$$

$$3) \quad X = \bigcup_{E \in \mathcal{U}} E.$$

4) $\mathcal{U}$ の任意の open set E は E に含まれる E_λ ($\in \mathcal{U}$) の和集合として書けない。

この $\mathcal{U}$ に対して, simplicial complex $S(X, \mathcal{U})$ と, $\mathcal{U}$ の元 E を vertices, $\mathcal{U}$ の元の列 $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n$ を n -simplices として定義する。 F から X_{pe}^{ab} の元である時, cochain complex $C(X, \mathcal{U}, F)$ と

$$C^n(X, \mathcal{U}, F) = \prod_{\sigma \in S^n(X, \mathcal{U})} F(E_\sigma), \quad \text{但し } \sigma = (E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n)$$

$$d^n: C^n(X, \mathcal{U}, F) \longrightarrow C^{n+1}(X, \mathcal{U}, F)$$

$$(d^n f)(E_0, E_1, \dots, E_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (f(E_0, E_1, \dots, \overset{\vee}{E_i}, E_{i+1}, \dots, E_{n+1}) | E_0)$$

を定義する。この n -th cohomology は $H^n(X, \mathcal{U}, F)$ とする。

$\{H^n(X, \mathcal{U}, F)\}_{n \geq 0}$ は $H^0(X, \mathcal{U}, F) = F(X)$ の $\underbrace{\text{right}}_{\text{derived functors}}$

をなす。 $H_c^n(X, F) = \varinjlim_{\mathcal{U}: \text{ordered by refinements}} H^n(X, \mathcal{U}, F)$ は又 $H_c^0(X, F) = F(X)$

の right derived functors をなす。従って $H_c^n(X, F) \cong H^n(X_{pe}, F)$ 。

§ 2. group prescheme 係数の各 cohomologies
の比較.

(2.1). X を prescheme とし, 常に sites X_{pt} , X_{pe} , X_{et} , X_{etf} , X_{zar} と考える. C, C' をその 2 つとし, sites の morphism $f: C \rightarrow C'$ が存在するとする. 先ず,

Lemma 2.1.1. G を C 上の abelian sheaf とする時, 次の条件は同値である.

(i) $R^i f_* G = 0$, $1 \leq i \leq n$.

(ii) $\forall X' \in \text{Cat}(C')$ について, 自然な準同型,

$$H^i(X', f_* G) \longrightarrow H^i(f^{-1}(X'), G)$$

は $1 \leq i \leq n$ について同型, $i = n+1$ について monomorphism.

(iii) 特に $C' = X_{\text{et}}$ の時, $\bar{X}$ を X の任意の strict local scheme とすれば, $H^i(f^{-1}(\bar{X}), G) = 0$, $1 \leq i \leq n$.

(iv) 特に $C' = X_{\text{zar}}$ の時, $\mathfrak{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x})$ を任意の local scheme とすれば, $H^i(f^{-1}(\mathfrak{X}), G) = 0$, $1 \leq i \leq n$.

[証明] $X' \xrightarrow{g} X$ について, $f': C/X' \rightarrow C'/X'$ とすれば,

$$R^i f_* G = 0, 1 \leq i \leq n \iff \forall X' \in \text{Cat}(C') \text{ について,}$$

$$R^i f'_* G = 0, 1 \leq i \leq n$$

であるから, (i) $\Rightarrow$ (ii) は spectral sequence (IV) より明らか.

(ii) $\Rightarrow$ (i) は, $H^1(X', f_* G) \cong H^1(f^{-1}(X'), G)$, $H^2(X', f_* G) \hookrightarrow H^2(f^{-1}(X'), G)$

より, $H^0(X', R^i f_* G) = 0$. X' は $\text{Cat}(C')$ で任意でよいから,
 $R^i f_* G = 0$. 従って Spectral sequence (IV) より, 簡単な計算に

$$0 \rightarrow E_\infty^{0,2} \rightarrow E_2^{0,2} \rightarrow E_2^{3,0} \rightarrow E_\infty^{3,0} \rightarrow 0$$

$\downarrow$
 $H^3(f^{-1}(X'), G)$

... exact である. $\check{H}^2(X', f_* G) \cong H^2(f^{-1}(X'), G)$ より, $E_2^{0,2} = 0$.

従って, $R^2 f_* G = 0$. 今 $R^j f_* G = 0$, $1 \leq j \leq n-1$... 今から見て, 同様に (IV) より,

$$0 \rightarrow E_\infty^{0,n} \rightarrow E_2^{0,n} \rightarrow E_2^{n+1,0} \rightarrow E_\infty^{n+1,0} \rightarrow 0$$

$\downarrow$
 $H^{n+1}(f^{-1}(X'), G)$

... exact である. $H^n(X', f_* G) \cong H^n(f^{-1}(X'), G)$ と上の sequence より, $E_2^{0,n} = 0$. 従って $R^n f_* G = 0$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) は $R^i f_* G = 0$, $1 \leq i \leq n \Leftrightarrow$ 任意の strict local scheme

$\bar{X}$ について, $(R^i f_* G)_{\bar{X}} \cong H^i(f^{-1}(\bar{X}), \bar{G}) = 0$, $1 \leq i \leq n$ より明らか.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) も 任意の X の local scheme $\mathfrak{X}$ について, $(R^i f_* G)_{\mathfrak{X}} \cong H^i(f^{-1}(\mathfrak{X}), G)$ より明らか. q. e. d.

Lemma 2.1.2. C : site, $G \in C^{v, ab}$ について,

次の条件は同値である.

(i) $\forall X' \in \text{Cat}(C)$ について, $H^i(X', G) = 0$, $1 \leq i \leq n$.

(ii) $\forall X' \in \text{Cat}(C)$ 及び $\forall \mathcal{U} \in \text{Cov}(C/X')$ について,

$$H^i(\mathcal{U}, G|_{X'}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

[証明] Spectral sequence (III) に於いて, (i) なら (ii); $\mathcal{H}^i(G|_{X'})$

13:

$$= 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{だから,} \quad E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(G/X')) = 0, \quad 1 \leq q \leq n.$$

$$\text{従って,} \quad H^i(\mathcal{U}, G/X') \cong H^i(X', G) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad \text{i.e. (i)} \Rightarrow \text{(ii)}.$$

$$\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)} \text{ については, 先ず, } H^i(X', G) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(X')} H^i(\mathcal{U}, G/X') = 0$$

より $H^i(G) = 0$. 従って spectral sequence (III') より,

$$H^i(X', G) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(X')} H^i(\mathcal{U}, G/X') = 0. \quad \text{以下同様にして, } H^i(X', G)$$

$$= 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

i.e.d.

Lemma 2.1.3. X_0 は X 上の prescheme とし, $Y \rightarrow X$ は

ついて, Y_0 で $Y \times_X X_0$ と表わす. Site $\mathcal{C}$, $G \in \mathcal{C}^{ab}$ 及び

$\mathcal{U} = \{X_\alpha \rightarrow X\}$ について次の仮定を置く.

$$(L) \begin{cases} \mathcal{U} \text{ の members の 任意の fibre product } X_{\alpha_1} \times_X X_{\alpha_2} \times_X \cdots \times_X X_{\alpha_j} \\ \text{について, } G(X_{\alpha_1} \times_X X_{\alpha_2} \times_X \cdots \times_X X_{\alpha_j}) \longrightarrow G(X_{\alpha_1,0} \times_{X_0} X_{\alpha_2,0} \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_{\alpha_j,0}) \\ \text{は surjective である.} \end{cases}$$

この時, 次の条件は同値である.

$$(i) \quad H^i(\mathcal{U}, G) \longrightarrow H^i(\mathcal{U}_0, G_0) \quad \text{for } 1 \leq i \leq n \text{ について同型,}$$

$i = n+1$ について monomorphism.

$$(ii) \quad N = \text{Ker}(G(Z) \longrightarrow G_0(Z_0)) \text{ とし, } H^i(\mathcal{U}, N) = 0, \quad 1 \leq i \leq n+1$$

[証明] N の定義より,

$$0 \longrightarrow C^*(\mathcal{U}, N) \longrightarrow C^*(\mathcal{U}, G) \longrightarrow C^*(\mathcal{U}_0, G_0) \longrightarrow 0$$

は semi-simplicial complexes の exact sequence. 従って long

$$\text{exact sequence} \quad \cdots \longrightarrow H^i(\mathcal{U}, N) \longrightarrow H^i(\mathcal{U}, G) \longrightarrow H^i(\mathcal{U}_0, G_0) \longrightarrow$$

$$H^{i+1}(\mathcal{U}, N) \longrightarrow \cdots \text{ が存在する. この時, (i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \text{ は明らか. } \quad \text{i.e.d.}$$

Lemma 2.1.4. A is algebra, $A' \in A$ -faithfully flat algebra, $M \in A$ -module ≥ 3 . $S = \text{Spec}(A')$, $S = \text{Spec}(A)$, $M = M^\vee$, $W(M) \in (\text{Sch}/S)^\circ \longrightarrow (\text{Ab})$ ($W(M)(X') = \Gamma(X', M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{X'})$) ≥ 3 ≥ 2 , $W(M) \in S_{p_0}^{\sim, \text{ab}}$ (i.e. $\in$), $H^i(S/S, W(M)) = 0$, $\forall i > 0$.

〔証明〕 $H^i(S'/S, W(M)) = 0$, $i > 0$ は次の事柄に等しい:

$$\left\{ \begin{array}{l} C^i = \left(\begin{smallmatrix} i+1 \\ \otimes \\ A \end{smallmatrix} A' \right) \otimes_A M, \quad C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \quad \varepsilon \quad d^i(a_0 \otimes \dots \otimes a_i \otimes m) \\ = \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j a_0 \otimes \dots \otimes a_{j-1} \otimes 1 \otimes a_j \otimes \dots \otimes a_i \otimes m \quad \text{in } C^{i+1} \\ \varepsilon, \quad \text{augmented complex} \\ C^\bullet: M \xrightarrow{\varepsilon} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \rightarrow \dots \rightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \rightarrow \dots \\ \text{is exact in } \mathcal{A}. \end{array} \right.$$

今 A' は A -faithfully flat であることより, C' の代りに $A' \otimes_A C'$ に取り替えて証明してもよい. 即ち, $A \rightarrow A'$ は section s :

$A' \rightarrow A$ と持つとしてよい。この時 $f^i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m) = \Delta(a_0) a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m$ で $f^i: C^i \rightarrow C^{i-1}$ と定義すると,

$$\begin{aligned} d^i \left(\sum_j a_{j_0} \otimes \dots \otimes a_{j_i} \otimes m_j \right) &= 0 \iff \sum_j 1 \otimes a_{j_0} \otimes \dots \otimes a_{j_i} \otimes m_j + \\ &\quad \sum_j \sum_{k=1}^i (-1)^k a_{j_0} \otimes \dots \otimes a_{j_k} \otimes 1 \otimes \dots \otimes a_{j_i} \otimes m_j = 0 \\ \iff \sum_j a_{j_0} \otimes \dots \otimes a_{j_i} \otimes m_j &= \sum_j \sum_{k=0}^i (-1)^k s(a_{j_0}) a_{j_1} \otimes \dots \otimes a_{j_k} \otimes 1 \otimes \dots \otimes a_{j_i} \otimes m_j \\ &= d^{i-1} \left(\sum_j s(a_{j_0}) a_{j_1} \otimes \dots \otimes a_{j_i} \otimes m_j \right). \end{aligned}$$

g. e. d.

(2.2). X is prescheme, $\mathcal{F} \in X$ is a quasi-coherent Module on $\mathcal{O}_X$.
 $\mathcal{F}$ is. $W(\mathcal{F})$ is Lemma 2.1.4 is the following: $(\text{Sch}/X)^0 \ni X' \xrightarrow{w}$

$W(\mathcal{F})(X') = \Gamma(X', \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'}) \in (Ab)$ により定義する。この時 fpqc-morphism の quasi-coherent Modules について descent morphism であることにより (cf. SGA, VIII, Th. 1.1), $W(\mathcal{F}) \in X_{pg}^{\sim, ab}, \dots, X_{zar}^{\sim, ab}$. この時, 次の結果が成立する:

Proposition 2.2.1. $X, \mathcal{F}, W(\mathcal{F})$ と上記の通りとして,
 $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X_{zar}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{\text{ét}}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{\text{ét}}, W(\mathcal{F})) \cong$
 $H^i(X_{pe}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{pg}, W(\mathcal{F})), \quad \forall i \geq 0.$

[証明] 例えは $H^i(X_{zar}, W(\mathcal{F})) \cong H^i(X_{pg}, W(\mathcal{F})) \quad \forall i \geq 0$ と見よう。 $i > 0$ として, Lemma 2.1.1 により, X : affine scheme として, $H^i(X_{pg}, W(\mathcal{F})) = 0, \quad \forall i > 0$ と見ればよい。これは, Lemma 2.1.2 及び X : quasi-compact であることにより, X 上 fpqc な affine scheme $X' \rightarrow X$ について, $H^i(X'/X, W(\mathcal{F})) = 0, \quad \forall i > 0$ と見ればよい。このことは Lemma 2.1.4 そのものである。
 y. e. d.

Corollary 2.2.2. 特に $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ として, 次の結果を得る。
 $H^i(X, \mathcal{O}_X) \cong H^i(X_{zar}, G_a) \cong H^i(X_{\text{ét}}, G_a) \cong H^i(X_{\text{ét}}, G_a) \cong H^i(X_{pe}, G_a)$
 $\cong H^i(X_{pg}, G_a), \quad \forall i \geq 0.$

Remark 2.2.3. $\mathcal{F}$ が locally free $\mathcal{O}_X$ -Module of finite rank であるならば, $W(\mathcal{F})$ は smooth な group prescheme であるが, それ以外であるならば, 必ずしも smooth であるとは限らない。

(2.3). 次に X_{pe} の上で考えるのであるが, $\text{Cov}(X_{pe})$ の 2)

の集合と 2') $\{V_i \xrightarrow{f_i} U\}$, f_i : flat, of finite presentation
 から quasi-finite な morphism f_i の有限集合で $\bigcup f_i(V_i) = U$
 を満たすもので置きかえてもよい。実際、これは EGA^{IV} (8.5.5),
 (8.10.5), (14.5.10) よりとる。

又 X が henselian semi-local scheme であるとき、 X は local
 components の直和となること、及び 1.4.1, (c) によって、次
 の結果を得る。

Lemma 2.3.1. X は henselian semi-local scheme とする。

この時、次の集合は $\text{Cov}(X_{pe})$ の中で cofinal である:

$$\left\{ \begin{array}{l} X' \xrightarrow{f} X : \text{finite, locally free, i.e. } f_*(\mathcal{O}_{X'}) \text{ は} \\ \text{flat } \mathcal{O}_X\text{-Module of finite rank.} \end{array} \right\}$$

次に X は prescheme, G は X 上の quasi-projective, smooth な
 commutative group prescheme とする。この時、 $H^i(X_{\text{ét}}, G_{\text{ét}}) \xrightarrow{\sim}$
 $H^i(X_{pe}, G_{pe})$, $\forall i \geq 0$ が成立することを見よう。Lemmata 2.1.1,
 2.1.2, 2.3.1 により、 X は strictly local scheme, $X' \xrightarrow{f} X$ が
 finite, locally free の時、 $H^i(X'/X, G) = 0$, $\forall i > 0$ を証明すればよい。
 $X_0 \in X$ の closed point, $X'_0 = X'_X \times_X X_0$, $X'^d = \underbrace{X'_X \times_X X'_X \times_X \cdots \times_X X'_X}_d$,
 $X'^d_0 = X'^d \times_X X_0$ とおく。 X'^d は X 上 finite であるから、 d
 strict local schemes の直和で、その components は X'^d_0 の各点に
 対応する。(1.4.1), (ii) により、 $G(X'^d) \longrightarrow G(X'^d_0)$ は
 surjective である。即ち Lemma 2.1.3 の条件 (L) を満たす。

この時, 次の結果を示そう.

Lemma 2.3.2. (i) X は henselian local scheme, G は X 上の quasi-projective, smooth な commutative group prescheme, $X' \rightarrow X$ は finite, locally free surjective morphism とする. X'_0 等の記号は上記に従って,

$$H^i(X'/X, G) \xrightarrow{\sim} H^i(X'_0/X_0, G_0), \quad \forall i > 0$$

が成立する.

(ii) 更に X が strictly local であるならば

$$H^i(X'/X, G) = 0 \quad \forall i > 0$$

が成立する.

[証明] (i) (Sch/X) 上の functor $\underline{C}^i(G)$ は $\underline{Hom}_X((X'/X)^{i+1}, G)$ と, $d^i: \underline{C}^i(G) \rightarrow \underline{C}^{i+1}(G)$ は自然に定義する. 又 $\underline{Z}^i(G) = \ker(d^i)$ とおく. 明らかに, $Y \rightarrow X$ に対して, $\underline{C}^i(G)(Y) = C^i(Y'/Y, G) = G((Y'/Y)^{i+1})$, $\underline{Z}^i(G)(Y) = Z^i(Y'/Y, G)$ である. 今 $\underline{C}^i(G)$ が X 上 smooth な group prescheme として represent されることを示そう. $X'' \rightarrow X$ は $X' \rightarrow X$ を split する (i.e. $X'_X \times X'' \cong \coprod X''$) finite, locally free surjective morphism とする. (その存在は X が henselian local であることより容易にたす). この時, $\underline{Hom}_X((X'/X)^{i+1}, G) \times_X X'' \cong \underline{Hom}_{X''}((X'_X \times X''/X'')^{i+1}, G_{X''}) \cong \coprod G_{X''}$ であるから representable. (さきに G は X 上 quasi-projective であるから, SGA, VIII, (7.6) により $\underline{Hom}_X((X'/X)^{i+1}, G)$ は representable. 又 G が smooth である

から, formal smoothness の判定条件より $\underline{\text{Hom}}_X((X'/X)^{i+1}, G)$ は smooth であることがわかる. 定義により $\underline{Z}^i(G)$ は representable である.

次に $d^{i-1}: \underline{C}^{i-1}(G) \rightarrow \underline{Z}^i(G)$ は preschemes の smooth な morphism であることを示そう. そのために, $Y \rightarrow X$, (Y : affine) $Y_0 = Y/J$ ($J^2=0$), $z^i \in \underline{Z}^i(G)(Y)$, $c_0^{i-1} \in \underline{C}^{i-1}(G)(Y_0)$ ($d_0^{i-1}(c_0^{i-1}) = z_0^i$, z_0^i は z^i の $\underline{Z}^i(G)(Y_0)$ での image) について, $c^{i-1} \in \underline{C}^{i-1}(G)(Y)$ で $d^{i-1}(c^{i-1}) = z^i$ なるものがみつけられる:

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow c_0^{i-1} & \nearrow c^{i-1} & \downarrow z^i \\ \underline{C}^{i-1}(G) & \xrightarrow{d^{i-1}} & \underline{Z}^i(G) \end{array}$$

しかるに $G((Y'/Y)^i) \rightarrow G((Y'_0/Y_0)^i)$ は surjective であるから, $c^{i-1} \rightarrow c_0^{i-1}$ なる $c^{i-1} \in G((Y'/Y)^i)$ にとれば, $u^i = d^{i-1}(c^{i-1}) - z^i$ について $u_0^i = 0$. z^i と u^i で置き代えて, $v^i \in G((Y'/Y)^i)$ で $v_0^i = 0$, $d^{i-1}v^i = u^i$ なるものがとみつけられる. 2.1.3 の $x_k < N$

を定義して, $H^i(Y'/Y, N) = 0$ $\forall i > 0$ と言えはよい. しかるに

$N(Z) = H^0(Z, g^*(\text{Lie}(G_{Y/X_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} J))$, $g: Z \rightarrow Y$ であるから, $N = H^0(\text{Lie}(G_{Y/X_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} J)$. $\text{Lie}(G_{Y/X_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} J$ は $\mathcal{O}_Y$ -quasi-coherent Module であるから, 求める結論は 2.1.4 よりよい.

題意を証明するためには, N' と $X_0 \rightarrow X$ に対して, 2.1.3 の如く定義し, $H^i(X'/X, N) = 0$, $\forall i > 0$ を証明すればよい.

即ち $z^i \in Z^i(X'/X, N)$ によって $c^{i-1} \in \underline{C}^{i-1}(G)(X)$ で $c_0^{i-1} = 0$ ($\underline{C}^{i-1}(G)(X_0)$ で), $d^{i-1}(c^{i-1}) = z^i$ と満たすものを探せばよい.
 $z^i \in \underline{Z}^i(G)(X)$ であるから, $(\underline{C}^{i-1}(G), d^{i-1}) \times_{\underline{Z}^i(G)} (X, z^i)$ は, 既に証明されたことより, X 上 smooth な prescheme である. 又 $\underline{C}^{i-1}(G)$ は X 上の group prescheme であるから, $X_0 \xrightarrow{u_0} \underline{C}^{i-1}(G)$ とその unit section があるものとする. $(u_0, X_0 \xrightarrow{i} X)$ は X_0 から $(\underline{C}^{i-1}(G), d^{i-1}) \times_{\underline{Z}^i(G)} (X, z^i)$ への morphism を与える. X は henselian, local であるから, (1.4.1), (iii) により X から $\underline{C}^{i-1}(G) \times_{\underline{Z}^i(G)} X$ への morphism $\overset{C^{i-1}}{\vee}$ がある. これは上記の条件を満たす.

(ii) (i) より $H^i(X'/X, G) \cong H^i(X'/X_0, G_0)$, $\forall i > 0$. しかるに $X_0 = \text{Spec}(k)$, k : separably closed. $H^i(X'/X_0, G_0) = 0$, $\forall i > 0$ と言うためには, $\underline{C}^{i-1}(G)(k) \xrightarrow{d^{i-1}} \underline{Z}^i(G)(k)$: surjective, $\forall i > 0$ と言えはよい. d^{i-1} は smooth であるから, その為には, k : alg. closed と仮定してもよい. この時, X'_0 は X_0 -section となる. この時, (2.1.4) に於ける議論により, $H^i(X'_0/X_0, G_0) = 0$, $\forall i > 0$.
 f.e.d.

今迄の事柄をまとめると, 次の結果を得る.

Theorem 2.3.3. (i) X は prescheme, G は X 上 quasi-projective smooth な commutative group scheme とする. この時,

$$H^i(X_{\text{ét}}, G_{\text{ét}}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\text{pc}}, G_{\text{pc}}), \quad \forall i \geq 0.$$

(ii) X は local henselian prescheme とし, G は X 上 algebraically closed とする.

$$H^i(X, G) \cong H^i(X_0, G_0), \quad \forall i \geq 0.$$

ここで, topology は X_{pe} , X_{et} のどちらでもよい.

[証明] (i) は証明済. (ii) $i: X_0 \rightarrow X$ は canonical closed immersion とすると, spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(X_{et}, R^q i_* G) \implies H^*(X_{0,et}, G_{0,et})$$

がある. (ここで i は finite morphism であるから, $R^q i_* G = 0$,

$\forall i > 0$. 従って $H^p(X_{et}, i_* G_0) \cong H^p(X_{0,et}, G_{0,et})$, $\forall p \geq 0$.)

今 G は X 上 smooth であるから, $0 \rightarrow N \rightarrow G_{pe} \rightarrow i_*(G_{0,pe}) \rightarrow 0$

は exact. 従って $H^i(X_{pe}, N) = 0$, $\forall i > 0$ といえはよい. また

$X' \rightarrow X$: finite, locally free として $H^i(X'/X, N) = 0$, $\forall i > 0$ と

いえはよい. これは (2.1.3) により (2.3.2), (i) に同値である.

g. e. d.

Remark 2.3.4. Theorem 2.3.3 の結果は G が non-commutative である限り, $i=0$ または 1 として成立する (cf. SGAD, XXIV).

(2.4). (2.4.1) X は prescheme, G は X 上 flat かつ locally of finite presentation な affine group とする. $H^i(X_{pg}, G_{pg})$ (resp. $H^i(X_{pe}, G_{pe})$) は (fpgc)- (resp. (fppt)-) topology の意味での X 上の principal homogeneous spaces の同型類であるから, 容易に

$$H^i(X_{pe}, G_{pe}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{pg}, G_{pg}) \quad \text{が成り立つ.}$$

しかし, G が commutative である時, $H^i(X_{pe}, G_{pe}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{pg}, G_{pg})$, $\forall i \geq 1$ が成立するかどうか, 筆者は知らない.

(2.4.2) $X \in \text{prescheme}$, $G \in X$ 上 constant type の semi-simple group prescheme とする (i.e. G は X 上 affine, smooth かつ π の geometric fibres は connected semi-simple algebraic group). 我々は, この時,

$$H^2(X_{\text{ps}}, G_{\text{ps}}) \cong \underset{(2.4.1)}{H^1(X_{\text{pe}}, G_{\text{pe}})} \cong \underset{(2.3.3)}{H^1(X_{\text{et}}, G_{\text{et}})}$$

が成立することを知っているが, 更に $H^1(X_{\text{et}}, G_{\text{et}}) \cong H^1(X_{\text{etf}}, G_{\text{etf}})$ が成立することを示そう.

X, G を上記の通りとし, $P \in X$ 上の G -principal homogeneous space ($\equiv G$ -torsor) とする. G (resp. P) が (etf)-trivial の時, locally isotrivial と呼ぶ. 即ち X の任意の点 x について x の open nbd. U 及び $U \rightarrow$ étale finite surjective morphism $U' \rightarrow U$ が存在して, $G_{U'}$ (resp. $P_{U'}$) が split type (i.e. split maximal torus $T \cong P_{U'}(M)$, M : Abel 群, $G_{U'}$ の T に関する root system $R(\subset M)$ が存在して, 任意の root $\alpha \in R$ は X 上の constant function, α Lie(G) の proper value α の semi-invariant subspace $\mathfrak{g}^\alpha$ は X 上 free Module となる. この時, $G \in (G, T, M, R)$ と書くことができる.) (resp. $P_{U'}$ が U' -section を持つ) とする. 証明は本質的に次の結果による (cf. SGAD, XXIV).

Lemma 2.4.2.1. (i) $X \in \text{prescheme}$, $G \in X$ 上の reductive group prescheme (i.e. X 上 affine, smooth, かつ π の geometric fibres は connected reductive algebraic groups), $T \in G$ の maximal

torus, $B \in \mathcal{B}$ の Borel subgroup とする. ($B \supset T$ が満たされる時, (B, T) は Killing couple と呼ぶ). $P \in \mathcal{X}$ 上の G -torsor $G' \in \mathcal{G}$ の P -twisted group prescheme とする. (i.e. $G' = P \times G / G$, 但し G の $P \times G \curvearrowright$ の作用は $(p, g)g' = (pg', g'^{-1}gg')$ で定まる).
 この時,

$$P / \underline{\text{Norm}}_G(T) \cong \underline{\text{Tor}}(G'),$$

$$P/B \cong \underline{\text{Bor}}(G'),$$

$$P/T \cong \underline{\text{Kil}}(G').$$

但し, $\underline{\text{Norm}}_G(T) : (\text{Sch}/X)^{\circ} \ni X' \longrightarrow \text{Norm}_{G_{X'}}(T_{X'})$
 $\underline{\text{Tor}}(G') : (\text{Sch}/X)^{\circ} \ni X' \longrightarrow \{G_{X'} \text{ の maximal tori 全体}\}$
 $\underline{\text{Bor}}(G'), \underline{\text{Kil}}(G')$ についても同様.

$\underline{\text{Tor}}(G')$ (resp. $\underline{\text{Bor}}(G'), \underline{\text{Kil}}(G')$) は X 上 affine (resp. projective, affine) smooth かつ of finite presentation な prescheme として represent される (cf. SGAD, ~~XXII~~, (5.8.3)).

(ii) X が semi-local scheme の時, G が X 上 constant type の semi-simple group prescheme であれば, G は isotrivial.

以上の結果を認めよう. 但し (ii) の事実は本質的に $\text{Autext}_X(G)$ が有限群であることによる. この時, 求めた結果は次の様にして得られる. 先ず, G -torsor P が locally isotrivial
 $\iff$ 任意の X の local scheme $\mathfrak{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \mathfrak{x}})$ について $G_{\mathfrak{X}}$ -torsor $P_{\mathfrak{X}}$ が (locally) isotrivial.

これは, G, P が X 上 of finite presentation であるから,

EGA, IV, §8 の議論を使ってやる。上記 lemma (ii) により, G は semi local scheme X 上の split type の reductive group prescheme としてよい。この時, G の P -twisted group prescheme も semi-simple であるから, 再び (ii) により G' も isotrivial. 従って (i) に於いて $\underline{Kil}(G')$ は étale finite surjective morphism $X' \rightarrow X$ として, $X' \rightarrow \underline{Kil}(G')$ なる X -morphism ともつ。従って $P \times_{P/T} X' = Q$ は X' 上の T -torsor となる。しかも X' は semi-local. であるから, $H^1(X', T) = 0$ ($\odot$ T は split torus). 従って Q は X' -section を持ち, P は X' によって trivialize される。

Remark 2.4.2.2. (1) 更に一般に, X は prescheme, G は X 上の constant type の reductive group prescheme とすると, 次の事柄は同値である:

- (i) G は locally isotrivial,
- (ii) $\text{rad}(G)$ (torus) は locally isotrivial, i.e. étf-ascent により split torus になる。

又 P は X 上の G -torsor である時, 次の事柄は同値である:

- (i') P は locally isotrivial,
- (ii') $P/\text{der}(G)$ は $\text{corad}(G) (= G/\text{der}(G) : \text{torus})$ -torsor として locally isotrivial.

これらの条件は, X は locally noetherian, geometrically unibranch ならば, 自動的に満足される。

(2) X は $\dim 1$ の prescheme とすれば, $X_{\text{ét}}$ と $X_{\text{étf}}$ は X の上に同じ topology を定める. 従って X 上の group prescheme G について, $H^i(X_{\text{étf}}, G_{\text{étf}}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\text{ét}}, G_{\text{ét}})$, $\forall i \geq 0$.

[証明] $X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{étf}}$ は明らかに fully faithful であるから, X の affine open set U 上の étale quasi-finite, of finite presentation な morphism $U' \rightarrow U$ から étale finite morphism $V \rightarrow U$ によって refine される (i.e. $V \rightarrow U' \rightarrow U$) ことを言えばよい. そのためには, EGA IV, §8 の議論により, $U = \text{Spec}(A)$, A : noetherian local ring と仮定することになる. 又 U' に適当な refinement で置き換えることにより, $U' = \text{Spec}(A')$, A' : local ring と仮定出来る. (NB. U の maximal point 上の U' の closed point は isolated である. 従って U の closed point 上の U' の唯一つの closed point を含む affine open set を取れば, それは local scheme である.) $U' \rightarrow U$ に ZMT (EGA, IV, (8.12.6)) を適用して, U' は U 上 finite な prescheme $V' = \text{Spec}(B)$ の中に open immersion により imbed 出来る. B は semi-local ring であるから, A' は B の 1 つの maximal ideal $\mathfrak{m}$ について, $A' \cong B_{\mathfrak{m}}$ となる. 今 f.p.c.-ascent $\hat{A}/A$ により $B \otimes_A \hat{A} \cong \hat{B} \cong \prod \hat{B}_{\mathfrak{m}}$. $\hat{B}_{\mathfrak{m}}$ は $\hat{A}$ 上 finite, 従って $A' \cong B_{\mathfrak{m}}$ は A 上 finite. 又 $A' \hookrightarrow A$ は étale であることは明らか.

q. e. d.

(3) A は noetherian local ring, $X = \text{Spec}(A)$ ならば, $X_{\text{étf}}$ と $X_{\text{ét}}$

は X の上に同じ topology を定める。これは (1.4.1) (i), (=) によって見られる。従って A が complete local ring であれば、同じ結論が得られる。

(2.4.3) 次に prescheme X , X 上の group prescheme G について

(*) $_X^G$: $H^1(X_{\text{zar}}, G) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{\text{ét}}, G)$ が成立する条件を求めよう。次の結果はよく知られている。

Lemma 2.4.3.1. X を prescheme とすると,

$$(*)_X^{GL_n} : H^1(X_{\text{zar}}, GL_n) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{\text{ét}}, GL_n).$$

[証明] $H^1(X_{\text{ét}}, GL_n)$ の各元は (ét)-topology の意味での、 X 上の rank n の vector bundle に対応するが、後者は (fppf)-descent により Zariski-topology の意味のものに一致する。q.e.d.

Lemma 2.4.3.2. X を prescheme とする。

(i) X 上の affine な group prescheme G が (*) $_X^G$ を満たし、 X 上の affine な G の subgroup prescheme H が 次の条件 (i), (ii) を満たすとする:

(i) G/H : representable, (ii) G は G/H 上の H -torsor と見るとき, locally trivial (i.e. $G \in H^1((G/H)_{\text{zar}}, H)$).

この時, (*) $_X^H$ が成立する。

(2) $0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow (e)$ は X 上の affine な group preschemes の exact sequence とする (i.e. $G \supset H$ normal, G/H : representable) 更に G は G/H 上の H -torsor と見て (ét)-trivial とする。今 G/H が (*) $_{G/H}^{G/H}$ を満たし、 H が X の任意の

affine open set σ に対して, $(*)_{\sigma}^H$ が満たすならば, $(*)_X^G$ が成立する.

[証明] G は X 上の group prescheme, H は G/H が representable になるような G の subgroup prescheme とする. 今 topology ε , G/H 上の H -torsor G が Zariski trivial であるとは, (Zar) または (étf) で, ε (étf)-trivial であるとは (étf) で考えることにすれば, 次の sequence がある:

$$\{e\} \longrightarrow H(X) \xrightarrow{f_1} G(X) \xrightarrow{f_2} G/H(X) \xrightarrow{d} H^1(X, H) \xrightarrow{g_1} H^1(X, G).$$

ここで, f_1, f_2, g_1 は自然に定義されるもの. d は $\varepsilon \in G/H(X)$ に対して, H -torsor $G \times_{G/H} (X, \varepsilon)$ と対応させる map. $H(X)$ は $G(X)$ に自然に左から作用し, $G(X)$ の 2 元が f_2 により同じ image を持つのは $H(X)$ の作用で transitive である時, $G/H(X)$ の元が d により trivial H -torsor に移るのは $G(X)$ の元から定義される時, $G/H(X)$ の 2 元が d により同じ image を持つのは, $G(X)$ の左からの作用により transitive である時, また $H^1(X, H)$ の元が g_1 により trivial G -torsor に移るのは d の image として得られる時等が知られている. 更に G/H が group prescheme であるとは, $H^1(X, G) \xrightarrow{g_2} H^1(X, G/H)$ が定義され, $H^1(X, G)$ の元が g_2 により trivial G/H -torsor に移るのは H -torsor の拡大として得られる時である. また $G/H(X)$ の元は次の様にして, $H^1(X, H)$ に作用する: $p \in H^1(X, H)$ に対して $p \times^H G/H$ (Serre's notation, [15]) は trivial, i.e.

$P \times^H G/H \cong X \times G/H$. $G/H(X)$ の元 ε は $X \times G/H$ の X -section $(1_X, \varepsilon)$

を定めるが、この時 $P \times_{(X \times G/H)} (X, (1_X, \varepsilon))$ は H -torsor である。

$H'(X, H)$ の 2 元が g_i により同じ image を持つのは、上の作用により $G/H(X)$ -transitive になるときである。次に結果の証明。

(1) $H'(X_{\text{Zar}}, H) \longrightarrow H'(X_{\text{étf}}, H)$ は into であるから、ontones を証明すればよい。

$P \in H'(X_{\text{étf}}, H)$ の元とする。 G について $(*)_X^G$

を使って、 $\forall x \in X$ について、 $\exists U (\ni x, \subset X)$ open set があり、

$P \times^H G$ は U 上 trivial. 最初に述べられた sequence と (Zar)-topology

について、 X 及び U に使って、 P_U は $G/H(U)$ の元 η によって、

$P_U \cong G \times_{G/H} (U, \eta)$ と書けることがわかる。今 G が G/H 上の H -torsor

として local trivial であるから、 U を適当に小さくすれば、

G/H の open set V で $G_V \cong H \times V$, $\eta'(V) \supset U$ と出来る。この

時、明らかに P_U は U 上 trivial である。即ち P は locally trivial.

(2) 同様に $H'(X_{\text{Zar}}, G) \longrightarrow H'(X_{\text{étf}}, G)$ の ontones を示せばよい。

$P \in H'(X_{\text{étf}}, G)$ 及び $\forall x \in X$ について、 $U (\ni x, \subset X)$ ^{affine} open set

があり、 $(P \times^G G/H)_U \cong U \times G/H$. 再び最初の sequence と (étf), U

を使って、 P_U は $H'(U_{\text{étf}}, H)$ の元 Q により $P_U \cong Q \times^H G$ と書ける

ことがわかる。 $(*)_U^X$ によって $Q \in H'(U_{\text{Zar}}, H)$. 従って P_U は

locally trivial.

g.e.d.

Corollary 2.4.3.3. X は任意の prescheme とする。

(i) $(*)_X^{G_a}$, (ii) $(*)_X^{G_m}$, (iii) $(*)_X^{SL_n}$, (iv) G が X 上 solvable

affine な group prescheme (i.e. quotients of G_a, X と G_m, X の $\mathbb{A}^1$ と $\mathbb{A}^*$ による composition series を持つ group prescheme) について, $(*)_X^G$.

[証明] (i) は (2.2.2) による, (ii) は (2.4.3.1) による, (iii) は $0 \rightarrow SL_n \rightarrow GL_n \xrightarrow{\det} G_m \rightarrow (1)$ の locally trivial であるから (2.4.3.2)(1) による. $\hookrightarrow$ sequence の locally trivial になるのは, $G_m \ni \lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の det. の rational section と $\lambda \mapsto \lambda$ と $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ である. (iv) は (2.4.3.2)(2) 及び $(*)_X^{G_a}, (*)_X^{G_m}$ による.

Remark 2.4.3.4 (1) $(*)_X^G$ が成立しない例を挙げよう. X は体 k 上の ordinary double point y を持つ irreducible algebraic curve とする. $G = \mathbb{Z}_X \times \mathbb{Z}_y$. X と y の generic point とし, $i_x: X \rightarrow X$ は canonical injection とする. 最初に Zariski topology と spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(X_{zar}, R^q i_{x*}(\mathbb{Z}_x)) \Rightarrow H^*(X_{zar}, \mathbb{Z}_x)$ と injection $H^1(X_{zar}, (i_x)_* \mathbb{Z}_x) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_x) = (0)$ を得る. 従って $H^1(X_{zar}, (i_x)_* \mathbb{Z}_x) = (0)$. (1) から X は irreducible であるから, $\mathbb{Z}_X \rightarrow (i_x)_*(\mathbb{Z}_x)$ は同型. 従って $H^1(X_{zar}, \mathbb{Z}_x) = (0)$. 次に (ét) topology と, $(i_x)_* \mathbb{Z}_x$ は, $\mathbb{A}^1$ の X の 2 つの branch を持つから, 次の exact sequence, $0 \rightarrow \mathbb{Z}_X \rightarrow (i_x)_* \mathbb{Z}_x \rightarrow (i_y)_* \mathbb{Z}_y \rightarrow 0$ を満たす. これより long exact sequence,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_X(X) \rightarrow (i_x)_*(\mathbb{Z}_x)(X) \rightarrow (i_y)_*(\mathbb{Z}_y)(X) \rightarrow H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_x) \rightarrow H^1(X_{\text{ét}}, (i_x)_* \mathbb{Z}_x)$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \mathbb{Z} \quad \quad \quad \mathbb{Z} \quad \quad \quad \mathbb{Z}$$

を得る. 従って $H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_x) \supset \mathbb{Z}$ であるから, non-zero.

(2) projective general linear group prescheme PGL_n について、
 一般に $(*)_X^{\mathrm{PGL}_n}$ は成立しない (cf. [5], 5.5). しかし X が
 閉体 k 上の algebraic curve, 又は有限体上の non-singular algebraic
 curve の時は, $(*)_X^{\mathrm{PGL}_n}$ が成立する. 実際, 両立の場合に,
 $H^2(X, G_m) \cong Br(X) = (0)$. 従って $H^2(X_{\text{ét}}, G_{L_{n+1}}) \longrightarrow H^1(X_{\text{ét}}, \mathrm{PGL}_n) \rightarrow 0$.
 $\parallel$
 $H^1(X_{\text{Zar}}, G_{L_{n+1}})$

即ち $H^1(X_{\text{ét}}, \mathrm{PGL}_n)$ の任意の元 P は $H^1(X_{\text{ét}}, G_{L_{n+1}})$ の元 Q より
 $P = Q \times^{\mathrm{PGL}_n} G_{L_{n+1}}$ として得られるが, 任意の X の点 x について,
 open set U ($\ni x, \subset X$) が存在して, $Q_U \cong U \times G_{L_{n+1}}$. 従って
 $P_U \cong U \times \mathrm{PGL}_n$, 即ち P は locally trivial.

(2.4.4) 比較定理の最後として, X が $\mathbb{C}$ (複素数体) 上 locally
 of finite type の prescheme であるとき, $X(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ -rational points
 の集合に analytic space の structure を与える (cf. [14]), その上に
 考えた usual topology (X_{cl} と記す) と X 上の étale topology $X_{\text{ét}}$ の
 間の比較に関する M. Artin の結果 ([8, 11]) を挙げる.

X_{cl} は次の様にかける:

$$\begin{cases} \text{Cat}(X_{cl}) : & f: \mathcal{U} \longrightarrow X(\mathbb{C}) \quad \text{analytic spaces の local} \\ & \text{isomorphism.} \\ \text{Cov}(X_{cl}) : & \{ \mathcal{U}_\nu \longrightarrow \mathcal{U} \} \quad \text{surjective family.} \end{cases}$$

$X_{\text{ét}}$ との比較は次の morphism $\varepsilon: X_{cl} \longrightarrow X_{\text{ét}}$ によって与えられる:

$$X' \xrightarrow{f} X \in \text{Cat}(X_{\text{ét}}) \text{ の時, analytic spaces の morphism}$$

$X'(\mathbb{C}) \xrightarrow{g(\mathbb{C})} X(\mathbb{C})$ と対応させる. $g(\mathbb{C})$ が local isomorphism であることは容易にみられる.

この時, 主要な結果は次のようになる:

- Proposition 2.4.4.1. (i) $\mathcal{E}$ は fully faithful, i.e. $X', X'' \in \text{Cat}(X_{\text{ét}})$ について, すべて analytic $X(\mathbb{C})$ -morphism $X'(\mathbb{C}) \rightarrow X''(\mathbb{C})$ は algebraic である (cf. [5], Cor. to Prop. 20).
- (ii) $\mathcal{E}$ は $X(\mathbb{C})$ 上の finite coverings (i.e. $\sigma \rightarrow X(\mathbb{C})$, finite & locally isomorphic) のなす category と X 上の étale coverings (i.e. finite & étale) のなす category の間の equivalence を与える (cf. [6]).

Proposition 2.4.4.2 (SGAA, XI, Théorème 4.4). 更に X が $\mathbb{C}$ 上 smooth であると仮定する. 下 X_{cl} 上の各 fibre が有限の locally constant torsion (abelian) sheaf とする. (実は F は $X_{\text{ét}}$ 上の locally constant torsion sheaf G より $\mathcal{E}^*G$ の形で得られる. 又 G 自身は X 上の étale covering Y によって represent される, cf. Prop. 2.4.4.1 & SGAA, XI, Lemme 2.2). この時, $R^i \mathcal{E}_* F = 0$, $i > 0$. 従って $H^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{E}_* F) \cong H^i(X_{\text{cl}}, F)$, $i \geq 0$. ここで $\mathcal{E}_* F$ は上の G と同型になる. 特に M が finite abelian (abstract) group ならば, $H^i(X_{\text{ét}}, M) \cong H^i(X_{\text{cl}}, M)$.

Remark 2.4.4.3. X が $\mathbb{C}$ 上 projective prescheme, $\mathcal{F}$ が coherent $\mathcal{O}_X$ -Module であれば, $H^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}_{\text{ét}}) \cong H^i(X_{\text{cl}}, \mathcal{F}_{\text{cl}})$ が成立することは注意しよう. 但し $\mathcal{F}_{\text{cl}}$ は $\mathcal{F}$ によって定まる.

$X(\mathbb{C})$ 上の analytic sheaf. これは Prop²/2.1, [7], Théorème 1 及び scheme 上の Zariski cohomology は Čech cohomology によって求められること (cf. EGA, III, (4.1)) から出る.

(2.5). この節に於いては, いくつかの example について見よう.

(2.5.1). X を標数 $p > 0$ の prescheme とし, $G_{a,X}$ 上の Frobenius endomorphism の kernel を $\alpha_{p,X}$ と記そう. 最初に, $H^i(X_{pe}, \alpha_p) \cong H^i(X_{pe}, \alpha_p)$, $\forall i \geq 0$ が成立することには注意しよう. これは sequence $0 \rightarrow \alpha_{p,X} \rightarrow G_{a,X} \xrightarrow{F} G_{a,X} \rightarrow 0$ が X_{pe} -sheaves としても, X_{pe} -sheaves としても exact であること, 及び (2.2.1) によって求められる. 但し $H^i(X_{pe}, \alpha_p) \cong H^i(X_{et}, \alpha_p)$ は一般には成立しない. 例えは, k : separably closed field とし, $X = \text{Spec}(k)$ とする.

この時,

$$H^i(X_{pe}, \alpha_p) = \begin{cases} 0 & i=0 \\ k^+ / k^{+p}, & i=1 \\ 0 & i \geq 2 \end{cases} \quad (k^+ = G_a(k))$$

$$H^i(k_{et}, \alpha_p) = (0) \quad \forall i \geq 0.$$

(2.5.2). 次に A を標数 $p > 0$ の complete, noetherian local ring とし, κ の residue field が separably closed であるようなものについて, $X = \text{Spec}(A)$ とし, X_{pe} 上の torsion sheaf F_n と

$$H^i(X_{pe}, F_n) = \begin{cases} 0 & 0 \leq i < n \\ A^+ / A^{+p} & i = n \\ 0 & i > n \end{cases} \quad (A^+ = G_a(A))$$

$$H^i(X_{et}, F_n) = (0), \quad \forall i \geq 0$$

を満たすものを構成する (cf. [3]).

G is abstract abelian group, H is X_{pe} 上の site の sheaf として X_{pe} 上の groups の presheaf G_H is $\text{Cat}(X_{pe}) \ni \sigma \longmapsto G_H(\sigma) = \coprod_i \left(\coprod_{H(\sigma_i)} G \right)$ で定義する. 但し A is complete, local であるから $\text{Cat}(X_{pe})$ 中の cofinal set として, X is flat, finite morphism を取ることも出来ることに注意して, $\sigma = \coprod_i \sigma_i$ はその connected components への分解, $\coprod_{H(\sigma_i)} G$ は G の $H(\sigma_i)$ 個の copies の直和である. 簡単な計算 ([3]) により, G_H は X_{pe} 上の sheaf であり, $\sigma \in \text{Cat}(X_{pe})$, flat finite surjective morphism $V \rightarrow \sigma$ ($\in \text{Cov}(X_{pe})$) について, $H^b(V/\sigma, G_H) = 0$, $\forall g > 0$ を満たすことが見られる. この時, F_n is 帰納的に構成する:

$$F_1 = \alpha_p, \quad F_i : 0 \rightarrow F_i \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{F_{i-1}} \rightarrow F_{i-1} \rightarrow 0.$$

今 F_{n-1} に関する性質を述べては, exact sequence

$$\cdots \rightarrow H^i(X_{pe}, F_n) \rightarrow H^i(X_{pe}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{F_{n-1}}) \rightarrow H^i(X_{pe}, F_{n-1}) \rightarrow H^{i+1}(X_{pe}, F_n) \rightarrow \cdots$$

$$\text{より } H^b(X, F_n) = \begin{cases} 0, & b \neq n \\ A^+ / A^+ p, & b = n \end{cases} \text{ となる. 但しここで,}$$

$$(2.1.2) \text{ により } H^b(X_{pe}, (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{F_{n-1}}) = 0, \forall g > 0 \text{ かつ } H^2(V/\sigma, G_H) = 0$$

$$\forall g > 0 \text{ より 出る事に注意せよ. } H^b(X_{et}, F_n) = 0, \forall g \geq 0 \text{ 1}$$

その構成より明らかである.

$$(2.5.3). \quad X \text{ is prescheme として, (2.4.3.1) で } H^i(X_{et}, G_m) \cong$$

$$H^i(X_{zar}, G_m) \text{ となることを見た. 但し } H^i(X_{et}, G_m) \cong H^i(X_{zar}, G_m)$$

$i > 1$ は一般には成立しない。例えは X は $B_2(X) \neq 0$ とする algebraic curve と考えれば、 $H^2(X_{\text{ét}}, G_m) \neq 0$, $H^2(X_{\text{zar}}, G_m) = 0$ である。

§ 3. Cohomological dimension について.

(3.1) X は prescheme, $C \in \text{sites } X_{\text{ét}}, X_{\text{pé}}, X_{\text{ét}}, X_{\text{ét}}, X_{\text{zar}}$ のいずれかとする。 X の strict cohomological dimension n^s は

$$n^s = \inf \{ n \mid H^t(X, F) = 0, \forall t > n, \forall F \in C^{\sim, ab} \}$$

で定義する。又 l は任意の素数として、 X の l -cohomological dimension n_l は $n_l = \inf \{ n \mid H^t(X, F, l) = 0, \forall t > n, \forall \text{ torsion } F \in C^{\sim, ab} \}$ で定義し、 X の cohomological dimension n は $n = \sup_l n_l$ で定義する。但し $H^t(X, F, l)$ は $H^t(X, F)$ の l -primary part, 又 n^s, n_l, n 等が存在しない場合は ∞ とする。

X の topology を明示する時は、 $s.c.d^{Pl}(X)$, $c.d_l^{Pl}(X)$, $c.d^{Pl}(X)$ (resp. $s.c.d^{Pl}(X)$, $c.d_l^{Pl}(X)$, $c.d^{Pl}(X)$ etc.) と書く。

Lemma 3.1.1. X, C については上の通りとする。任意の $F \in C^{\sim, ab}$ は 次の decomposition $0 \rightarrow t(F) \rightarrow F \rightarrow F/t(F) \rightarrow 0$ を持つ。但し $t(F)$ は F の torsion subsheaf, $F/t(F)$ は torsion-free sheaf.

[証明] $t(F) : \mathcal{U} \in \text{Cat}(C) \mapsto \text{torsion part of } F(\mathcal{U})$ とすれば、 $t(F)$ は F の torsion subsheaf. 又 $F/t(F)$ は presheaf, $\mathcal{U} \in \text{Cat}(C) \mapsto F(\mathcal{U})/t(F)(\mathcal{U})$ に associate した sheaf とすれば、torsion free

であることは明か。

g.e.d.

Lemma 3.1.2. X, C についてとはと同様とする。今、
任意の $F \in C^{ab}$ について、 $H^g(X, F)$ ($g \geq 1$) は torsion group
であれば、 $n_l \leq n_l^A \leq n_l + 1$, $n \leq n^A \leq n + 1$ 。但し、 n_l^A は
 $n_l^A = \inf \{ r \mid H^t(X, F, l) = 0, \forall t > r, \forall F \in C^{ab} \}$ によって
定義される。

[証明] $n_l \leq n_l^A$, $n \leq n^A$ は明か。 $n_l < +\infty$ とすると、
(3.1.1) より $H^{n_l+1}(X, F, l) \cong H^{n_l+1}(X, F/t(F), l)$ なるから、 F
は torsion free として、 $H^{n_l+2}(X, F, l) = 0$ といふ。 m は任意の
 l の中数として、 $0 \rightarrow F \xrightarrow{m} F \rightarrow F/mF \rightarrow 0$ より、 $0 \rightarrow H^{n_l+2}(X, F, l)$
 $\xrightarrow{m} H^{n_l+2}(X, F, l)$ 。又 $H^{n_l+2}(X, F)$ は torsion group であるから
 $H^{n_l+2}(X, F, l) = 0$ 。 g.e.d.

Lemma 3.1.3. (1) X は quasi-compact, quasi-separated
prescheme とする。 C は X 上の任意の site とし、 F は C 上の
torsion sheaf とする。この時、 $H^g(X, F)$, $g \geq 0$ は torsion
sheaf である。

(2) $f: X \rightarrow Y$ は quasi-compact, quasi-separated prescheme
の morphism とする時、 X, Y 上に同種の topology を考えよ。
 F は X 上の torsion sheaf とすると、 $R^g f_* F$, $g \geq 0$ は Y 上の torsion
sheaf である。

[証明] (1) $F = \varinjlim_n F_n$, $F_n = \ker(F \xrightarrow{\wedge} F)$ とし、SGAA, VT (1.4)

により $H^i(X, F) \cong \varinjlim_n H^i(X, F_n)$. 従って $F = F_n \subset F$ と,
 $F \xrightarrow{\eta_F} F$ について, $H^i(X, F) \xrightarrow{\eta} H^i(X, F)$ が与えられるが,
 $\eta_F: F \rightarrow 0 \rightarrow F$ と分解するから, $H^i(X, F)$ も $n \in \mathbb{N}$ に含まれる.

(2) $R^i \Gamma_* F$ が $\text{data}: Y' \hookrightarrow H^i(X \times Y', F)$ によって定まる sheaf
 であることに注意すれば, (1) より明らか. g. e. d.

(3.2) 最初に $X = \text{Spec}(k)$, k : 体の場合を考察しよう.

Lemma 3.2.1. X, k については上の通りとし, $C = X_{\text{pt}}$
 を $X_{\text{ét}}$ とする. 任意の $F \in C^{ab}$ について, $H^i(X, F)$, $i > 0$
 は torsion group である.

[証明] $X_{\text{ét}}$ については §1 の結果より出る. 以下 $C = X_{\text{pt}}$
 とする. F の適当な長さの injective resolution と考えれば,
 $H^i(X, F)$ が torsion group であることと云えば十分である. し
 かし $H^i(X, F)$ は Čech method によって計算されるから,
 $H^i(X, F) \cong \varinjlim_{K/k} H^i(K/k, F)$ とかける. 但し K は k の algebraic
 closure $\bar{k}$ に含まれる finite algebraic extension, $H^i(K/k, F)$
 $= H^i(\text{Spec}(K)/\text{Spec}(k), F)$ である. この時, §1 の (III) の spectral
 sequence より $E_2^{p,q} = H^p(K/k, \mathcal{H}^q(F)) \Rightarrow H^*(K, F)$ と得る.
 これより exact sequence $0 \rightarrow H^i(K/k, F) \rightarrow H^i(K, F) \rightarrow H^i(K/k, \mathcal{H}^1(F))$
 が得られるから, $H^0(K/k, \mathcal{H}^1(F)) \hookrightarrow H^1(K, F \otimes_K K)$ になり, exact
 sequence $0 \rightarrow H^i(K/k, F) \rightarrow H^i(K, F) \rightarrow H^i(K, F \otimes_K K)$ が得られる.
 これより k の finite algebraic extensions $K \supset L \supset k$ について,

exact sequence $0 \rightarrow H^1(L/k, F) \rightarrow H^1(K/k, F) \rightarrow H^1(K/L, F \otimes_k L)$
 が得られる。今 L として k の K に於ける separable closure と取
 れば、 $H^1(L/k, F)$ は torsion group である。従って、 $H^1(K/L, F \otimes_k L)$
 も torsion group であることと云えは十分である。再び上の sequence
 により K から L 上 $x^p = a$, $a \in L$ なる方程式の根によって生成さ
 れていると仮定出来る。即ち $\text{Spec}(K)$ は $\text{Spec}(k)$ 上の $\alpha_{p,k}$ 又は $\mu_{p,k}$
 torsor として、 $H^1(K/k, F)$ も torsion group であることと云えは
 よい。しかるに $F(K \otimes_k K) = \text{Hom}_K(\alpha_{p,K}, F_K)$, $F(K \otimes_k K \otimes_k K) = \text{Hom}_K(\alpha_{p,K} \times \alpha_{p,K}, F_K)$
 注意到又 F_K 上に K の上の作用で $\alpha_{p,K}$ を作用させると、
 $H^1(K/k, F) \cong H^1(\alpha_{p,K}, F_K)$ (cf. SGAD, I) となるのは容易に見られ
 る。しかるに、 $\varphi \in Z^1(\alpha_{p,K}, F_K)$, $g \in \alpha_{p,K}(T)$, $T \rightarrow k$ について
 $\varphi^g(g) - \varphi(g) \in B^1(\alpha_{p,K}, F_K)$ になることより、 $Z^1(\alpha_{p,K}, F_K)$ の元は
 modulo $B^1(\alpha_{p,K}, F_K)$ に $\text{Hom}_K\text{-group}(\alpha_{p,K}, F_K)$ の元に同一視され、
 $H^1(K/k, F)$ も p -torsion group であることが見られる。 g.e.d.

Remark 3.2.2. (1) Lemma 3.2.1 の記号の下で、 F から k 上
 の group scheme of finite type G を与えるならば、 $H^i(X_{pe}, F)$ は
 Čech cohomology と一致すること知られている (cf. [14], Theorem 1).

(2) Lemma 3.2.1 に使った議論により、 $X \rightarrow Y$ が (abstract)
 abelian finite group G を group に持つ Galois covering である時、
 F と有限直積と可換な X 上の presheaf として、 $H^i(X_Y, F) \cong H^i(G, F(X))$
 , $\forall i \geq 0$ が容易に示される。

Corollary 3.2.3. X is quasi-compact, quasi-separated prescheme
 とする. $x \in X$ の一点とし, $F_x \in (\mathrm{Spec}(k(x)))_{\text{ét}}^{\vee, \text{ab}}$ とする. この
 時, $R^i(i_x)_* F_x$, $i \geq 1$ は torsion sheaf であり, $H^i(X, (i_x)_* F_x)$
 $i \geq 1$ は torsion group である. 但し $i_x : x \rightarrow X$ は canonical
 injection.

[証明] $R^i(i_x)_* F_x$ は torsion sheaf であることは (3.2.1) より
 出る. α spectral sequence $H^p(X_{\text{ét}}, R^q(i_x)_* F_x) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\text{ét}}, F_x)$
 より modulo torsion group で $H^p(X_{\text{ét}}, (i_x)_* F_x) \cong H^p(X_{\text{ét}}, F_x)$
 (cf. (3.1.3)). 従って $H^p(X_{\text{ét}}, (i_x)_* F_x)$ は torsion group である.

Proposition 3.2.4. (1) k は標数 $p \geq 0$ の体とし, $\ell \in p$
 と異なる素数とする. $X = \mathrm{Spec}(k)$ とし, $c.d._\ell^{pl}(X) = c.d._\ell^{\text{ét}}(X)$.
 (2) k の標数 $p > 0$ とし, $c.d._p^{pl}(X) \geq c.d._p^{\text{ét}}(X)$, $c.d._p^{\text{ét}}(X) \leq 1$.

[証明] (1) k_s は k の separable closure とし, $X_s = \mathrm{Spec}(k_s)$ と
 おく. §1, (III)' の Hochschild-Serre spectral sequence $E_2^{p,q} =$
 $H^p(\mathcal{G}, H^q(X_{s, pl}, F_{X_s}^* X_s)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{pl}, F)$, $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ により,
 $H^i(X_{s, pl}, F_{X_s}^* X_s)$ は p -primary (cf. (3.2.1) の証明) である,
 $H^p(X_{pl}, F, \ell) \cong H^p(\mathcal{G}, F(X_s), \ell) \cong H^p(X_{\text{ét}}, F_{\text{ét}}, \ell)$. 従って, $c.d._\ell^{\text{ét}}(X) \leq c.d._\ell^{pl}(X)$.
 逆に $H^p(\mathcal{G}, E, \ell) \neq 0$ ならば $\mathcal{G}$ -module E があるから F は E の
 inverse image $F (\in X_{pl}^{\vee, \text{ab}})$ であり, 明らかに $H^p(X_{pl}, F, \ell) \neq 0$. 従
 って, $c.d._\ell^{\text{ét}}(X) = c.d._\ell^{pl}(X)$.

(2) [10], 2.2, prop. 3 より $c.d._p^{\text{ét}}(X) \leq 1$. 今 $c.d._p^{\text{ét}}(X) = 1$ ならば,

$X_{\text{ét}}$ 上の torsion sheaf F で $H^1(X_{\text{ét}}, F, p) \neq 0$ なものが存在する。 $f: X_{pe} \rightarrow X_{\text{ét}}$ は sites の morphism として, $G = f^*F$ とおく。 f の spectral sequence より $H^1(X_{\text{ét}}, f_*G) \rightarrow H^1(X_{pe}, G)$ は injective. しかるに, 定義より, $f_*G = f_*f^*F \cong F$. 従って, $H^1(X_{pe}, G, p) \neq (0)$.
 g. e. d.

Proposition 3.2.5. (1) k を標数 $p \geq 0$ の体とする。この時次の条件は同値である: (i) k : separably closed, (ii) $\text{c.d.}^{\text{ét}}(k) = 0$, (iii) $\text{s.c.d.}^{\text{ét}}(k) = 0$.
 (2) k を標数 $p > 0$ の体として, 次の条件は同値: (i) k : perfect, (ii) $\text{c.d.}_p^{\text{pl}}(k) \leq 1$, (iii) $\text{c.d.}_p^{\text{pl}}(k_s) = 0$.
 (3) k を (1) の通りとして, 次の条件は同値: (i) k : algebraically closed, (ii) $\text{c.d.}^{\text{pl}}(k) = 0$, (iii) $\text{s.c.d.}^{\text{pl}}(k) = 0$.

[証明] (1), (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) は明らか。 (ii) $\Rightarrow$ (i) については,
 [6] §1, 3.3, Cor. 2 より出る。 (2) (i) $\Rightarrow$ (iii) は k が perfect であるから, k の separable closure k_s は algebraically closed. 従って Remark (3.2.2) (i) により $\text{c.d.}_p^{\text{pl}}(k_s) = 0$. 又 torsion sheaf $F \in (\text{Spec}(k))_{pe}^{\sim, \text{ét}}$ について, spectral sequence, $E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{O}, H^q(k_s, F \otimes_k k_s)) \Rightarrow H^*(k, F)$ より, $\text{c.d.}_p^{\text{pl}}(k) \leq \text{c.d.}_p^{\text{ét}}(k) + \text{c.d.}_p^{\text{pl}}(k_s)$. (3.2.4), (2) によって, これから $\text{c.d.}_p^{\text{pl}}(k_s) \leq \text{c.d.}_p^{\text{pl}}(k) \leq \text{c.d.}_p^{\text{pl}}(k_s) + 1$. 従って (iii) $\Rightarrow$ (ii).
 (ii) $\Rightarrow$ (i) のためには, (i) が成立しなければ, k : non-perfect. 従って k_s : non-perfect, i.e. $k_s^+ / k_s^{+p} \neq (0)$. 又上の不等式より,

$c.d_p^{pe}(k_s) \leq 1$. この時, (2.5.1) によれば, $c.d_p^{pe}(k_s) = \infty$.

これは矛盾. 従って, (ii) $\Rightarrow$ (i).

(3) (i) $\Rightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii) は明か. (ii) $\Rightarrow$ (i) のために
 (1) より k は separably closed, (2) より k は perfect. 従って
 k は algebraically closed である. g.e.d.

(3.3) 次に X を prescheme として, $cd_{\mathbb{A}}^{et}(X)$ に関して知られている結果の幾つかを紹介しよう.

Theorem 3.3.1 (SGAA, X, §4) X を体 k 上 n 次元の有限生成な prescheme とする. k と k の標数と異なる素数として

$$cd_{\mathbb{A}}^{et}(X) \leq 2n + cd_{\mathbb{A}}^{et}(k) \quad \text{が成立する.}$$

[証明] $N = 2n + cd_{\mathbb{A}}^{et}(k)$ とおく. 最初に次の事柄を見よ

i: (1) X の点 y の codimension $c (\equiv \dim \mathcal{O}_{X,y})$ ならば,
 $cd_{\mathbb{A}}^{et}(k(y)) \leq N - 2c$.

実際, $k(y)$ は k 上有限生成の体であるから, $cd_{\mathbb{A}}^{et}(k(y)) \leq cd_{\mathbb{A}}^{et}(k) + \text{tr.deg}(k(y)/k)$ (cf. [6], II-13). 又 $\text{tr.deg}(k(y)/k) + \dim \mathcal{O}_{X,y} \leq \dim X = n$. 従って $cd_{\mathbb{A}}^{et}(k(y)) \leq cd_{\mathbb{A}}^{et}(k) + n - c \leq N - 2c$.

(2) X の irreducible closed subprescheme Y の strict local ring A について, $R(A)$ を A の total ring of quotients とする時,
 $cd_{\mathbb{A}}^{et} R(A) \leq \dim A$. 従って $x \in X$ の任意の点, $y \in \overline{\{x\}}$ の任意の点 ($\neq x$), A は Y の y に於ける strict localization となれば, C_x, C_y は x, y の X に於ける codimensions として,

$$cd_k^{et} R(A) < 2(C_Y - C_X).$$

実際, $cd_k^{et} R(A) \leq \dim A$ が成立すれば, 後半は次のようにして見られる. 先ず, $\dim \mathcal{O}_{Y,y} + \dim \mathcal{O}_{X,x} \leq \dim \mathcal{O}_{X,y}$, i.e. $\dim A = \dim \mathcal{O}_{Y,y} \leq C_Y - C_X$. 従って $cd_k^{et} R(A) \leq \dim A \leq C_Y - C_X < 2(C_Y - C_X)$ ($\odot x \neq y$). 最初の事柄のために, k は separably closed, $y \in Y$ の closed point と仮定しよう. この時, 明らかに $R(A)$ の residue fields は $R(Y)$ ($\equiv Y$ の 函数体) の algebraic extension. 従って $cd_k^{et} R(A) \leq cd_k^{et} R(Y) \leq \dim Y = \dim A$. しかしに k が separably closed でない時は, k' は separably closed な体として, k' 上有限生成な prescheme Y' 及び Y' の closed point y' で y' の strict localization が A に同型であるようなものを見付ける事が出来る.

実際, Y は affine と仮定出来るから, Y に於ける点 y の closure Z に Normalization Theorem を適用して, morphism $Y \rightarrow \text{Spec}(k[t_1, \dots, t_d]) = T$, $Z \xrightarrow{\text{finite}} T$, $d = \dim Z$ と出来る. この時, $k' = k(t_1, \dots, t_d)$ の separable closure, $Y' = Y \times_T \text{Spec}(k')$, $y' \in Y'$ の closed point $(y, \text{Spec}(k'))$ と取ればよい. 従って (2) は O.K. である.

今 F は torsion sheaf として, $j > N$ なる j は, $H^j(X_{et}, F) = 0$ と言う. X の次元に関する induction により, X より次元の低い X の subscheme については Theorem は正しいと仮定しよう. 従って F が X の maximal points のすべてで 0 にならないうと仮定出来る. この時 $R(X)$ は X の ring of rational functions として,

canonical injection $i : \text{Spec}(R(X)) \rightarrow X$ 及 U -exact sequence
 $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow i_* i^* F \rightarrow C \rightarrow 0$ と考へる. K 及 U - C は H^q
 $q \geq 1$ なる X の maximal points で 0 となるから, $H^q(X, K) = H^q(X, C) = 0$,
 $\forall q > N$. 従つて $H^q(X, F) = 0$, $\forall q > N$ と云うたのと同じ, $H^q(X, i_* i^* F)$
 $= 0$, $\forall q > N$ と云ふはよい. 即ちある $G \in (\text{Spec}(R(X)))_{\text{ét}}^{\sim, ab}$ なる
torsion sheaf G について, $F = i_* G$ と仮定出来る. この時,
spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(X, R^q i_* G) \Rightarrow H^*(\text{Spec}(R(X)), G)$ につ
いて, (1) より $\text{cd}_X^{\text{ét}} R(X) \leq N$ より, $H^i(\text{Spec}(R(X)), G) = 0$, $\forall i > N$.
 $E_2^{p,0} = 0$, $\forall p > N$ と云うたのと同じ, $E_2^{p,q} = 0$, $\forall (p,q); p+q > N-1$,
 $q > 0$ と云ふはよい. しかし X の点 y における $R^q i_* G$ の
geometric fibre は $(R^q i_* G)_y = H^q(\text{Spec}(R(A)), G)$, $A \cong k^{\Delta}(\mathcal{O}_{y,y})$
だから, (2) により $q \geq 2C_y$ なる $(R^q i_* G)_y = 0$. 従つて $q > 0$
なる q は, induction の仮定により $p > N - q - 1$ で $H^p(X, R^q i_* G) = 0$.
g. e. d.

Theorem 3.3.2. (S9AA, X, (5.5)). X と標数 $p > 0$ の noetherian
prescheme とする. X_{zar} の quasi-coherent Modules に $\mathbb{A}_X^1$ として
cohomological dimension $\text{cd}_{\text{qc}}(X)$ と $\text{cd}_{\text{qc}}(X) = \inf \{ r \mid H^i(X, \mathcal{F}) = 0, \forall i > r, \forall \text{ quasi-coherent Module } \mathcal{F} \}$ と定義する. この時, $\text{cd}_p^{\text{ét}}(X)$
 $\leq \text{cd}_{\text{qc}}(X) + 1$. 従つて X の標数 $p > 0$ の体 k 上定義された
有限生成 prescheme とする X , $\text{cd}_p^{\text{ét}}(X) \leq \dim X + 1$ (*)
(*) 時 X は k 上 quasi-projective なる X ならば, $\text{cd}_p^{\text{ét}}(X) \leq \dim X$ となる.

[証明] (SGAA, IX, (5.5)) により, $f: Y \rightarrow X$ が finite morphism のとき, $i: U \rightarrow Y$ が open immersion の時, $H^g(X, f_* i_! (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U) = 0$, $\forall g > \text{cdgc}(X) + 1$ と言えはよい事になる. 但し $i_!$ は $Y-U$ の上に 0 で sheaf を拡張する functor. f は finite であるから, $H^g(X, f_* i_! (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U) = H^g(Y, i_! (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U)$. 従って $Y = X$ としてよい. $Z = X - U$ とし, $\mathcal{I}$ は X の Z と交わる quasi-coherent Ideal とすると, exact sequences, $0 \rightarrow i_! (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_Y \rightarrow 0$, $0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\rho_X} \mathcal{O}_X \rightarrow 0$, 及び $0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\rho_Y} \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$ より exact sequence $0 \rightarrow i_! (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\rho} \mathcal{I} \rightarrow 0$ を得る. 但し ρ_X 等は Artin-Schreier morphism. (から $H^g(X, \mathcal{I}) = 0$, $\forall g > \text{cdgc}(X)$ 及び $g > \text{cdgc}(X) + 1$ について, $H^g(X, i_! (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_U) = 0$. 後半は $\text{cdgc}(X) \leq \dim X$ より明か.

g.e.d.

§4. Etale cohomology の重要な結果について.

(省略)

Bibliography.

- [1] M. Artin, Grothendieck topologies (MA), Seminar notes, Harvard University, 1962.
- [2] M. Artin et A. Grothendieck, SGAA, 1963/64, Mimeographed notes of I. H. E. S., Paris.
- [3] M. Demazure, Schémas en groupes réductifs, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), pp. 369-413.
- [4] M. Demazure et A. Grothendieck, SGAD, 1963/64, Mimeographed notes of I. H. E. S., Paris.
- [5] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, Mimeographed notes of Columbia University.
- [6] H. Grawert und R. Remmert, Komplexe Räume, Math. Ann. Bd. 136 (1958), p. 345.
- [7] A. Grothendieck, SGA, 1960/61, Mimeographed notes of I. H. E. S., Paris.
- [8] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique (FGA) (Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962), Paris, Secrétariat Mathématique, 1962.
- [9] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer (GB), I, II, III, Séminaire Bourbaki 290 (1965), 297 (1965) and mimeographed note of I. H. E. S., 1966.

- [10] A. Grothendieck et J. Dieudonné, EGA., Chap. II, III_1 , IV_2 , IV_3 , IV_4 , Publ. Math. de I. H. E. S.
- [11] M. Miyanishi, On the cohomologies of commutative affine group schemes, Jour. Maths of Kyoto Univ., Vol. 8 No. 1 (1968), pp. 1-39.
- [12] S. Shatz, Cohomology of artinian group schemes over local fields, Ann. of Maths, Vol. 79 (1964), pp. 411-449.
- [13] S. Shatz, The cohomological dimension of certain Grothendieck cohomologies, Ann. of Maths., Vol. 83 (1966) pp. 572-595.
- [14] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-56, pp. 1-42.
- [15] J.-P. Serre, Espaces fibrés algébriques, Séminaire C. Chevalley, exposé 1, 1958.
- [16] J.-P. Serre, Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Mathematics, No. 5, Springer Verlag, 1966.