

$u_{tt} - \Delta u + u^p = 0$  の弱解の構成法について

東大理 井上 淳

§1. 序

$\Omega$  を 滑らかな境界  $\partial\Omega$  をもつ,  $\mathbb{R}^3$  の中の有界領域とする.

ここでは

$$\begin{aligned} \text{(I. V. P.)} \quad & u_{tt} - \Delta u + u^p = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ & \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right. \quad \text{for } t \geq 0 \end{aligned}$$

なる問題を考える.

最近 W.A. Strauss [6] は (I.V.P.) に対し, 後に定義する, 弱解で energy 不等式をみたすものを構成した. 彼の方法は 函数  $u^p$  を Lipschitz 連続函数で近似した方程式を用い, その解の中から compact argument で望みの弱解を作るというもので, その意味で (I.V.P.) に対する J.E. Segal [5] の考えに沿うものであるといつてよいであろう.

我々の目的は, Strauss と同じ結果を別の近似法, 即ち, 方程式に  $\varepsilon \Delta u_t$  なる項を付け加えるという操作

で近似解をつくり、あとは Strauss と同様の compact argument で証明しようというわけである。この小文では 近似解の構成法をのみ述べようと思う。

さて、弱解の定義及び Strauss の定理を述べよう

定義 各  $t$  に対し、 $\Omega$  のほとんど到る所定義された函数  $u(x, t)$  が (I.V.P.) の弱解 とは

(i)  $u$  (resp.  $u_t$ ) は 値を  $\dot{H}^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$  (resp.  $L^2(\Omega)$ ) に  
もつ、 $t$  の弱連続函数

(ii) 任意の  $\Phi(x, t) \in C_0^\infty(\Omega \times (0, \infty))$  に対し

$$\int_0^\infty \int_\Omega (-u_t \Phi + \nabla u \cdot \nabla \Phi + u^p \Phi) dx dt = 0$$

をみたす。但し、空間  $X = \dot{H}^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$  の位相  $\|\cdot\|_X$  は  $\|u\|_X = \|u\|_{\dot{H}^1(\Omega)} + \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}$  で与えられているものとする。

定理 (I.V.P.) の弱解  $u(x, t)$  が存在する。

更に、任意の  $t$  に対し

$$\int_\Omega \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) dx \leq \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{\psi^{p+1}}{p+1} \right) dx$$

なる energy 不等式が成り立つ。

注意. Strauss [6] と同様、 $u^p$  はもっと一般の  $F(x, u)$ , また他の境界条件、たとえば Neumann 或いは

が三種境界条件についても成立する.

## §2. 近似方程式に対する古典解の構成

この節では Leray-Schauder の定理を用いて

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u^p - \varepsilon \Delta u_t = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(x, t)|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases}$$

に対する解をつくる. 以下の方法は本質的に Defermos [1] による.

定理を述べる前に, 函数空間を定義しよう.

定義  $0 < \beta < 1$  とする.  $C^{k+\beta}(\bar{\Omega})$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  ( $\bar{\Omega} = \Omega$  の閉包) とは,  $k$  回連続微分可能な函数で,  $k$  回微分したものが指数  $\beta$  の Hölder 連続なるものである.

$$|w(x)|_{k+\beta} \Rightarrow \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha w(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x, x' \in \bar{\Omega}} \left\{ \frac{|D^\alpha w(x) - D^\alpha w(x')|}{|x - x'|^\beta} \right\}$$

は  $C^{k+\beta}(\bar{\Omega})$  の norm を定める.

$H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$ ;  $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$  は  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  で連続で以下の量が有限な函数  $v(x, t)$  のなる Banach 空間である

$$\|v(x, t)\|_\beta \Rightarrow \sup_{\bar{Q}_T} |v(x, t)| + \sup_{\substack{(x, t) \\ (x', t') \in \bar{Q}_T}} \left\{ \frac{|v(x, t) - v(x', t')|}{(|x - x'|^2 + |t - t'|)^{\frac{\beta}{2}}} \right\} < \infty$$

$\|\cdot\|_\beta$  を用いて.

$$\|v\|_{1+\beta} \equiv \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D_x^\alpha v\|_\beta$$

$$\|v\|_{2+\beta} \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D_x^\alpha v\|_\beta + \|v_t\|_\beta$$

$$\|v\|_{1+\beta} \equiv \|v\|_{1+\beta} + \|v_t\|_{1+\beta}$$

$$\|v\|_{2+\beta} \equiv \|v\|_{2+\beta} + \|v_t\|_{2+\beta}$$

なる norms を定義し、それぞれの norm が定義され有限な  
 函数空間を、 $H^{1+\beta, \frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$ ,  $H^{2+\beta, \frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$ ,  $B^{1+\beta}(\bar{Q}_T)$ ,  $B^{2+\beta}(\bar{Q}_T)$  と記す。

定理  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$  とする。このとき (2.1) の一意解  $u(x, t)$   
 $\in B^{2+\beta}(\bar{Q}_T)$ ,  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  が存在する。更に、 $u$  は超函数的  
 微分  $D_x^\alpha u_{tt} \in L^2(Q_T)$ ,  $|\alpha| = 1$  をもつ。

定義  $\bar{Q}_T$  で定義された函数  $u(x, t)$  は、 $u_t, u_{tt}, D_x^\alpha u$  ( $|\alpha| \leq 2$ )  
 $D_x^\alpha u_t$  ( $|\alpha| \leq 2$ ) が  $C^0(\bar{Q}_T)$  に属し (2.1) をみたすとき 解 と  
 えられる。

命題 2.1 (2.1) の解は 高々 一つである。

補題 2.2  $u(x, t) \in H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $f(x, t) \in H^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\bar{Q}_T)$   
 $f(x, 0)|_{\partial\Omega} = 0$  とする。更に  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$  -  $u(x, t) \in B^{2+\beta}(\bar{Q}_T)$   
 を

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u - \varepsilon \Delta u_t = f \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

なる解とする. このとき,  $\beta, \varepsilon, T$  に依存する定数  $C$  があって

$$(2.3) \quad \|u\|_{2+\beta} \leq C(\|f\|_{\beta} + |\varphi|_{2+\beta} + |4|_{2+\beta})$$

が成立する.

(注意)  $\varphi, 4 \in C_0^\infty(\Omega)$  を仮定したが, 単に  $\varphi, 4, f$  が compatibility condition をみたすならばよい.

(証明) ここでは割愛する. ただし Ladyzhenskaya-Solonnikov-Ural'tseva [4] p 320 の定理を用いることに注意しておく.

補題 2.3. 上の補題 2.2 の仮定がみたされているとき

(2.2) の一意解  $u \in B^{2,p}(\overline{Q_T})$  が存在する

(証明) いわゆる continuity method を用いる.

即ち  $L_\lambda(u) \equiv u_t + \varepsilon \Delta u - \lambda(\Delta u - a(x,t)u)$  と定義し,  $S$  を  $\lambda$  の集合で,  $L_\lambda u = f$  が解  $u \in B^{2,p}(\overline{Q_T})$  で  $u|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $u(x,0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x,0) = 4(x)$  をみたすものとする.  $0 \in S$  は明らか.

あと, 上の補題を用いて,  $S$  の開かつ閉なることを証明し, これより  $1 \in S$  を示す.

さて mapping  $\psi_\lambda: H^{\beta, \frac{p}{2}}(\overline{Q_T}) \rightarrow H^{\beta, \frac{p}{2}}(\overline{Q_T})$  を

次のように定める.

即ち  $v \in H^{\beta, \frac{p}{2}}(\overline{Q_T})$  に対し  $\psi_\lambda v$  を次の方程式の

解  $w = U_\lambda v$  として定める

$$(2.4) \quad \begin{cases} w_{tt} - \varepsilon \Delta w_t - \Delta w + v^{p-1} w = 0 \\ w(x, 0) = \lambda \varphi(x) \\ w_t(x, 0) = \lambda \psi(x) \\ w(x, t)|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases}$$

以下,  $U_\lambda$  が Leray-Schauder の定理 の仮定をみたすことを check する.

補題 2.3 より  $U_\lambda$  は well-defined 2° compact operator なることは明らか.

補題 2.4.  $v$  が  $H^{p, \frac{p}{2}}(\overline{Q}_T)$  の有界集合を動くとき  $U_\lambda v$  は  $\lambda$  に関し一様連続

補題 2.5. 各  $\lambda$  を fix することにより,  $U_\lambda$  は  $H^{p, \frac{p}{2}}(\overline{Q}_T)$  の中の連続作用素.

さて  $v$  をある  $\lambda$  に関し  $U_\lambda$  の不動点, i.e.  $U_\lambda v = v$  とする  
以下 2°  $v$  の  $\lambda$  に independent な a priori 評価を求める

補題 2.6.

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |v_t|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{v^{p+1}}{p+1} \right) dx \leq M_1$$

$$\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v_s|^2 dx ds \leq M_1 \quad \text{for any } 0 \leq t \leq T$$

以下, § 4. T に依り  $\lambda$  に無関係な定数を  $M_\#$  で記す.

補題 2.7

$$\int_{\Omega} |\Delta v(t)|^2 dx \leq M_2 \quad 0 \leq t \leq T$$

補題 2.8

$$\max_{\overline{Q_T}} |v(x,t)| \leq M_3$$

補題 2.9.  $v(x,t)$  は 超函数的微分  $v_{x_j t t}$   $j=1,2,3$   
 $\in L^2(Q_T)$  をもつ. 更に

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v(t)|^2 dx dt \leq M_4$$

$$\int_{\Omega} v^2(t) dx \leq M_5 \quad \text{for each } t$$

補題 2.10

$$\int_{\Omega} |\Delta v(t)|^2 dx \leq M_6$$

以上の 評価より

補題 2.11.  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  なる  $\beta$  に  $\delta \neq L$ .

$$\|v\|_{\beta} \leq M_7$$

この補題より, Leray-Schauder を用いて 我々の  
 定理をうる.

詳しい証明及び, compact argument については [3]  
 をみられたい.

## 文献

- [1] C.M. Dafermos: The mixed initial-boundary value problem for the equations of non-linear one-dimensional viscoelasticity

J. of Diff. Eq. 6 71-86 (1969)

- [2] J.M. Greenberg, R.C. MacCamy & V.J. Mizel: On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation  $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{1x} = \rho_0 u_{tt}$

J. Math. Mech. 17 707-728 (1968)

- [3] A. Inoue: Another construction of a weak solution for  $u_{tt} - \Delta u + u^p = 0$  to appear

- [4] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov & N.N. Ural'eva

Linear and quasi-linear equations of parabolic type

vol 23 American Math. Soc. Providence 1968

- [5] I. F. Segal: The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction

Bull. Math. Soc. France 91 129-135 (1963)

- [6] W. A. Strauss: On weak solutions of semi-linear hyperbolic equations to appear