

歪み解析と変形解析の数理：5. 続 Rf/φ 歪み解析法

Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 5. Supplements to Rf/φ strain analysis

山路 敦*

Atsushi Yamaji*

2016年2月21日受付.

2016年10月20日受理.

* 京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻
Division of Earth and Planetary Sciences,
Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Corresponding author: A. Yamaji,
yamaji@kueps.kyoto-u.ac.jp

1. はじめに

歪み・変形解析の理論において基盤となる、双曲幾何学の双曲面モデルを前回説明した(山路, 2016). すなわち, サイズ情報を捨象した楕円が回転双曲面 H^2 上の点で表され, 変形前後の楕円が H^2 上の2点で表されたわけである. また, H^2 からユークリッド平面への投影法として, Elliott プロットや正射影を紹介し, それによって変形前後の楕円を表す点を図示することを説明した. それらを含め, H^2 からユークリッド平面への種々の射影を Reynolds (1993) が紹介しているが, そのいくつかは構造地質学的に有用なので, 今回は前半でそれらをまとめて紹介する. 後半では, Rf/φ 歪み解析における3通りの解法を検討する.

2. H^2 からユークリッド平面への投影

地図投影法にはいろいろな種類があり, それぞれに長所があるが, いずれも投影にともなうゆがみから逃れることはできない. H^2 からユークリッド平面への種々の投影法も同様である.

投影法を説明する前にまず, Minkowski 空間についておさらいしておく. この空間の直交デカルト座標を O -012 とする. O は原点である. この空間では Lorentz 内積が

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (1)$$

と定義される(講座第4回). そして, H^2 は第0座標軸にたいして対称で, 式

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1 \quad (x_0 > 0) \quad (2)$$

で表される双曲面であった(Fig. 1). 円筒座標 O -ζψ x_0 で H^2 を表現すると $x_0 = \sqrt{\zeta^2 + 1}$ である. ただし ζ と ψ は第12座標平面上の動径と偏角で, ψ = 0 は $x_1 \geq 0$ かつ $x_2 = 0$ を意味する. 直交デカルト座標が (1, 0, 0) の点を C とし,

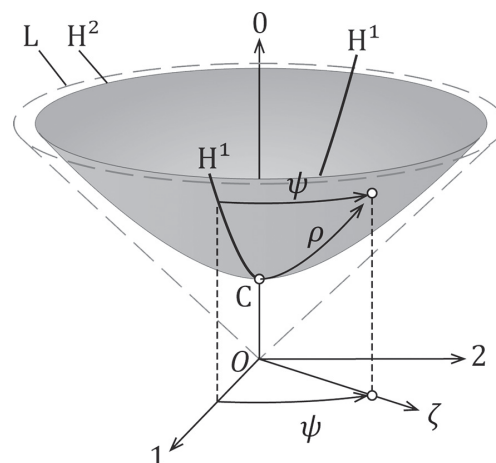


Fig. 1. Parameter space, H^2 , for representing ellipses with various aspect ratios and major-axis orientations. H^2 asymptotes to the cone, L; and H^1 is the intersection of H^2 and the 01-coordinate plane. 種々のアスペクト比と長軸方向を持つ楕円を表すパラメータ空間 H^2 と, それが漸近する光錐 L. 第01座標平面と H^2 の交線が H^1 .

この点から H^2 に沿った Lorentz 距離を ρ , H^2 上の点の偏角を ψ とすると, この点の位置を (ρ, ψ) で一意に表すことができる. この場合の ρ と ψ は, それぞれ球座標の余緯度と経度のアナロジーになっている. それらが球面上に沿った座標であると同様に, (ρ, ψ) は点 C を原点とする H^2 に沿った座標でもある. H^2 上の点で実空間の楕円をあらわす場合, $R = \exp(\rho)$ が楕円のアスペクト比を, $\phi = \psi/2$ がある基準方向からはかった楕円の長軸方向をあらわすものとする(本講座第3, 4回).

この空間が非ユークリッド空間であることは, 内積の式(1)で右辺の第0成分に負号がついていることに表れている. 第1, 2成分の積は通常通り正符号がついていて, 通常の内積と同じ形である. これは, 第12座標平面は2次元のユークリッド空間(ユークリッド平面)であることを意味する. そこで, H^2 から第12座標平面への投影を考える. 以下の議論では, H^2 上の点 (ρ, ψ) に対応した第12座標平面上の点の極座標を (ζ, ψ) として, $\zeta = f(\rho)$ という関数の違いとして投影法の区別を提示しよう.

2.1 等積投影

Rf/φ 歪み解析のときに紹介したように, 純剪断変形には H^2 上の等長変換, すなわち, 距離を保存する移動が対応する. じつは体積が保存する非共軸変形にも, そした等長変換が対応するのである(本講座第6回). つまり, サイズ情報を捨象した一様変形を考えるなら, H^2 上の等長変換として

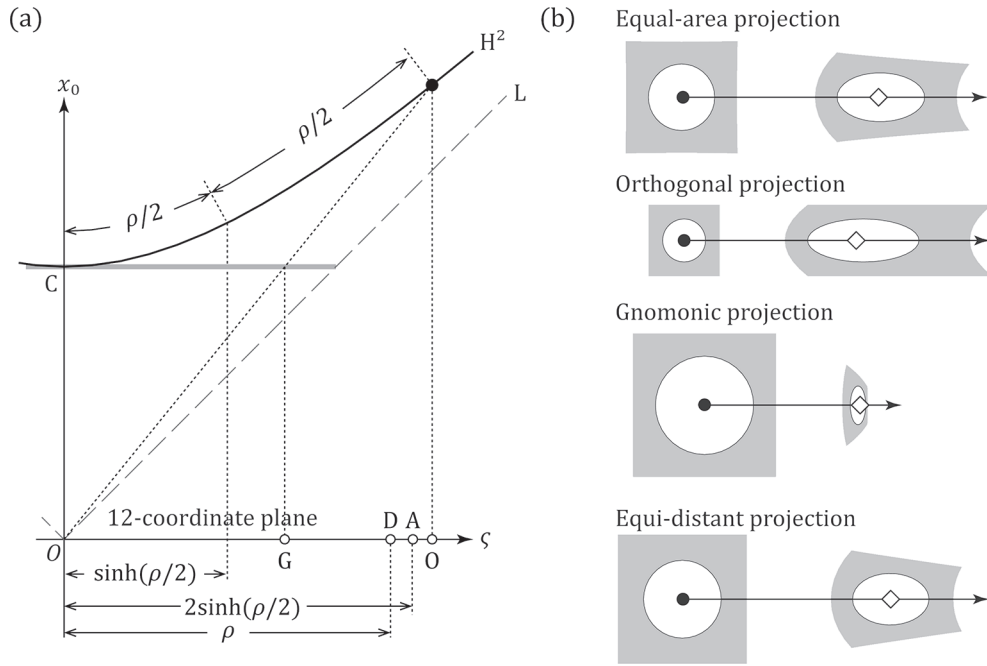


Fig. 2. (a) Projections of the point delineated by a solid circle on H^2 onto a 12-coordinate plane. A, equal-area projection; D, azimuthal equidistant projection; G, gnomonic projection; O, orthogonal projection. L, light cone. The horizontal gray line tangent to H^2 at the point C represents the unit circle centered by the point and lying on the plane parallel to the coordinate plane. (b) Various projections of a square and a circle upon H^2 onto Euclidean plane to depict the isometry along H^2 corresponding to pure shear in the physical space, which is characterized by the parameters, $R_s = 5$ and $\phi_s = 0$. The solid circle and open diamond indicate the point C and x_s on H^2 , respectively. The arrow indicates the maximum stretching orientation in physical space. (a) H^2 上の点(黒丸)の第 12 座標平面(ユークリッド平面)への投影(白丸). A, 等積投影; D, 正距等距離図法; G, ノモン投影; O, 正射影. L は光錐. (b) 実空間における R_s, ψ_s の純剪断に対応した H^2 上の等長変換を 4 種類の投影法で示した図. 黒丸と白菱形は, それぞれ H^2 上の点 C と歪み楕円に対応した点 x_s . 矢印は実空間の最大伸び方向に対応する.

考えればよいということである。さて、任意の 2 点間の距離が保たれるということは剛体的な移動ということであり、 H^2 上のデータ点で定義される多角形の面積もこの移動で不変である。このため、データ点の H^2 からユークリッド平面への等積投影が、歪み解析・変形解析では役に立つわけである。

等積投影は、式 $\zeta = 2\sinh(\rho/2)$ で記述される。これは球から平面への等積投影の式(本講座第 3 回)の $\sin$ を $\sinh$ に置き換えた式に他ならない。この式に $\rho = \log R$ と $\sinh \rho = (e^\rho - e^{-\rho})/2$ をあわせると、 $\zeta = \sqrt{R-1}/\sqrt{R}$ と書けることもわかる。 H^2 上の測地線は、一般には等積投影で曲線に移る。しかし、測地線の極が第 12 平面上にあるなら、その測地線は点 C を通り、等積投影で投影中心を通る直線に移る。投影中心は点 C に対応し、実空間の単位円を表す。なお、Fig. 2a では H^2 に沿った距離 $\rho/2$ が H^2 上の場所により異なる長さとして描かれている。この図は円筒座標の ζx_0 平面の様子を表している。この面は第 0 座標を含むため非ユークリッド空間である。この図で H^2 に沿った Lorentz 距離が $\rho/2$ と等しいにもかかわらず違う長さの曲線で描かれているのは、非ユークリッド平面上の図形をユークリッド平面に描いたために現れたゆがみである。

実空間における純剪断に対応した H^2 上の等長変換を、この投影法で示したのが Fig. 2b の最上段である。四角い灰色

領域と白丸の領域が、この変換でゆがんだように描かれている。等長変換では任意の 2 点間の Lorentz 距離が保存するので、 H^2 上の図形は実際にはゆがんではいない。

球面上の余緯度と経度に対応するのが、 H^2 上の ρ と ψ である。それらの値を等間隔にとった等積投影ネットを Yamaji (2008) が作成した。その電子ファイルは [URL1] から入手できる。楕円のアスペクト比が 1 から 10 までの整数で、 ψ が 10° 間隔の場合のネットを Fig. 3 に示す。Rf/ ϕ 歪み解析のときには、このネットにデータをプロットし、Rf/ ϕ 歪み解析に適したデータであるかどうかを、また、データ点のひろがりを検討することができる(本講座第 4 回)。そうしたプロットをしてくれるフリーのソフトウェアも存在する [URL2, URL3]。

2.2 正射影

H^2 から第 12 座標平面への正射影(Fig. 2a)は、式 $\zeta = \sinh \rho = (R-1/R)/2$ によって表される。じつは球から平面への正射影の式の $\sin$ を $\sinh$ にするとこの式になる。次にしめすように、この投影は純剪断のときに便利である。純剪断に対応した Minkowski 空間の線形写像を本講座第 4 回で定義した行列 T_{ps} で表すと、純剪断に対応する等長変換は $x_f = T_{ps} x_i$ である。歪み楕円のアスペクト比の対数を ρ_s 、長軸方向を表す角の 2 倍を ψ_s とすると、この変換行列は

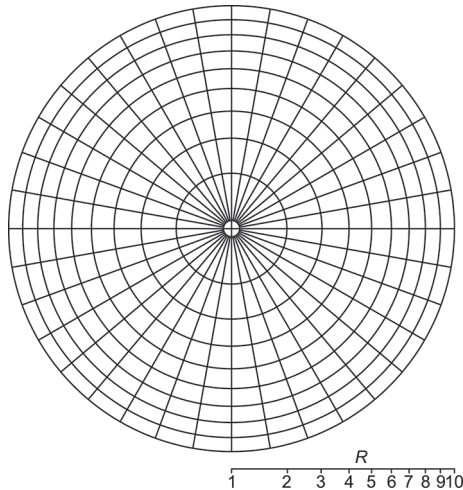


Fig. 3. Equal-area net for strain and deformation analyses (Yamaji, 2008). The center of the net correspond to circles ($R = 1$) in physical space. 歪み解析・変形解析のための等積ネット。中心点は実空間の円 ($R = 1$) に対応する (Yamaji, 2008)。

$$T_{ps} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_s & -\sin \psi_s \\ 0 & \sin \psi_s & \cos \psi_s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cosh \rho_s & \sinh \rho_s & 0 \\ \sinh \rho_s & \cosh \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_s & \sin \psi_s \\ 0 & -\sin \psi_s & \cos \psi_s \end{pmatrix} \quad (3)$$

である(本講座第4回)。したがって、変位ベクトルは $\mathbf{u} \equiv \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i = (T_{ps} - \mathbf{I})\mathbf{x}_i$ である。これに式(3)を代入して整理すると、その第1、第2成分は

$$u_1 = (\sinh \rho_s \cos \psi_s)x_0 + \cos^2 \psi_s (\cosh \rho_s - 1)x_1 + \sin \psi_s \cos \psi_s (\cosh \rho_s - 1)x_2 \quad (4)$$

$$u_2 = (\sinh \rho_s \sin \psi_s)x_0 + \sin \psi_s \cos \psi_s (\cosh \rho_s - 1)x_1 + \sin^2 \psi_s (\cosh \rho_s - 1)x_2 \quad (5)$$

となる。ただし煩雑さを避けるため、第*i*成分(x_i)をここでは x_i と書いた(ここではローマン体の*i*は変形前の量であることを表し、イタリック体のほうはベクトル成分の番号)。式(4)および(5)から $u_2/u_1 = \tan \psi_s$ となつて、 H^2 上の点を第12座標平面に正射影した影は、この平面上の場所によらず ψ_s の方向に動く。つまり、歪み楕円の長軸方向を固定したまま歪みが増大するなら、 $\mathbf{x}_f$ の正射影は、第1座標軸から ψ_s だけ離れた方向に直線的に動く。このことを示したのが Fig. 4 である。 H^2 を真上から見下ろすなら、純剪断に対応した H^2 上の軌跡は直線的である。逆にそのように直線的な軌跡をもつ実空間の非圧縮の変形は、純剪断である。

正射影のこうした性質を利用して、本講座の第1回で紹介した極分解定理($\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$)と対応した、 H^2 上の等長変換を考えることができる(Yamaji, 2013b)。体積変化を

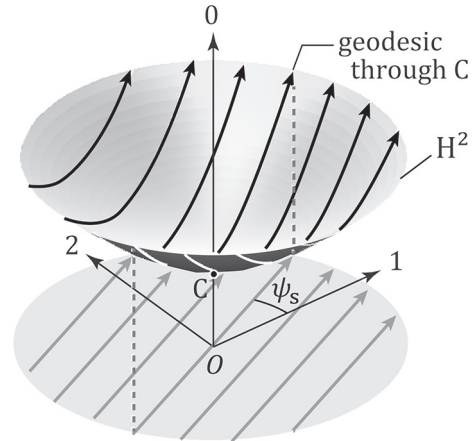


Fig. 4. Schematic illustration of the isometry (solid arrows) on H^2 corresponding to pure shear. Gray arrows represent the orthogonal projections of the solid arrows on a 12-coordinate plane. The angle, ψ_s , represents twice the maximum stretching orientation in the physical space. 実空間における純剪断に対応した H^2 上の等長変換をあらわす黒い太線の矢印。その第12座標平面への正射影は平行線になる。実空間における $\mathbf{U}$ の最大伸び方向をあらわす角の倍が ψ_s 。

無視して $\det \mathbf{F} = 1$ とするなら、 $\mathbf{U}$ も $\mathbf{V}$ も純剪断である。したがってその場合、純剪断してから剛体回転するのと ($\mathbf{R}\mathbf{U}$)、剛体回転してから純剪断するのと ($\mathbf{V}\mathbf{R}$)、結果が同じになるというのが極分解定理の主張である。非圧縮変形の極分解を H^2 上の等長変換とみなすこの観点を、本講座では次回利用する。純剪断歪みの増大にともなつて、正射影した点は直線的に動く。 $\mathbf{R}$ があらわす剛体回転は、Minkowski 空間では第0座標軸まわりの剛体回転である。したがって、式 $\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ がなりたつたら、Fig. 5 にしめされた2つの灰色の三角形は合同図形である。

【問題】 歪みマーカーを、それにフィッティングした楕円で代用して考える。そして、その変形前のアスペクト比と長軸方向について、妥当な推定ができるとする。それらの変形後の値は既知であるとする。純剪断を仮定すると、歪み楕円のアスペクト比と長軸方向を決定するには、マーカーは少なくともいくつ必要だろうか。

【答え】 問われているのは、 $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{x}_f$ のペアが最小で何組あれば、純剪断のパラメータ ρ_s , ψ_s が決定できるかということである。Fig. 5 に示すように、純剪断なら、 H^2 上の軌跡を正射影すると直線になる。マーカーの変形前後の形にフィッティングした2つの楕円が与えられているわけだが、それらに対応した H^2 上の2点は、その直線上に正射影される。それら2点があれば平面上の直線の方法が決まるので、上の議論によりマーカー1つで ψ_s が決まる。楕円の長軸を測る基準方向をその方向に設定し直すと、

$$\mathbf{x}_f = \begin{pmatrix} \cosh \rho_s & \sinh \rho_s & 0 \\ \sinh \rho_s & \cosh \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_i$$

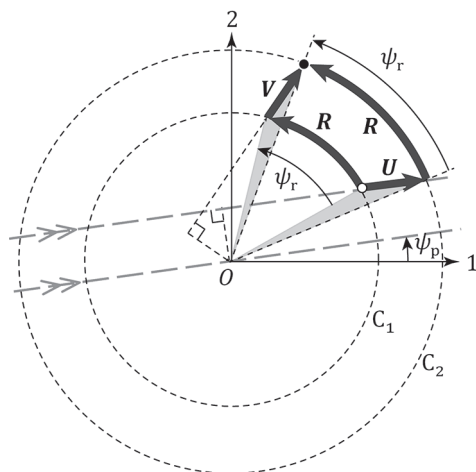


Fig. 5. Orthogonal projection of H^2 on a 12-coordinate plane, illustrating the polar decomposition, $F = RU = VR$, for isochoric deformation. Open and solid circles indicate the points that represent the pre- and post-deformation ellipses, respectively. Parallel gray dashed lines represent the pure shear represented by U . 非圧縮変形のための極分解 $F = RU = VR$ を説明するための、 H^2 の第 12 座標平面への正射影図。白丸と黒丸が、それぞれ変形前後の楕円に対応。灰色の破線は平行な 2 本の直線で、 U があらわす純剪断による軌跡をしめす。

である(本講座第 4 回)。第 0, 第 1 成分を取り出すと、

$$\begin{aligned} (x_p)_0 &= \cosh \rho_s (x_i)_0 + \sinh \rho_s (x_i)_1 \\ (x_p)_1 &= \sinh \rho_s (x_i)_0 + \cosh \rho_s (x_i)_1. \end{aligned}$$

これから $\cosh \rho_s$ を消去すると

$$\sinh \rho_s = \frac{-(x_p)_1 (x_i)_0 + (x_p)_0 (x_i)_1}{(x_i)_0^2 - (x_i)_1^2}$$

となる。双曲線正弦関数は 1 価関数なので、この式の右辺の値によらず解 ρ_s が必ず存在する。したがって、最小で 1 組あればサイズ情報を捨象した歪み楕円を決定できる。2 組以上あれば、最小自乗的に最適歪み楕円を決定することになる。

2.3 ノモン投影

H^2 からユークリッド平面へのノモン投影では、 H^2 上の点と平面上の点が Fig. 2a のように対応する。式で書くと、 $\zeta = \tanh \rho = (R^2 - 1)/(R^2 + 1)$ である。球面のノモン投影の式(本講座第 3 回)の $\tan$ を $\tanh$ で置き換えるとこの式になる。球のそれでは、球の中心に置かれた光源に照らされて、球面上の点が平面に落とす影がこの投影結果の点であった。 H^2 のノモン投影では、光源にあたる点は Minkowski 空間の原点 O にある。ノモン投影で球面上の測地線である大円は直線に移された。同様に、 H^2 のノモン投影でも、測地線が直線に移る(これは本講座第 4 回で紹介した H^2 上の測地線の定義から明らか)。

ところで魚眼レンズを真下に向けて写真を撮ると、撮影中心である足もとを中心として地平線が円形に写る。仮にユークリッド平面上でそうした写真を撮ると、無限遠の点が円周

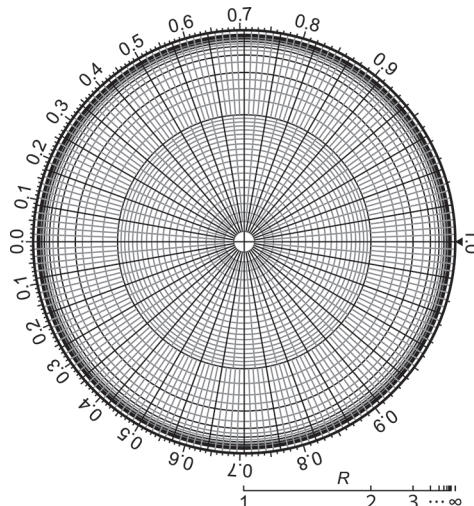


Fig. 6. Gnomonic net for strain and deformation analyses (Yamaji, 2008). The center of the net corresponds to circles ($R = 1$) in physical space. 歪み解析・変形解析のためのノモンネット。中心点は実空間の円($R = 1$)に対応する(Yamaji, 2008)。

上の点として写るわけである。 H^2 のノモン投影は、このことにとえることができる。 H^2 には無限遠点が存在する。すなわち点 C から Lorentz 距離が無限大の点である。そうした無限遠点は、実空間ではアスペクト比が無限大の楕円をあらわすわけだが、それは Minkowski 空間では点 C の位置にある投影平面(Fig. 2a の太線)と光錐 L との交点である。 C から無限に遠い点は C から見てどの方向にも存在するから、この投影により、無限遠点は円周上の点に移る。言い換えると、 H^2 の全域が、半径 1 の円盤に移るわけである。

魚眼レンズで撮った写真のゆがみが大きいと同じく、ノモン投影のゆがみも大きい。そのため H^2 上の合同図形が、この投影による歪みで大きく異なった図形にみえる(Fig. 2b)。歪みの大きなこの投影を使う利点は、測地線が直線であらわされることであるが、その性質ゆえに、次回紹介する運動論的渦度解析で役に立つのである。 H^2 上で ρ, ψ を極座標として使い、この投影をしたノモンネットを Yamaji (2008) が提案した。Fig. 6 がそれであるが、この図の外側の円に沿って配置された数値は、次回紹介する運動論的渦度をあらわす。ノモンネットの電子ファイルは[URL4]から入手できる。

2.4 その他の投影法

H^2 上の点 C からの Lorentz 距離 ρ を、投影中心からのユークリッド距離とする正距方位図法(azimuthal equidistant projection)は、双曲幾何学との関係に気づかれないまま、Elliott (1970) によって R/ϕ 歪み解析に利用された。また、Yamaji and Masuda (2005) が堆積物の粒子ファブリックを図解であらわすために利用した。この図法を、Elliott プロットともよぶ。この投影法は誤解を招きやすい名前を持っている。点 C から H^2 上の任意の点までの Lorentz 距離はゆがみなく投影されるのだが、点 C をのぞく H^2 上の任

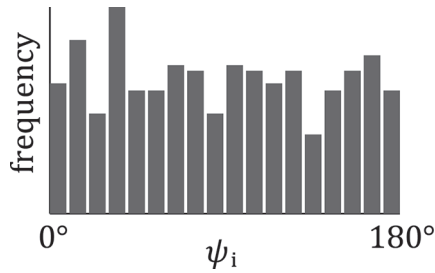


Fig. 7. Histogram of pre-strain major-axis orientations inferred using the θ -curve method. θ -curve 法で計算した変形前のマーカーの長軸方向のヒストグラム.

意の2点間の Lorentz 距離は投影で伸縮してしまうのである。粒子ファブリックのように形成機構がよくわからない現象では、ファブリックを図で表現する場面で、この投影法は簡潔さゆえに有用である。しかし歪み解析では、歪み量が Lorentz 距離とイコールになるというよい性質がある。等積投影なら、データ点のばらつき具合が変形前後で保存することにこの性質が利用できているが、正距方位図法ではその良さが生かされていない。歪み解析・変形解析では、単純さをのぞいて正距方位図法にメリットはない。

Reynolds(1993)は他にステレオ投影とメルカトル投影を紹介している。しかし、それらを歪み解析・変形解析に利用するメリットは発見されていない。

3. Rf/φ歪み解析：θ-curve 法

Rf/φ 歪み解析にはいくつかの解法がある。解くべき問題は、変形後のマーカーのアスペクト比と長軸方向という n 組のデータ $(R_f^{(1)}, \phi_f^{(1)}), \dots, (R_f^{(n)}, \phi_f^{(n)})$ が与えられたとして、歪み楕円のアスペクト比と長軸方向を求めよ、というものがある。これを解くには一様な純剪断を仮定したうえで、変形前のマーカー群について何らかの統計的な性質を仮定することになる。まずは、理論的に平易な Lisle(1977a) の θ -curve 法から解説し、その後で代数的方法を説明する。前回同様、変形前後のパラメータをそれぞれ添え字 i, f で区別し、また、歪み楕円のパラメータには添え字 s を付けることにする。

3.1 原理

与えられた n 組のデータから、 θ -curve 法は逆問題を解くことにより、歪み楕円の最適なパラメータ R_s, ϕ_s を決定する。その際、変形前にマーカーの長軸がどの方向にも一様に分布していたという仮定をおく。変形後の楕円のパラメータから変形前の楕円のパラメータを求める逆純剪断の式は、この講座の第3回の Fig. 7 に示したように、順方向の純剪断の式の ψ_s を $\psi_s + \pi$ で置換した

$$\cosh \rho_i = \cosh \rho_f \cosh \rho_s - \sinh \rho_f \sinh \rho_s \cos(\psi_f - \psi_s - \pi) \quad (6)$$

$$\sinh \rho_i \sin \psi_i = \sinh \rho_f \sin(\psi_f - \psi_s - \pi). \quad (7)$$

という式である。これらの右辺には変形後の楕円と歪み楕円

にかかわるパラメータ、左辺には変形前の楕円にかかわるパラメータがあるから、歪み楕円のパラメータ ρ_s と ψ_s の値を適当に仮定すると、これらの式により変形前の ρ_i と ψ_i が算出できる。こうして変形前の n 個のマーカーのパラメータの組 $(\rho_i^{(1)}, \psi_i^{(1)}), \dots, (\rho_i^{(n)}, \psi_i^{(n)})$ が得られる。これらは、未知数である歪み楕円のパラメータを適当に仮定して算出した暫定値である。さて、変形前、マーカーの長軸方向は一様分布であったという仮定は、 $\psi_i^{(1)}, \dots, \psi_i^{(n)}$ のヒストグラムが Fig. 7 のようにでこぼこせず、横一線であったという条件に読み替えることができる。計算結果から作成したヒストグラムがでこぼこしているのは、 ρ_s, ψ_s の値として不適切な選択をしたからである。ヒストグラムの横軸が m 等分されていて、その第 k 区画に $n^{(k)}$ 個の ψ_i があるとすると、でこぼこ加減、すなわち一様分布からのずれは、 χ^2 (カイ2乗) 値

$$\chi^2(\rho_s, \psi_s) = \sum_{k=1}^m \left[\frac{n^{(k)} - n/m}{n/m} \right]^2 \quad (8)$$

で評価することができる。この値は歪み楕円の仮定したパラメータに依存するので、それらの関数であることが明らかになるように、左辺に (ρ_s, ψ_s) を付けた。さて、ヒストグラムが横一線なら $n^{(k)} = n/m$ であるはずで、式(8)の右辺の分子は、この比からの $n^{(k)}$ のずれを示す。このずれがゼロに近いほど、でこぼこが小さい。どんな (ρ_s, ψ_s) を使うかによって、 χ^2 の値は異なる。そこで、 χ^2 を最小にする (ρ_s, ψ_s) が、求むべき歪み楕円の最善のパラメータであるとするのが θ -curve 法である。

同一の Rf/φ データを、 θ -curve 法と hyperbolic vector mean method で処理した結果を Fig. 8a にしめす。この図には、後者で推定した歪み楕円の 95% 信頼範囲も示されている。それら2つの方法は、変形前のマーカーたちの統計的性質について異なる仮定をおいているので、計算結果はその図に見るように一致しないものの、どちらもこの人工データを生成したときに仮定した真の歪み楕円に近い解をさぐりあてている。 θ -curve 法の解は、上記の 95% 信頼範囲に含まれる。しかし、 θ -curve 法より hyperbolic vector mean method のほうが近い。

Rf/φ 歪み解析法のなかでも、 θ -curve 法は原理がわかりやすい解法である。せっかく算出した $\rho_i^{(1)}, \dots, \rho_i^{(n)}$ を活用せず、捨ててしまうのが単純さの秘訣なのだが、そのことが数値的な不安定性を惹起し、誤差解析を困難にするのである。それについて次に説明する。

3.2 問題点

Rf/φ データから θ -curve 法で歪み楕円のアスペクト比と長軸方向を決めることはできるが、その解は数値的に不安定である。その結果、誤差評価が簡単ではないことを説明する。Fig. 9 の Elliott プロットの点 P は、あるマーカーの変形後の形を表してとする。 θ -curve 法では逆問題を解いてこの点を見つけるわけだが、 χ^2 値を計算するために試みにあたえる歪み楕円を表す Elliott プロット上の点を、トライアル点とよぶことにする。トライアル点がこの図の A, B, C, D と、点 P を通過して連続的に変化するとしよう。す

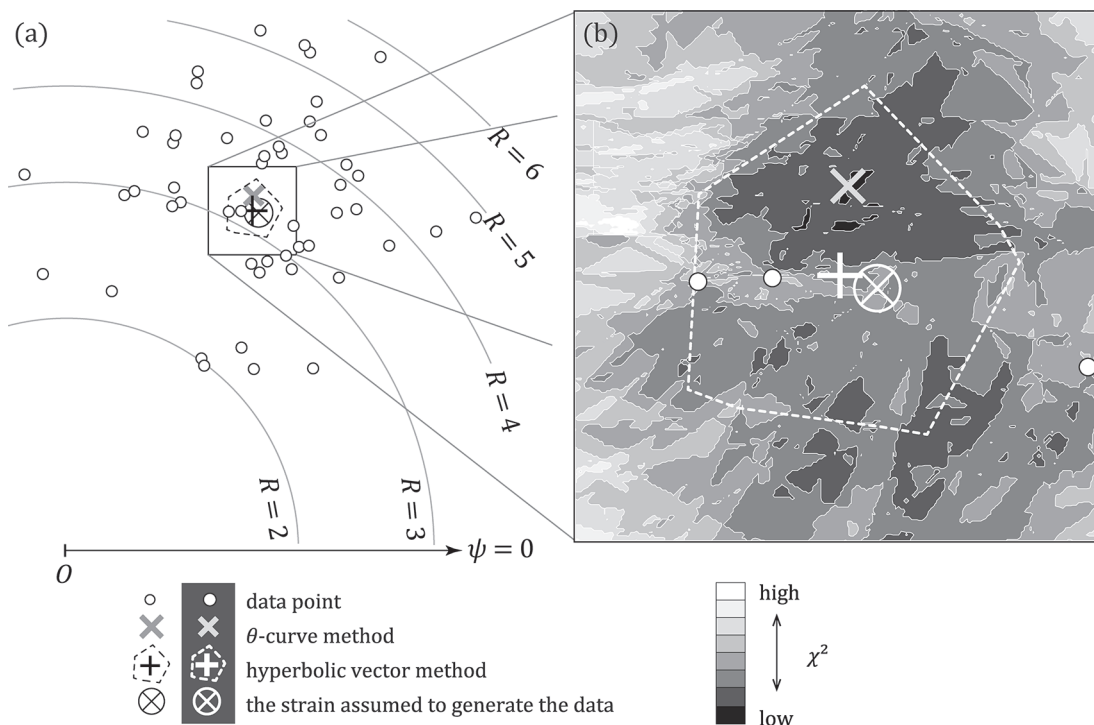


Fig. 8. (a) Equal-area projection showing the 50 Rf/ϕ data that were generated with the assumed strain indicated by an o-plus mark. The optimal point determined via the θ -curve method is indicated by an x-mark. The optimal strain and its 95% confidence region (dotted line) determined via the hyperbolic vector mean method are indicated as well. (b) Close-up of the region around the assumed point. The contour lines of the function in Eq. (8) shown by equal-area projection. (a) 丸に×印の点がしめす歪みを仮定して生成した 50 個の Rf/ϕ データを等積投影で表示。また、hyperbolic vector mean method で推定された歪みとその 95% 信頼範囲(点線)および θ -curve method で決定された最適解がしめされている。(b) 仮定した点の周囲のクローズアップおよび θ -curve method の目的関数(Eq. 8)の等値線。

るとこのマーカーの変形前の形を表す点は、式(6),(7)で計算できるが、それらの式は ρ_s , ψ_s について連続である。したがって、変形前のマーカーの形をあらわす点は、 A' , B' , C' , D' と連続的に変化する。ところがそれらの点の ψ 値をあらわす点 A'' , B'' , C'' , D'' は、途中の B' と C' のあいだでジャンプするのである。その結果、 χ^2 値も、トライアル点がデータ点に一致するところで不連続になるのである。この不連続性が、解の不安定性の原因になる。すなわち、Elliott プロットの上に χ^2 の等値線を描くなら、最適な歪み楕円を表す点を中心したなめらかな閉曲線にはならず、同じ χ^2 値を持つ大小の領域が多数現れる(Fig. 8b)。これが解の不安定性を生じさせ、誤差解析をも妨げるのである(Yamaji, 2005)。もう一度 Fig. 9 を見ていただきたい。 B' と C' のあいだに不連続はない。不連続は、式(6), (7)でせっかく算出された ρ_i と ψ_i のうち、前者を捨ててしまうことから生じるので、解の不安定性は θ -curve 法の本質的弱点といえる。

4. Rf/ϕ 歪み解析：Shimamoto-Ikeda 法

Rf/ϕ 歪み解析には、代数的方法(algebraic techniques)という解法のグループがある。そのなかで最初に提案されたのが Shimamoto-Ikeda 法である(Shimamoto and Ikeda, 1976)。2 番目が一般化平均法(Mulchrone et al., 2003)で

ある。じつは、hyperbolic vector mean method(Yamaji, 2008)もこのグループに属する。これら 3 つが数学的には同じであることが、Yamaji(2013a)により証明された。ただし、Shimamoto-Ikeda 法はもとの定式化のままでは、分解能に異方性があるために誤差評価がしにくい(Yamaji, 2013a)。Shimamoto-Ikeda 法について、これらのことを説明する。

本講座第 3 回で、楕円をあらわす形状行列を定義した。アスペクト比が R 、長軸方向が ϕ である楕円のそれは、

$$N = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (9)$$

である。Shimamoto-Ikeda 法とは、変形後の n 個の楕円をあらわす形状行列を $N_f^{(1)}, \dots, N_f^{(n)}$ とすると、その算術平均

$$\bar{N}_f \equiv \frac{1}{n} [N_f^{(1)} + \dots + N_f^{(n)}] \quad (10)$$

が歪み楕円をあらわすという方法である(Shimamoto and Ikeda, 1976)。歪みマーカーにフィッティングした楕円のアスペクト比 R と長軸方向 ϕ から、式(9)により形状行列を簡単に計算できる。そして式(10)により $\bar{N}_f$ も容易に算出できる。これは実対称行列なので、2 つの実固有値をもつ。その小さい方に対応する固有ベクトルが、歪み楕円の長軸方向

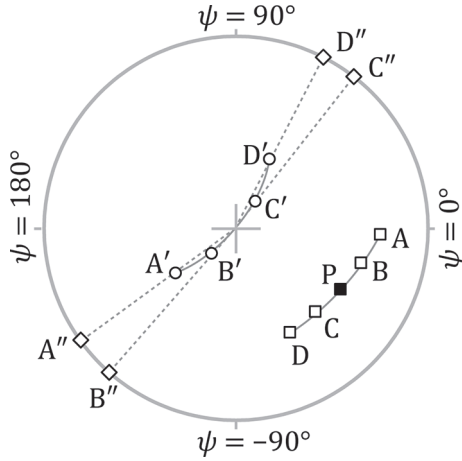


Fig. 9. Illustration of the solution of the θ -curve method showing computational instability. P = the data point corresponding to an elliptical strain marker. The line from A through C indicates the orbit of a trial solution of the method, whereas the line from A' through D' indicates the pre-strain shapes and orientations of the marker. The points from A'' through D'' indicate the ψ values of the orientations. θ -curve 法の解の不安定性を説明するための Elliott プロット。太線の円の中心の十字が極座標の原点。点 P が求むべき歪み楕円をあらわす点。真の歪み楕円のパラメータを使ってこの点を変形前の位置に逆写像すると原点に移る。点 A～点 D を順に歪み楕円をあらわす点の候補として真の歪み楕円をあらわす点 P を逆写像した結果が点 A'～点 D'。それらの ψ 値をあらわすのが点 A''～点 D''。

ϕ_s である。しかし Shimamoto and Ikeda (1976) は歪み楕円のアスペクト比 R_s を $\bar{N}_f$ から算出する手続きを詳細に書いてないために、誤解を与えることがある。じつは 2 つの固有値の比の平方根が R_s に一致するのである。

Shimamoto-Ikeda 法は、変形前のマーカーの形状について次の仮定をおく。変形前の楕円をあらわす形状行列を $N_i^{(1)}, \dots, N_i^{(n)}$ とし、また、 α を正の数として、

$$\bar{N}_i \equiv \frac{1}{n} [N_i^{(1)} + \dots + N_i^{(n)}] = \alpha I \quad (11)$$

がなりたつと仮定するのである。この仮定のもと、 $\bar{N}_f$ の固有値問題を解くことで歪み楕円が決定できることを、Shimamoto and Ikeda (1976) とは違うすじみちで証明する。

4.1 証明

本講座の初回で紹介したように、変形勾配テンソル F の行列式は、変形にともなう体積変化率を表す。2次元変形では、面積変化率である。体積ないし面積が変形前後で同じなら、 $\det F = 1$ である。形状行列は単位円と同じ面積を持つ楕円を表す。歪みマーカーが n 個あって、その第 k 番のマーカーにフィッティングした楕円の形状行列を $N_i^{(k)}$ とすると、 $\det N_i^{(1)} = \dots = \det N_i^{(n)} = 1$ というのである。一般に

$$\det \left[\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \alpha^2 (ad - bc)$$

であるから、 2×2 の行列を α 倍すると、その行列式は α^2

倍になる。式(11)の行列式は、

$$\det \bar{N}_i = \alpha^2 \det I = \alpha^2. \quad (12)$$

そこで、

$$\bar{N}_i \equiv \frac{\bar{N}_i}{(\det \bar{N}_i)^{1/2}} = \frac{\bar{N}_i}{\alpha}$$

とすると、 $\det \bar{N}_i = 1$ である。

変形後の形状行列を $N_f^{(1)}, \dots, N_f^{(n)}$ とする、また、それらの平均を $\bar{N}_f = [N_f^{(1)} + \dots + N_f^{(n)}]/n$ とする。形状行列に関する変換則は、本講座第3回 §3 で導いたように、 $[N_f^{(k)}]^{-1} = F[N_i^{(k)}]^{-1}F^T$ である。両辺の逆行列をとると、 $N_f^{(k)} = [F^T]^{-1}N_i^{(k)}F^{-1}$ であり、 k について平均をとると、

$$\bar{N}_f = [F^T]^{-1}\bar{N}_iF^{-1} \quad (13)$$

となる。変形による面積や体積の変化がないと仮定するので $\det F = 1$ である。一般に $\det F = \det F^T = 1 / \det F^{-1} = 1 / \det (F^T)^{-1}$ であり、また、行列の積の行列式は行列式の積にひとしい。そこで、式(13)の両辺で行列式をとると式(12)により、

$$\det \bar{N}_f = \det \bar{N}_i = \alpha^2. \quad (14)$$

つまり、変形前後で平均形状行列の行列式の値が保存される (Wheeler, 1984)。

本講座第1回のように、変形前後の位置ベクトルをそれぞれ ξ, x とする。すなわち、 $x = F\xi$ である。変形前の楕円の方程式は、

$$\begin{aligned} \xi^T N_i^{(1)} \xi &= 1 \\ &\vdots \\ \xi^T N_i^{(n)} \xi &= 1 \end{aligned}$$

である。辺々足し合わせて n で割ると、 $\xi^T \bar{N}_i \xi = 1$ となる。式(11)を代入すると、 $\alpha \xi^T \xi = 1$ 。これは変形前に球または円であった物体をあらわす。この式に $\xi = F^{-1}x$ を代入すると、その物体の変形後の形をあらわす式

$$x^T [\alpha (F^{-1})^T F^{-1}] x = 1.$$

になる。この α を式(14)により、 $(\det \bar{N}_f)^{1/2}$ に置き換えると、

$$x^T [(\det \bar{N}_f)^{1/2} (F^{-1})^T F^{-1}] x = 1. \quad (15)$$

さて、変形後の各楕円の方程式は、

$$\begin{aligned} x^T N_f^{(1)} x &= 1 \\ &\vdots \\ x^T N_f^{(n)} x &= 1 \end{aligned}$$

であるから、辺々足し合わせて n で割ると、 $x^T \bar{N}_f x = 1$ 。これと式(15)を比べることにより、式

$$\frac{\bar{N}_f}{(\det \bar{N}_f)^{1/2}} = (F^{-1})^T F^{-1}$$

がでてくる。左辺は観測可能な量 $N_f^{(1)}, \dots, N_f^{(n)}$ から算出で

きる量である。この左辺を、

$$\tilde{N}_f = \frac{\tilde{N}_f}{(\det \tilde{N}_f)^{1/2}} \quad (16)$$

とすると、 $(\tilde{N}_f)^{-1} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ 。左辺はフィンガー・テンソル(本講座第1回の §8)である。Rf/φ 歪み解析では純剪断を仮定しているので、 $\mathbf{F}$ は対称テンソルである。ゆえに、式 $\mathbf{F}^2 = \tilde{N}_f^{-1}$ が得られる。したがって、 $\tilde{N}_f$ の固有値問題を解くことにより $\mathbf{F}$ が求まり、そして歪み楕円が求まる。すなわち、その固有値の平方根が R_s 、 $1/R_s$ に等しく、固有ベクトルが主歪み軸を表す。すなわち ϕ_s が分かる。Shimamoto-Ikeda 法では、このようにして歪み楕円が決定される。しかし固有値が R_s と $1/R_s$ に一致するのは $\tilde{N}_f$ の方であって、 $\tilde{N}_f$ の固有値は αR_s と α/R_s であることに注意しよう。 $\tilde{N}_f$ の固有値の比の平方根が R_s になるわけである。

4.2 双曲幾何との関係

Shimamoto-Ikeda 法と hyperbolic vector mean method の関係を見る。まず、面積が一定の楕円をあらわす形状行列は実対称行列であり、また、 $\tilde{N}$ も同様である。つまり両者とも

$$\begin{pmatrix} f & h \\ h & g \end{pmatrix}$$

の形に書くことができることに注意する。しかも、面積一定という条件は、その行列式について式

$$fg - h^2 = 1$$

が成り立つことを要請する。ここで f, g, h を直交デカルト座標にとると、これは曲面の方程式である。言い換えると、この曲面上の点と面積一定の楕円とが 1 対 1 対応するわけである。したがって、この曲面を Shimamoto-Ikeda 法のパラメータ空間と見なすことができる。これはどんな曲面だろうか。その検討のために、形状行列の成分を、

$$f = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \cos 2\phi \quad (17)$$

$$g = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \cos 2\phi \quad (18)$$

$$h = \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right) \sin 2\phi \quad (19)$$

と書く(本講座第3回 §3.1)。 $R \geq 1$ という範囲では $R + 1/R > R - 1/R \geq 0$ なので、 $f > 0$ かつ $g > 0$ である。円の形状行列は単位行列なので、 $(f, g, h) = (1, 1, 0)$ が円を表す。ここで、

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{f+g}{2} \\ X_1 &= \frac{-f+g}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$X_2 = -h$$

と、変数を置き換えてみる。これらの式から

$$f = X_0 - X_1 = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$g = X_0 + X_1 = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$h = -X_2 = (0, 0, -1) \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

が導かれるので、式 $fg - h^2 = 1$ にこれらを代入することにより、

$$-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = -1 \quad (X_0 > 0) \quad (24)$$

を得る。括弧内の不等式は $R \geq 1$ に由来して、式(20)からでてくる。式(24)は H^2 の定義式にほかならない(式2)。したがって、Shimamoto-Ikeda 法のパラメータ空間は H^2 を $O-fgh$ 座標で表した曲面にほかならない(Fig. 10)。 $\mathbf{X}$ をこの後、Minkowski 空間の位置ベクトルとみなす。

さて、 $\mathbf{X}$ が H^2 上の点を表すなら、式(20)~(24)から

$$\text{trace } N = f + g = 2X_0 \quad (25)$$

$$\det N = fg - h^2 = X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = -\mathbf{X} \circ \mathbf{X} = \|\mathbf{X}\|^2 \quad (26)$$

となる。最後の $\|\mathbf{X}\|$ は $\mathbf{X}$ の Lorentz ノルムである(本講座第4回)。行列の各成分の自乗の和をその行列の Frobenius ノルムというが(その平方根を Frobenius ノルムとする教科書もある)、形状行列では、

$$\begin{aligned} \text{Frob } N &= f^2 + g^2 + 2h^2 \\ &= 2(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2) = 2\|\mathbf{X}\|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

したがって、 $\mathbf{X}$ のユークリッド・ノルム $\|\mathbf{X}\|$ の自乗は形状行列の Frobenius ノルムの半分にひとしく、Lorentz ノルム $\|\mathbf{X}\|$ の自乗は形状行列の行列式に等しい。

式(21)~(23)により、行列式が1である形状行列 N と Lorentz ノルムが1である $\mathbf{X}$ のあいだに

$$N = \begin{pmatrix} X_0 + X_1 & -X_2 \\ -X_2 & X_0 - X_1 \end{pmatrix}$$

という対応関係があることがわかる。 $\bar{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}^{(1)} + \cdots + \mathbf{X}^{(n)}]/n$ とすると、この平均ベクトルは位置ベクトルとして H^2 から離れた点を示すものの、実対称行列と対応づけられるのである。すなわち、

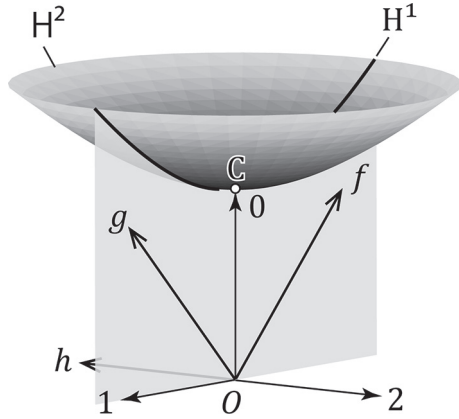


Fig. 10. Relationship between H^2 and the rectangular Cartesian coordinates, $O-fgh$, defined by the components of a shape matrix, f, g and h . The f - and g -axes lie on the $O-01$ plane, and the h -axis points in the direction opposite the second coordinate axis. Note that $|f| = |g| = \sqrt{2}$ and $|h| = 1$. 形状行列の成分 f, g, h を直交座標にした空間と H^2 との関係。 f 軸と g 軸は $O-12$ 平面の上にあり、 h 軸は第 2 座標軸と平行で反対向き。ただし、 $|f| = |g| = \sqrt{2}$ かつ $|h| = 1$ であることに注意。

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{1}{n} \left[\begin{pmatrix} X_0^{(1)} + X_1^{(1)} & X_2^{(1)} \\ -X_2^{(1)} & X_0^{(1)} - X_1^{(1)} \end{pmatrix} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} X_0^{(n)} + X_1^{(n)} & -X_2^{(n)} \\ -X_2^{(n)} & X_0^{(n)} - X_1^{(n)} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \bar{X}_0 + \bar{X}_1 & -\bar{X}_2 \\ -\bar{X}_2 & \bar{X}_0 - \bar{X}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

さて、 $\bar{X}$ をその Lorentz ノルムで割ると、hyperbolic vector mean

$$\mu = \frac{X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}}{\|X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}\|}$$

になるが (Fig. 11), 式 (16) と (17) から

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} \mu_0 + \mu_1 & -\mu_2 \\ -\mu_2 & \mu_0 - \mu_1 \end{pmatrix}$$

という具合に、 μ と $\tilde{N}$ が 1 対 1 対応することがわかる。 $\mu = (1, 0, 0)^T$ なら $\tilde{N} = I$ なので、Shimamoto-Ikeda 法の仮定 (式 11) は hyperbolic vector mean method の仮定、すなわち点 C が μ_i に一致するという条件と同値である。

さて、本講座第 4 回 §4 の練習問題では、 H^2 上の n 個の点を表す位置ベクトルについて、次の式を導いた：

$$\|X_i^{(1)} + \cdots + X_i^{(n)}\| = \|X_f^{(1)} + \cdots + X_f^{(n)}\|. \quad (29)$$

式 (26) から、これと式 (14) が同値であることがわかる。このこと、 $\bar{X}$ がしめす点が描く図形が、次のように関係する。すなわち、 H^2 上に存在する n 個の点を表す $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ の算術平均が $\bar{X}$ という位置ベクトルである。 H^2 は上に凹の曲面なので、 $\bar{X}$ があらわす点はかならず H^2 より上に存在する (第 1, 2 座標値が同じなら、第 0 座標値がより大きい

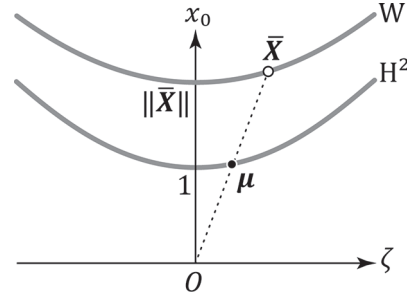


Fig. 11. H^2 and the Wheeler hyperboloid, W . The points, $\bar{X}$ and μ exist on the surfaces, and W is defined by $|X| \equiv \text{const.}$ H^2 と Wheeler 双曲面 (W) の上には、それぞれ点 $\bar{X}$ と μ が乗る。 W は式 $|X| = \text{const.}$ で表される。

という意味)。したがって、 $\|\bar{X}\| \geq 1$ 。ただし等号は $n = 1$ のときになりたつ。実空間における n 個の楕円形マーカーの変形にともなって、対応する n 個の点は H^2 上を移動してゆくが、式 (29) により $\|\bar{X}\|$ の値は変化しない。 $\bar{X}$ と μ はスカラー倍の違いしかないが、その倍率が $\|\bar{X}\|$ という定数である。したがって、変形にともなって μ が H^2 上を移動することで $\bar{X}$ が描く軌跡は、 H^2 を $\|\bar{X}\|$ 倍にした回転双曲面である (Fig. 11)。Wheeler (1984) にちなみ、Yamaji (2013a) はこれを Wheeler 双曲面とよんだ。第 0 座標軸とこの曲面との交点の第 0 座標が $\|\bar{X}\|$ であり、なおかつ $\det \bar{N}$ である。

4.3 座標不変性の原理

Shimamoto-Ikeda 法の定式化では感度に異方性があるが、hyperbolic vector mean method ではそれがない (Yamaji, 2013a)。この違いは何に由来するのだろうか。物理現象の数学的定式化は、座標系の取り方に依存しないようにすべきであるというのが、連続体力学で使われる座標不変性の原理 (principle of coordinate invariance; e.g., Ottosen and Ristinmaa, 2005) だが、この原理をみたすか否かがその答えである。応力解析のときと同様 (Sato and Yamaji, 2006)、歪み解析の理論でもこの原理は重要である (Yamaji, 2015)。なお、この原理は連続体力学の理論 (有理連続体力学；例えば徳岡, 1985) で principle of material frame-indifference や principle of material objectivity とよばれていたものであるが、その名付け親であり、また、有理連続体力学の建設者の一人でもある Walter Noll が、誤解を生みやすいこの名前はまずかったと言っている [URL5]。四半世紀ほど前から、連続体力学では principle of coordinate invariance とよばれるようになった (Barreira, 2012)。

感度の異方性を説明するために、形状行列 N の成分を並べた (f, g, h) を座標値とする直交デカルト座標 $O-fgh$ を考える。マーカーの面積を単位円のそれと同じと仮定するので、その条件 $\det N = fg - h^2 = 1$ を曲面の方程式ととらえると、それは Fig. 12a にしめす曲面である。この面の上の点と形状行列が 1 対 1 対応する。単位円は単位行列であらわされるので、この曲面上の $(1, 1, 0)$ 点が単位円をあわす

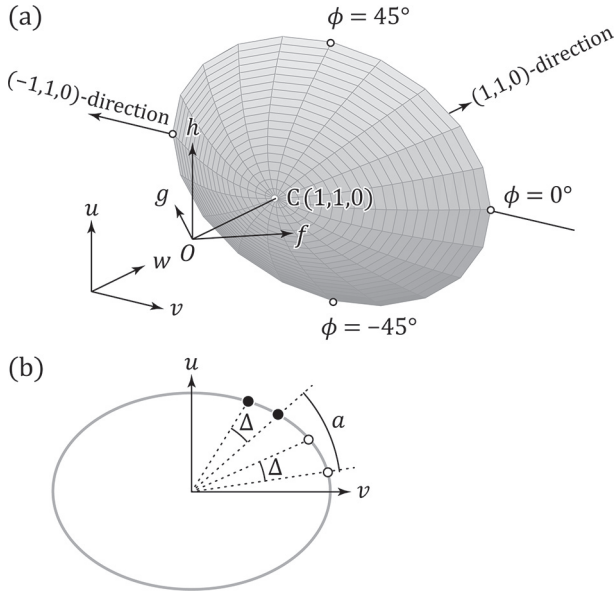


Fig. 12. (a) Diagram showing an elliptical hyperboloid defined by the components f, g and h , of a shape matrix N , where $\det N = fg - h^2 = 1$. The surface has an elliptical cross-section on the plane perpendicular to the $(1, 1, 0)$ -direction. $(1, 1, 0)$ and $(-1, 1, 0)$ are expressions in the $O-fgh$ system. (b) The Schematic illustration of the anisotropic resolution of the Shimamoto-Ikeda method. (a) 形状行列 N の成分 f, g, h を直交デカルト座標としたときに, $\det N = fg - h^2 = 1$ によって定義されるゆがんだ双曲面. $(1, 1, 0)$ and $(-1, 1, 0)$ は $O-fgh$ 座標系での表現. (b) 曲面の $(1, 1, 0)$ 方向に直交する断面は楕円になる.

(Fig. 12a の点 C). 新たに直交デカルト座標 $O-uvw$ を考える. ただし, u 軸, v 軸, w 軸は, それぞれ $O-fgh$ 座標の h 座標方向, $(1, -1, 0)$ 方向と $(1, 1, 0)$ 方向にとる. すると $O-fgh$ 座標系から $O-uvw$ 座標系への座標変換は,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

という変換行列であらわされる. 例えば $O-fgh$ 系の $(1, 0, 0)$ は $O-uvw$ 系の $\mathbf{Q}(1, 0, 0)^T = (0, 1, 1)^T/\sqrt{2}$ に移る. 点 C の $O-uvw$ 座標は $(0, 0, \sqrt{2})$ である. 式(17)~(19)の f, g, h から位置ベクトル $(f, g, h)^T$ を構成し, $\mathbf{Q}$ で変換すると, $O-uvw$ 座標系で媒介変数表示すると, この曲面は

$$\begin{aligned} u &= \left(R - \frac{1}{R}\right) \sin 2\phi = 2 \sinh \rho \sin \psi \\ v &= \sqrt{2} \left(R - \frac{1}{R}\right) \cos 2\phi = 2\sqrt{2} \sinh \rho \cos \psi \\ w &= \sqrt{2} \left(R + \frac{1}{R}\right) = 2\sqrt{2} \cosh \rho \end{aligned}$$

となる. これらの式の最右辺は, $R \pm 1/R$ を双曲線関数に変換する本講座第3回の式(15)と(16)から出てくる. この曲面の w 座標は ϕ に依存せず, R だけで決まる. また, 曲面の uv 平面に平行な断面はアスペクト比が $\sqrt{2}$ の楕円である

(Fig. 12b). つまりこの曲面は elliptical hyperboloid である.

さて, この曲面上の点と形状行列が 1 対 1 対応するので, 2 つのマーカーを楕円で代表させ, それらの楕円のあいだの非類似度を対応する曲面上の 2 点間の距離と定義する. この距離を, まずは素朴にユークリッド距離としてみよう. 2 つの楕円が同じアスペクト比をもち, 長軸方向が $\Delta/2$ だけ異なるとすると, この距離は uv 断面に現れた楕円の上であって, 楕円の中心からみて角度が Δ だけ離れた 2 点である. Fig. 12b の白丸は, これらの点をあらわす. ここで, マーカーの方向を測る基準方向を角度 $a/2$ だけ変えてみる. マーカー自体は変わらなくても, uv 断面の楕円上の対応する 2 点は黒丸に移る. 楕円であるから, 白丸の間隔(ユークリッド距離)と黒丸の間隔は異なる. したがって, マーカーを代表する楕円のあいだの非類似度が, 基準方向の選び方に依存することが分かる. つまり, 形状行列の成分そのものを直交デカルト座標にとるのでは, 座標不変性の原理を満たさない. さて, 歪みの誤差は, 非類似度の小さな歪み楕円の識別可能性にかかわる. したがって, 歪み楕円の分解能が基準方向の選び方に依存することになる. ではどうすべきか.

この不都合の原因は, Fig. 12a に示した曲面が, $(1, 1, 0)$ 方向に対して軸対称ではないからである. 不都合を除くには, elliptical hyperboloid を軸対称の双曲面に矯正すればよい. それは結局, Fig. 10 の双曲面である. またさらに, 楕円を変形させて別の楕円にするときの歪み量を実空間における 2 つの楕円の非類似度にするならば, 結局は H^2 をパラメータ空間として Lorentz 距離を楕円の非類似度とすることになるのである. それらによる定式化では, 基準方向の変更は第 0 座標軸を軸として, H^2 上の点を一定角度回転させることに対応する. それによって H^2 上の点は H^2 からはずれることはなく, また, H^2 上の 2 点 x, y のあいだのユークリッド距離も Lorentz 距離も変化せず, それらのなす角も変化しない. したがって, 座標不変性の原理を満たしている.

複数の変形マーカーが与えられたとして, それらを最もよく説明できる歪みを推定するだけなら, 双曲幾何を持ち出す必要はない. しかし, 誤差を問題にするとすると, 座標普遍性の原理をみたす定式化を考えざるをえず, 双曲幾何による定式化またはそれと等価な定式化が必須になるのである.

5. Rf/φ 歪み解析：一般化平均方法

代数的方法に関する研究の淵源は, 楕円形歪みマーカーのアスペクト比の算術平均と歪み楕円のアスペクト比を比較した, Hossack (1968) の試みである. Lisle (1977b) は算術平均・幾何平均・調和平均のうちで, 最後のものが R_s の近似として最良であることを指摘した. Mulchrone et al. (2003) の研究はこの路線の直系であり, 後述の一般化平均が近似ではなく, R_s に完璧に一致することを見いだした. 以下, まずその解法を紹介し, hyperbolic vector mean method (Yamaji, 2008) と数学的には同一であることを説明する.

彼らは歪みマーカーにフィットさせた楕円を, 楕円の中心

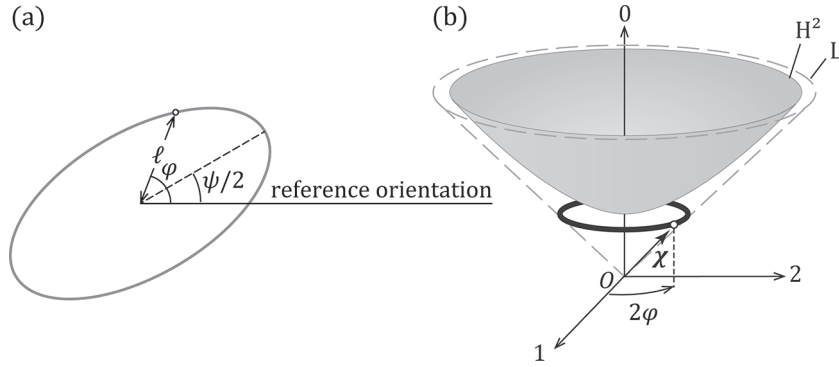


Fig. 13. Illustration of the Mulchrone et al. (2003) method and its formulation using H^2 . (a) An ellipse with the center at the origin of the polar coordinates, $O-l\phi$, in the physical space. (b) The vector, χ , in Minkowski space representing ϕ . Mulchrone et al. (2003)の方法とその H^2 を使った定式化。(a)極座標による実空間の楕円の表現。楕円の中心を原点とする。(b)実空間の偏角 ϕ を表す対応するベクトル χ 。

を原点とした極座標 (ℓ, φ) で表現する。すなわち、

$$[\ell(\varphi)]^{-2} = (\cosh \rho) - (\sinh \rho \cos \psi) \cos 2\varphi - (\sinh \rho \sin \psi) \sin 2\varphi \quad (30)$$

という式をみたす関数 $\ell(\varphi)$ を使うわけである(Fig. 13a)。彼ら自身の定式化はもっと複雑だが、双曲幾何とのつながりがわかるよう、ここでは整理した形でそれを示している(Yamaji, 2013a)。右辺の括弧に入れた部分が、楕円のアスペクト比と主軸方向の情報になっている。この右辺が正符号を持つことは、余弦関数の和の公式でそれを $\cosh \rho - \sinh \rho \cos(\psi - 2\varphi)$ と変形し、 $\cosh \rho > \sinh \rho$ および $\cos(\psi - 2\varphi) \leq 1$ を使って示すことができる。さて、 n 個の歪みマーカーがあるとして、おのおのに楕円をフィッティングしたとしよう。それらの楕円をあらわす関数を $\ell^{(1)}(\varphi), \dots, \ell^{(n)}(\varphi)$ とすると、その指数2の一般化平均(generalized mean) $\bar{\ell}(\varphi)$ は、

$$[\bar{\ell}(\varphi)]^{-2} = \frac{1}{n} \left\{ [\ell^{(1)}(\varphi)]^{-2} + \dots + [\ell^{(n)}(\varphi)]^{-2} \right\} \quad (31)$$

という式で定義される。Mulchrone らは $\bar{\ell}(\varphi)$ が歪み楕円を表すことを示したのである。

彼らの歪み楕円が、hyperbolic vector mean method で決定した歪み楕円に一致することを次にしめす。そのために、われわれのMinkowski空間に、位置ベクトル $\chi = (1, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi)^T$ を考える。その終点はFig. 13bのように、第12座標平面から高さ1にある単位円上の1点である。 H^2 上の点を $X = (\cosh \rho, \sinh \rho \cos \psi, \sinh \rho \sin \psi)^T$ とすると、これらのLorentz内積(式1)に負号を付けたもの $-X \circ \chi$ は、式(30)の右辺に一致する。そこで、実空間の n 個の楕円を、 H^2 上の点の n 本の位置ベクトル $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ であらわすと、それらに関するMulchrone らの式(30)が、

$$[\ell^{(1)}(\varphi)]^{-2} = -X^{(1)} \circ \chi$$

$\vdots$

$$[\ell^{(n)}(\varphi)]^{-2} = -X^{(n)} \circ \chi$$

のように単純化される。これらの左辺と右辺で算術平均をとると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left\{ [\ell^{(1)}(\varphi)]^{-2} + \dots + [\ell^{(n)}(\varphi)]^{-2} \right\} \\ &= -\frac{1}{n} [X^{(1)} + \dots + X^{(n)}] \circ \chi \end{aligned} \quad (32)$$

この式の左辺は、式(31)の右辺に一致する。また、この右辺は、 $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ のhyperbolic vector mean μ を使って、

$$-\left(\frac{\|X^{(1)} + \dots + X^{(n)}\|}{n} \right) \mu \circ \chi$$

と書き換えることができる。括弧の中身と μ は、歪みマーカーが与えられれば値が定まる、それぞれスカラー量とベクトル量である。したがって、式(31)と(32)をあわせると、結局

$$[\bar{\ell}(\varphi)]^{-2} \propto -\mu \circ \chi$$

となる。記号 $\propto$ は、 φ の値によらず比例関係が成り立つことを意味する。この式は、Mulchrone et al. (2003)の方法で決定した歪み楕円と、hyperbolic vector mean methodで決定したそれとが相似形であることを意味する。一般化平均法とhyperbolic vector mean methodで計算される歪み楕円が、サイズを除いて一致することがこれで示された。■

Mulchrone らはブートストラップ法を組み合わせることで、 R_s と ϕ_s の誤差を見積もっているのだが、ブートストラップ最適解($\hat{R}_s, \hat{\phi}_s$)と第 b 番のブートストラップ解($R_s^{(b)}, \phi_s^{(b)}$)とのあいだの距離を、 R と ϕ を直交デカルト座標にとったときの2点間のユークリッド距離

$$d_{R\phi} = \sqrt{[\hat{R}_s - R_s^{(b)}]^2 + [\hat{\phi}_s - \phi_s^{(b)}]^2} \quad (33)$$

で定義しているらしい(肝心の距離の記述が彼らの論文にないが、彼らのFig. 3はそれを示唆する)。前回の§4で紹介したhyperbolic vector mean methodではLorentz距離を使っていた。Lorentz距離は歪み量とイコールなので、歪み解析で使う距離としてふさわしい。ところが、式(33)で定義される距離では、そのような物理的解釈ができない。また、本講座第3回の§3.2で指摘したように、 ϕ の差が同じでも R が小さいとこの距離は大きくなる。また、 $R=1$ では、 ϕ の値が異なっても同じ円をあらわしている。したがって、式(33)で定義される距離は、歪み解析にふさわしくな

い。

謝 辞

査読者の山崎和仁氏ならびに担当編集委員の増田幸治氏のコメントにより、本稿は読みやすくなった。また、この研究で科学研究費補助金(基盤研究(B)22340151)を使用した。記して感謝の意を表する。

文 献

- Barrera, R. A., 2012, *The Principle of Coordinate Invariance and the Modelling of Curved Material Interfaces in Finite-Difference Discretisations of Maxwell's Equations*. PhD. Thesis, Univ. Toronto, 161p.
- Elliott, D., 1970, Determination of finite strain and initial shape from deformed elliptical objects. *Geol. Soc. Am. Bull.*, **81**, 2221–2236.
- Hossack, J. R., 1968, Pebble deformation and thrusting in the Bygdin area (S. Norway). *Tectonophysics*, **5**, 315–339.
- Lisle, R. J., 1977a, Clastic grain shape and orientation in relation to cleavage from the Aberystwyth Grits, Wales. *Tectonophysics*, **39**, 381–395.
- Lisle, R. J., 1977b, Estimation of the tectonic strain ratio from the mean shape of deformed elliptical markers. *Geol. Mijnbouw*, **56**, 140–144.
- Mulchrone, K. F., O'Sullivan, F., Meer, P. A., 2003, Finite strain estimation using the mean radial length of elliptical objects with bootstrap confidence intervals. *Jour. Struct. Geol.*, **25**, 529–539.
- Ottosen, N. and Ristinmaa, M., 2005, *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier, Amsterdam, 745p.
- Reynolds, W. F., 1993, Hyperbolic geometry on a hyperboloid. *Am. Math. Month.*, **100**, 442–455.
- Sato, K. and Yamaji, A., 2006, Embedding stress difference in parameter space for stress tensor inversion. *Jour. Struct. Geol.*, **28**, 957–971.
- Shimamoto, T. and Ikeda, Y., 1976, A simple algebraic method for strain estimation from deformed ellipsoidal objects: 1. Basic theory. *Tectonophysics*, **36**, 315–337.
- 徳岡辰雄 (Tokuoka, T.), 1985, 有理連続体力学とは何だろうか. 日本機械学会誌 (*Jour. Japan Soc. Mech. Eng.*), **88**, 253–259.
- Wheeler, J., 1984, A new plot to display the strain of elliptical markers. *Jour. Struct. Geol.*, **6**, 417–423.
- Yamaji, A., 2005, Finite tectonic strain and its error, as estimated from elliptical objects with a class of initial preferred orientations. *Jour. Struct. Geol.*, **27**, 2030–2042.
- Yamaji, A., 2008, Theories of strain analysis from shape fabrics: A perspective using hyperbolic geometry. *Jour. Struct. Geol.*, **30**, 1451–1465.
- Yamaji, A., 2013a, Comparison of methods of algebraic strain estimation from Rf/φ data: A unified theory of 2D strain analysis. *Jour. Struct. Geol.*, **49**, 4–12.
- Yamaji, A., 2013b, Two-dimensional finite deformations evaluated from pre- and post-deformation markers: Application to balanced cross sections. *Jour. Struct. Geol.*, **51**, 144–155.
- Yamaji, A., 2015, Generalized Hough transform for the stress inversion of calcite twin data. *Jour. Struct. Geol.*, **80**, 2–15.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2016, 歪み解析と変形解析の数理: 4. 双曲幾何学と Rf/φ 歪み解析. 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **123**, 31–40.
- Yamaji, A. and Masuda, F., 2005, Improvements in graphical representation of fabric data, showing the influence of aspect ratios of grains on their orientations. *Jour. Sediment. Res.*, **75**, 517–522.

[URL1] www.kueps.kyoto-u.ac.jp/~web-bs/tsg/software/hStrain/EqualAreaNet.pdf

[URL2] www.kueps.kyoto-u.ac.jp/~web-bs/tsg/software/hStrain/

[URL3] www.frederickvollmer.com/ellipsefit/

[URL4] www.kueps.kyoto-u.ac.jp/~web-bs/tsg/software/hStrain/GnomonicNet.pdf

[URL5] www.math.cmu.edu/~wn0g/FFFE.pdf