

Drinfeld module の退化について

東大理 藤原 一宏

§0 Introduction

その有名な論文 [D1] において Drinfeld が導入 (正確には再発見, Carlitz が既に定義している) した "elliptic module" の概念は、函数体上における楕円曲線のよい類似であり、その moduli space の研究は函数体の Langlands 予想との関連から大きな興味をひく大問題である。しかるに現在満足のいく研究がなされているのはその次元が 1 あるいは 2 になる場合に限られており、次元 3 以上ではほとんど不明である。次元がますますよくなる困難の一因としてあげられるのは、考えている空間が affine なためその非特異コンパクト化が必要とされるのであるが、標数 p であるためその存在すら保証されるいことがある。

この小論では、コンパクト化の構成に必要とされる elliptic module の退化理論を論じることにする。実際、elliptic module の moduli space は代数体上での志村多様体の類似であり、Chai, Faltings, 筆者による志村多様体の算術的なトポカル

コンパクト化の手法を適用する際に 退化の理論は必要不可欠である。

§1 では必要な定義を述べ、§2 で結果を述べることにする。
ただし本稿では "elliptic module" ではなく "Drinfeld module" という用語で統一することとし、証明は省略する。

§1. Drinfeld module とその性質

$\mathbb{F}_q$ を有限体, C を $\mathbb{F}_q$ 上の 射影非特異曲線とし, $\infty \in C$ の $\mathbb{F}_q$ 有理点とする。(以後固定して考える) $A \in \text{affine 曲線 } C(\infty)$ の座標環とし, K をその関数体とする。類似でいうと

$$\begin{aligned} K &\Leftarrow \mathbb{Q} & , & \quad \infty \Leftarrow \text{無限素点} \\ A &\Leftarrow \mathbb{Z} \end{aligned}$$

となっている。

定義. S が A -scheme, $\mathcal{X}/S$ が 1次元 additive group scheme (Zariski 位相に関し局所的に $\mathcal{G}_a = \text{Spec } \mathbb{Q}_s[x]$ と同型) のとき $E = (\mathcal{X}, \phi)$ が A -module scheme であるとは

$\phi: A \rightarrow \text{End}_S \mathcal{X}$ が環準同型であり、 $\mathcal{X}$ の $\mathcal{X}_S$ 代数

$\mathcal{X}_S$ は $\mathcal{X}/S$ に引きおこされる A の作用は A による multiplication

つまり $a \in A$ は $\mathcal{X}_S$ 上 a 倍で作用する

こととする

特に又 $G_a = \text{Spec } \mathbb{Q}_s[X]$ と座標を指定されているときには $\text{End}_S \mathcal{L} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i X^{p^i} \mid a_i \in P(\mathbb{Q}_s) \right\}$

という表示ができて, ϕ による a の像 ϕ_a が

$$\phi_a(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^{p^i} \quad a_0 = a$$

をみたすことが必要かつ十分である.

定義 S 上の A -module scheme $E = (\mathcal{L}, \phi)$ が rank d (≥ 1) の Drinfeld module であるとは

局所座標で表示したとき $a \in A$ の作用が

$$\phi_a(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^{p^i} \quad a_n \text{ は可逆}$$

と書け, $|a|_\infty = p^{nd}$ を満たす

ことをいう. ただし $| \cdot |_ \infty$ は ∞ での付値

特に $A = \mathbb{F}_q[t]$ のときには t の作用だけを定めれば十分なので Drinfeld module は elliptic curve と比べてもより初等的な対象である. (特に $d=2$ のとき ϕ のこの二つの概念がよい類似となる).

ここで Drinfeld module の moduli space についても少し述べておく.

$I \subset A$ を non-zero ideal とするとき, level I -structure という概念が定まる. つまり E/S を Drinfeld module とし, その I 分点 $E[I]$ を $E[I] = \text{Ker}(\phi_a: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L})$ ($I = (a)$ のとき).

$E[I] = \bigcup_{a \in I \setminus \{0\}} E[(a)]$ (一般のとき) と定めると, $E[I]$ は有限

平坦なスキーム S とする。そこで S の標数 p が I と素数とき は
 $\alpha: E[I] \xrightarrow{\sim} I^* A/I$ という同型を level I -structure とする。
 (標数に条件をつけるなくても level structure は定義可能でよい
 性質をもつことが知られている) ところで A 上の stack m_I^d は
 A -scheme S に対し

$$m_I^d(S) = \{ (E, \alpha) \mid \begin{array}{l} E \text{ は } S \text{ 上の Drinfeld module} \\ \alpha \text{ は } E \text{ の level } I\text{-str.} \end{array} \}$$

射は上記構造を持つ同型射

と定義すると m_I^d は代数的な stack (I が 2 つの異なる素点
 で割れればスキーム) となり A 上平坦, 相対次元 $d-1$ の正則な
 stack となる (Intw. で述べたように coarse space は affine).

m_I^d 又はその A 上の生成ファイバーを Drinfeld modular scheme
 という。ここでは $m_{I \times A}^d K_\infty$ $K_\infty: K$ の ∞ での完備化
 の記述が標数 p の対称空間によって可能であることを示す。

つまり C_∞ を K_∞ の代数閉包の完備化とすると

定理 (Drinfeld)

C_∞ 上の rank d の Drinfeld module $\Leftrightarrow C_\infty(K)$ の discrete A -lattice
 of rank d .

$$E = C_\infty / \Lambda \quad \Lambda: \text{lattice}$$

という定理より $m_{I \times A}^d C_\infty$ の連結成分が $P \backslash Q^d$

$Q^d: GL(d, K_\infty)$ に対する対称空間. i.e

$$\mathcal{Q}^d(C_\infty) = \mathbb{P}_{C_\infty}^{d-1} \setminus \{ \text{all } K_\infty\text{-rational hyperplanes} \}$$

$P: GL(d, K_\infty)$ 内の arithmetic subgroup

と表わせることがわかる

このように Drinfeld modular scheme は 志村多様体の類似であるが、 $d > 2$ のときにはその代数体上の対応物が存在しない。

($GL(d)$ に対する対称空間は複素構造をもたない)。

逆に、函数体のときには $d > 2$ のときの (分岐) Langlands 予想に Drinfeld modular scheme (の極小コンパクト化の交叉コホモロジーの計算) によりせまる可能性は十分にあることとなる

このの最後に Drinfeld module の退化として最も重要な semi-Drinfeld module の概念を導入しておく。

定義. S を normal scheme, E/S を A -module scheme とする. このとき E/S を semi-Drinfeld module だとは

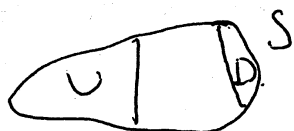
E/S の $\forall s \in S$ での fiber E_s/S が S 上の Drinfeld module である

ことをいう。

各点での fiber の rank は異なりうることに注意しよう。

§2. Drinfeld module の semi-stable 退化.

この § では $S = \text{Spec } V$, $D = V(m)$ を閉集合, $U \subset S$ を open set として S は normal, $U \cap D = \emptyset$, V は m 進完備を仮定する.



与えられた semi-Drinfeld module E/S かつ

- (E_U は rank d の Drinfeld module ($E_U = U$ の割
- $E \times_S D$ は rank d' の Drinfeld module

の 2 条件をみたすとする. (必ず $d' \leq d$). 立場を変えれば E_U が D 方向に退化していく状況となるわけである

Drinfeld によれば この状況で.

Proposition - Definition.

rank d の Drinfeld module $\tilde{E}/S$, 形式 A -準同型

$$\hat{u}: \hat{E} \rightarrow \hat{E} \quad (\wedge: m\text{-進完備化}) \text{ がある}$$

$\hat{u} \bmod m$ は同型となる. $(\hat{E}, \hat{u})$ は unique に定まる

がわかる. ここで $\hat{E}$ を E の fixed part. ということにする

(semisimple 多様体の時の Raynaud group の類似).

座標系をかける $\hat{u}(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^{p^i}$, $a_0 = 1$, $a_i \in m$ ($\forall i > 0$)

$$\hat{u}(\phi_a(X)) = \phi_a(\hat{u}(X)) \quad \forall a \in A$$

となることによる. Drinfeld 自身が考えたのは $\dim S = 1$ のとき.

つまり V が離散付値環の時. このときはさらに次のよう

またかゝる:

$\hat{E}$ は単に m 進の形式巾級数でなく, rigid-analytic な意味で収束し整函数 $e^{an} : \hat{E}^{an} \rightarrow E^{an} / K$, $U = \text{Spec } K$ を定義する. e^{an} は全射で, 従って $\Lambda = \text{Ker}(\hat{E}^{an} \xrightarrow{e^{an}} E^{an})$ とかくと Λ は rank $d-d'$ の discrete A -module $\subset \hat{E}(K^{sep})$ (K^{sep} : 分離閉体) $\hat{E}^{an} = \hat{E}^{an} / \Lambda$ (rigid-analytic に)

と高表される. いして

$$\left. \begin{array}{l} \text{\{ } } S_K \text{ の semi-Drinfeld modules } E \text{ } \text{\} } \\ \quad \quad \quad \updownarrow \\ \text{\{ } } S_K \text{ の Drinfeld module } \hat{E} \text{ } \text{\} } \end{array} \right\} \begin{array}{l} E \\ \updownarrow \\ (\hat{E}, \Lambda) \end{array}$$

discrete A -lattice $\Lambda \subset \hat{E}(K^{sep})$, $\text{Gal}(K^{sep}/K)$ -stable

は圖の同値となる (Raynaud-Tate の semiabelian scheme の一意化理論の類似).

この $\dim S = 1$ の場合の理論は非常に満足できるものであり, いかに高次元の場合に拡張するか問題となる.

まず注意すべきことは上述の証明法は通用しなくなるのである. $\dim S > 1$ の場合にも rigid geometry と呼ばれるものは存在するか (Raynaud) " $\hat{E}^{an}$ " の構成等に無理かである.

従って, 他の方法による直接証明以外に道はない (一意化の問題, semi-abelian な場合にも全く同じ困難が生じた).

このことをふまえた上で

定理. § 初めの E に対する仮定の下で

A -lattice $\Lambda \subset \widehat{E}(K^{\text{nr}})$, $\text{rank } \Lambda = d-d'$ がある

(ただし K^{nr} は V の最大不分岐拡大の高体)

a) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1}$ は V 上整, $\lambda^{-1} \equiv 0 \pmod{m}$.

$\forall n > 0$ に対し有限個の λ を除き $\lambda^{-1} \equiv 0 \pmod{m^n}$

また, λ 自身が V 上整

b) $(\widehat{E}, \Lambda)$ の構成は admissible base change と可換.

ただし $S' \rightarrow S$ が admissible とは base change 後も同じ条件が満たされることをいう

c) $\dim S = 1$ のとき $(\widehat{E}, \Lambda)$ の構成は Drinfeld によるものと一致.

上記定理の証明は非常に技術的だが, かし naive なものである. また, $(\widehat{E}, \Lambda)$ と E との関係については

定理. 前定理の (a) を満たす $(\widehat{E}, \Lambda)$ に対し semi-Drinfeld module E が存在し, $(\widehat{E}, \Lambda)$ は E に伴う pair となる. として $E \mapsto (\widehat{E}, \Lambda)$ は圏の同値を与える.

標語的には " $E = \widehat{E}/\Lambda$ " と思ってもよいことになる.

これらの定理によって完備な環上の Drinfeld module の semi-stable reduction は容易に記述される. Wild reduction の場合も同様の理論を考えることは望ましいだろうか. 応用上は

必要ではない。また, Anderson の t -motive などにも拡張することもある。これは興味深いように思う [A]。

上記の圏同値を compact 化に応用するときには, 関手の構成 $E \rightarrow (E, A)$ のより詳しい性質が必要となる (例えば振動に対する安定性, D に至る中間段階の退化の記述等)。これらについては現在準備中である。

References

- [D1] V. G. Drinfeld, Elliptic modules, Mat. Sb. 94 no. 4, 594-627 (1974)
- [D2] ———, Elliptic modules II, Mat. Sb. 102 no. 2, 182-194 (1977)
- [A] G. W. Anderson, t -motives, Duke Math J. 53, no. 2, 457-502 (1986)

訂正 Drinfeld 加群とその退化について

藤原 一宏

main な statement と述べられている semi-Drinfeld 加群の一意化であるが、その後、そのまゝの形で成り立たないことがわかった。以下のようにします。

S は ^{affine} regular scheme, $D_1, D_2, \dots, D_j$ は S の既約因子で reduced normal crossing になるものとし、 $D = D_1 \cup \dots \cup D_j$ S は D に関して完備。 $U = S \setminus \{D_1 \cup \dots \cup D_j\}$ とする

E/S は semi-Drinfeld 加群。で

① D_1 上 rank d_1 の Drinfeld 加群

② $D_2 \setminus D_1 \cap D_2$ 上 rank $d_2 (> d_1)$ の Drinfeld 加群

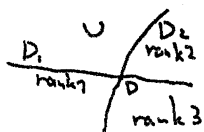
③ $D_3 \setminus \{D_1 \cup D_2\} \cap D_3$ 上 rank $d_3 (> d_1 > d_2)$ の

④ $D_j \setminus \{D_1 \cup \dots \cup D_{j-1}\} \cap D_j$ 上 rank $d_j (> d_{j-1} > \dots > d_1)$ の Drinfeld 加群

かつ U 上 rank $d > d_j (> d_{j-1} > \dots > d_1)$ の Drinfeld 加群になるものとする

example:

$j=2$
 $d_1=1 \quad d_2=2 \quad d=3$



さらに技術的な仮定として

$D_1 \setminus \{D_1 \cup \dots \cup D_{j-1}\} \cap D_j$ の閉点で

$\text{Spec } A$ (記号は本文と同じ) の閉点に $u \in \mathcal{O}_A$ があるとする。

(左の例のときにはこの仮定は成り立つ)

このとき

"Theorem"

$S = \text{Spec } V$. $K =$ 高体, K^{sep} : separable closure

$\hat{V} = V$ の K^{sep} 内の normalization.

D_1 : D_1 には、 E の fixed point E_1 .

f_i : D_i の defining equation.

の $\Lambda_1 \subset E_1(\hat{V}_{f_1}^{1/2})$ かつ

sublattice

$\lambda_1 \in \Lambda_1 \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$ は S 上 regular である。 D_1 上 rank 1

$D_2: E_2 = "E_1/\Lambda_1"$ (適切な意味での quotient. $(f_1\text{-adic topology である})$)
 とする.

$\Lambda_2 \subset E_2(\mathcal{O}[\frac{1}{f_1 f_2}])$ とあり (Galois stable)

$\lambda_2 \in \Lambda_2(\mathcal{O}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2}$ は S 上 regular である. $D_1 \cup D_2$ 上 滑らか.

$D_3: \dots$

$D_j: E_j = "E_{j-1}/\Lambda_{j-1}"$ とする $\Lambda_j \subset E_j(\mathcal{O}[\frac{1}{f_1 \dots f_j}])$ とあり (Galois stable)

$\lambda_j \in \Lambda_j(\mathcal{O}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_j}$ は S 上 regular である. $D_1 \cup \dots \cup D_j$ 上 滑らか.

そして最後に $E = "E_j/\Lambda_j"$ ($f_1 \dots f_j$ -adic topology による quotient)
 とする. 逆は (上記条件を満たす) $(E, \supset \Lambda_1, E/\Lambda_1 \supset \Lambda_2, \dots, E_j \supset \Lambda_j)$

が存在すれば、最初のような E を作れる.

はたして多少細部の check が必要だが. example として書いた case では O.K.)

このように. semi-Deligne-Mumford 加群を control するには 複雑な data を必要とする.

そして. 与えられた $Q(\mathbb{Q})$ のときに関しては. 上述の classification の 3
 moduli space の compact 化が 構成される.