

中単化定理

東大 理 岡田秀一郎

中単化定理. X は非特異射影代数多様体, D は X 上の単純正規交叉因子とする. $D = \sum_{i=1}^N D_i$ は既約分解, D_i に正整数 m_i ($i=1, \dots, N$) を与える. このとき, 有限全射正則写像 $P: \widehat{X} \rightarrow X$ が存在し, 次の条件を満たす.

- (1) $\widehat{X}$ は非特異,
- (2) $\widehat{D} = P^{-1}(D)$ は $\widehat{X}$ 上の単純正規交叉因子,
- (3) $P^* D_i = \sum m_{ij} \widehat{D}_j$ を既約分解とすれば, $m_i | m_{ij}$ が, 任意の i, j に対して成立.

証明 M は X 上の豊富な因子, m は m_1 の倍数で, $mM - D_1$ が非常に豊富になるものとする. H_k ($1 \leq k \leq d = \dim X$) を, $|mM - D_1|$ の一般元とすれば, $\sum_{k=1}^d H_k + D$ は単純正規交叉因子 (ベルキニの定理により). $\mathcal{U} = \{U_s\}$ は X のアフィン開被覆, a_{st} は $\mathcal{U}$ に関する M の変換関数とする. $\gamma_{k,s} \in H_k + D_1$ の U_s における局所方程式で, $\gamma_{k,s} = (a_{st}^m \gamma_{k,t})$ ($1 \leq k \leq d$) をみ

たすものとする。 $L = \mathbb{C}(X) (\sqrt[m]{\varphi_{1,s}}, \dots, \sqrt[m]{\varphi_{d,s}})$ とおけば、
定義から、 L は S の $\mathbb{C}(X)$ 上の m 次拡大である。 $\hat{P}_i: X_i \rightarrow X \in X$ の L 中
の正規化とする。

主張 X_i は非特異, $\hat{P}_i^{-1}(D)$ は X_i 上の単純正規交叉因子,
 $P_i^* D_i = m \hat{P}_i^{-1}(D)$.

証明. $x \in U_S$, $X_i \in D_i$ の U_S における局所方程式とする。

case 1. $x \notin D_1$.

$x \in H_k$ ($1 \leq k \leq e$), $x \notin H_k$ ($e+1 \leq k \leq d$), $x \in D_2 \dots D_f$
 $x \notin D_{f+1} \dots D_N$ とすれば, $\varphi_{1,s}, \dots, \varphi_{e,s}, \varphi_2, \dots, \varphi_f$ は x の正則
パラメータ系の一部, $\varphi_{e+1,s}, \dots, \varphi_{d,s}$ は x における単元,

case 2. $x \in D_1$.

$\bigcap_{k=1}^d H_k \cap D = \emptyset$ より, $x \notin H_1$ としてよい。 $x \notin H_1, \dots, H_e$
 $x \in H_{e+1}, \dots, H_d$, $x \in D_2 \dots D_f$, $x \notin D_{f+1} \dots D_N$ とすれば,
 $\varphi_{1,s}, \varphi_{e+1,s}/\varphi_{1,s}, \dots, \varphi_{d,s}/\varphi_{1,s}, \varphi_2, \dots, \varphi_f$ は x の正則パラメータ系
の一部, $\varphi_{2,s}/\varphi_{1,s}, \dots, \varphi_{e,s}/\varphi_{1,s}$ は x における単元。

次の補題によれば、主張は容易に従う。

補題 ([1] 参照) $(R, \mathfrak{m})$ は代数閉体 k 上の d 次元正則局所環で、 $R/\mathfrak{m} = k$ とし、 $(z_1, \dots, z_d)$ は R の正則パラメータ系、 $u_1, \dots, u_s \in R$ の単元とすれば、 $R_1 = R[\sqrt[m]{z_1}, \dots, \sqrt[m]{z_d}, \sqrt[m]{u_1}, \dots, \sqrt[m]{u_s}]$
の極大イデアル $\mathfrak{m}_1$ による局所化 $R_{\mathfrak{m}_1}$ は $(\sqrt[m]{z_1}, \dots, \sqrt[m]{z_d}, z_{e+1}, \dots, z_d) \in R_{\mathfrak{m}_1}$
正則パラメータ系にも正則局所環となる。

証明. m_1 は $\sqrt[n]{z_1}, \dots, \sqrt[n]{z_r}, z_{r+1}, \dots, z_d, \sqrt[n]{u_1} - \alpha_1, \dots, \sqrt[n]{u_s} - \alpha_s$
 $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ で生成されるので, $\sqrt[n]{u_i} - \alpha_i \in (\sqrt[n]{z_1}, \dots, z_d) R_{m_1}$,
 $(i=1 \dots s)$ とみればよい. $u_i - \alpha_i = (\sqrt[n]{u_i} - \alpha_i) \cdot v$ (v は R_{m_1}
 の単元) とかける. $u_i - \alpha_i \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1$. したがって,

$$\sqrt[n]{u_i} - \alpha_i \in (\sqrt[n]{z_1}, \dots, z_d) R_{m_1} \quad \text{Q.E.D.}$$

同様の操作を, $(X_1, p_1^{-1}(D))$ に繰り返す.

$p_1^{-1}(D_2)$ は既約とは限らないが, 上の議論により非特異な
 $\tilde{D}$ を, $p_1^{-1}(D_2)$ に附して, D と同様のことが出来る.

これで, 定理の文の存在がわかった. Q.E.D.

系. $f: X \rightarrow Y$ を代数的ファイバー空間, Y のあるガリスキ開
 集合 Y_0 が存在し, $D = Y - Y_0$ は正規交叉因子, $f_0 = f|_{X_0} = f^{-1}(Y_0)$
 はスームースとする. このとき, 有限全射正則写像 $p: \tilde{Y} \rightarrow Y$ が
 存在し, $\tilde{X} \in X_1 = X \times_Y \tilde{Y}$ の適当な非特異化, $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ が
 f の誘導される正則写像, $\tilde{D} = p^{-1}(D)$, $\tilde{X}_0 = \tilde{f}^{-1}p^{-1}(Y_0)$,
 $\tilde{f}_0 = \tilde{f}|_{\tilde{X}_0}$ とおけば, $R^h \tilde{f}_0^* \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}$ の $\tilde{D}$ の周りの局所モノド
 ロミーは中単, 二重で $h = \dim X - \dim Y$.

局所モノドローの定義から復習する.

$x \in D$, x の適当な開近傍 U をとれば, $U = \Delta^d$, $d = \dim Y$
 $(\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\})$ $U \setminus D \cong \Delta^* \times \Delta^{d-k}$.

$(\Delta^* = \Delta \setminus \{0\})$ $f^{-1}(U \setminus D) \rightarrow U \setminus D$ は C^∞ ファイ
 バーバンドルとみなせる. (これから, $\pi_1(U \setminus D)$ は自然に
 3

$H^n(X_t, \mathbb{C})$ ($X_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in U \setminus D$) に作用する。このとき、 $\pi_1(U \setminus D)$ の元を $GL(H^n(X_t, \mathbb{C}))$ とみなしたものは、 X における D のまわりの局所モノドロミーという。

定理 [2].

上の条件下で、局所モノドロミーは準中単。

証明は [2] の [3] 参照

上の定理によれば、 D_i の一般点における局所モノドロミーを ρ_i とし、 $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が中単となる正整数として、 (Y, D, m_i) に中単化定理をつかえば、系を与える。

文 献

[1] H. Popp: Fundamentalgruppen algebraischen Mannigfaltigkeiten. Springer Lecture Notes in Math. 176 1970

[2] A. Landman: On the Picard-Lefschetz transformations. To appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[3] W. Schmidt: Variation of Hodge Structure. *Inventiones math.* 22 (1973) 211-319