

A structure theory in the regular monotone completion of C^* -algebras

東北大理 齊藤和之

unital C^* -algebra A の regular monotone completion とは monotone complete C^* -algebra (従って AW^* -algebra) C と A into C の injective morphism γ の対 (C, γ) で次の性質をもつものである:

- (1) γ は monotone continuous homomorphism, i.e. $\forall \alpha \in A_h (A$ の hermitian part) の increasing net $\{x_\alpha\}$ で $x_\alpha \uparrow x \in A_h$ なるものに對して $\gamma(x_\alpha) \uparrow \gamma(x)$ in $C_h (C$ の hermitian part),
- (2) C は $\gamma(A)$ により monotone generate されている, i.e. C_h が $\gamma(A_h)$ を含む C_h の最小の monotone closed subset である,
- (3) $\gamma(A_h)$ は C_h で order dense, i.e. C_h の任意の元 x に対して $x = \sup_{C_h} \{ \gamma(a) ; a \in A_h, \gamma(a) \leq x \}$.

unital C^* -algebra の regular monotone completion の概念は, 可分の場合は John Wright により [11], 又一般の場合は沢名 [4] により, かつては C^* -algebra から non W^* , AW^* -algebras を構成する1つの方法として導入された。

ここでは次の問題を考察したい。

問題(1) λ を含む C^* -algebra A の性質と λ の regular monotone completion $\bar{A}$ の性質とはどのように影響しあうか?

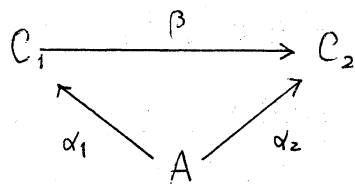
問題(2) A の derivation δ , λ を含む λ も $*$ を preserve しない automorphism ρ は $\bar{A}$ に一意的に拡張できるか?

$\bar{A}$ の構成法 ([4], [11]). A を unital C^* -algebra とし, λ の hermitian part を A_h とする. V を A_h の自然な order に関する A_h の Dedekind completion とする. λ は関数解析的には次の様につくれる. X_A を A の state space, $\mathcal{B}(X_A)$ を X_A 上の bounded real Borel functions 全体のつくる real Banach algebra (積は pointwise) とし, $\mathcal{M}$ を $\mathcal{B}(X_A)$ の元で meager な台をもつものの全体のつくる ideal とし, ρ を $\mathcal{B}(X_A) \rightarrow \mathcal{B}(X_A)/\mathcal{M}$ の canonical quotient とすると, $(\mathcal{B}(X_A)/\mathcal{M}, \rho)$ は A_h の unique Dedekind completion である (i.e. $\mathcal{B}(X_A)/\mathcal{M}$ は bounded complete lattice τ , $\rho(A_h)$ は $\mathcal{B}(X_A)/\mathcal{M}$ で order dense). 我々は $\mathcal{B}(X_A)/\mathcal{M} = V$, $\rho = i$ と置く.

今 $\bar{A}_h$ を V に含まれる A_h ($= \rho(A_h)$) の monotone closure とすると, V は real Banach space として A_h の injective envelope に注意して, $\bar{A}_h$ は A の C^* -algebra として injective envelope $I(A)$ に含まれる A の monotone closure ($I(A)$ の C^* -subalgebra になる!) の hermitian part と isometrically, order isomorphic である. 従って $(\bar{A}, i)$ は A の regular monotone completion である.

regular monotone completion の一意性.

命題 $(C_1, \alpha_1), (C_2, \alpha_2)$ を A の regular monotone completions とする。次の時下の diagram が commute するような C_1 から C_2 への $\wedge$ の $*$ -isomorphism β がある。



$$\beta \alpha_1 = \alpha_2.$$

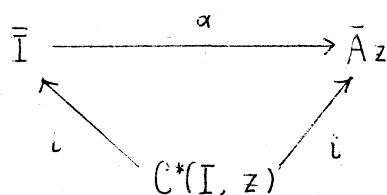
証明の key point は $\beta \alpha_1 = \alpha_2$ を満たす C_1 から C_2 への $\wedge$ の order isomorphism β を構成し、各 C_1, C_2 で $\alpha_1(A), \alpha_2(A)$ がそれぞれ order dense である事に注意すると β が $*$ -isomorphism になる。

今後記号を簡単にするために我々は A の unique regular monotone completion を $(\bar{A}, \iota)$ で表わす事にする。

もしも A が non unital ならば $\bar{A}_1$ (但し A_1 は A に 1 を adjoin した C^* -algebra) を考え、便宜上これも $\bar{A}$ で表わすことにする。

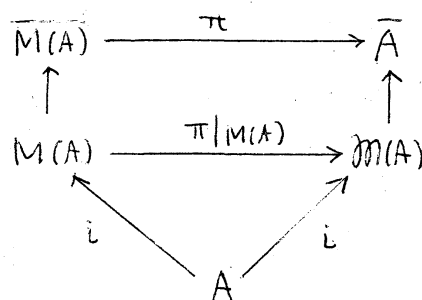
次の定理が基本である。

定理 1. A を unital C^* -algebra とし、 I を A の closed two-sided ideal (便宜的に以後 A の ideal という事にする) とする。 $\{e_\alpha\}$ を I の increasing approximate unit とすれば、 $\bar{A}$ に 終ける $\{e_\alpha\}$ の supremum $\bar{e}$ は $\bar{A}$ の central projection で、 $\bar{I}$ から $\bar{A}_2 \wedge$ への diagram を可換にする $*$ -isomorphism α が存在する。



注意 1. I が A において essential ならば $\bar{I}$ と $\bar{A}$ とは $*$ -isomorphic ($Z=1$) でありさらに次の定理を得る。

系 1. A を C^* -algebra とし, $M(A)$ を A の multiplier algebra とすれば, $\overline{M(A)}$ と $\bar{A}$ とは同型で, $M(A)$ の $\bar{A}$ に送ける injective image は A の $\bar{A}$ に送ける idealizer である。i.e. $\overline{M(A)}$ から $\bar{A}$ への次の可換な diagram をもつ $*$ -isomorphism π がある:



但し $\mathfrak{M}(A)$ は A の $\bar{A}$ に送ける idealizer である。

注意 2. もしも A が可分 (infinite dimensional) ならば $M(A)$ は可分でないが $M(A)$ は countable order dense subset をもつので $M(A)$ の regular " σ " completion $\widehat{M(A)}$ は monotone complete i.e. $\widehat{M(A)} = \overline{M(A)}$ である。

系 2. A が prime $\Leftrightarrow \bar{A}$ は factor (AW^*). [4]

これは A が必ずしも unital でなくても成立する。

定理 [4] によれば, regular monotone completion, injective envelope の一意性から

$$Z_{\bar{A}} = A' \cap \bar{A} = A' \cap I(A) = Z_{I(A)}$$

但し Z_B は C^* -algebra B の center と A' は A の (relative) commutant とする。

定理 2. A が可分, GCR algebra とすると $Z_{M(A)}$ は A の primitive ideal space $\text{Prim}(A)$ 上の bounded complex continuous functions の作る C^* -algebra $C_b(\text{Prim}(A))$ と ϕ による $*$ -isomorphism に $\hat{\phi}$ 同型 (Dawns-Hofman) に注意して, $Z_{\bar{A}}$ は $C_b(\text{Prim}(A))^{\wedge}$ ($C_b(\text{Prim}(A))$ の regular σ -completion) と ($\hat{\phi}$ を経由して次の diagram が commute する如く) $*$ -isomorphic である (*).

$$\begin{array}{ccc} Z_{\bar{A}} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & C_b(\text{Prim}(A))^{\wedge} \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z_{M(A)} & \xrightarrow{\phi} & C_b(\text{Prim}(A)) \end{array}$$

定理 1 の別の応用として次の事が成立する。

定理 3. (1) A が GCR $\Leftrightarrow$ かつては A の ideal I に対して, $\bar{A}/I$ は type I.

$\Leftrightarrow \forall J \in \text{Prim}(A)$ に対して, $\bar{A}/J$ は type I factor

(自働的に W^*)

(2) A が NGCR $\Leftrightarrow \bar{A}$ は type I direct summand をもたぬ。

もし A が可分 NGCR なら $\bar{A}$ は W^* 直和因子 をもたぬし、又

$\partial X_{\bar{A}}$ が weakly に可分にもかわらず, non-trivial な可分な表現をもたぬ。

(*) $\text{Prim}(A)$ が Hausdorff な仮定は必要ぬ。

系 3. A が primitive 可分ならば、もし A が GCR ならば $\bar{A}$ は type I W^* -factor, A が NGCR ならば $\bar{A}$ は non W^* , type III AW^* -factor である。

" N^* -closure" と " AW^* -closure" のちがいは次の定理により明らかにされる。

定理 4. 可分な C^* -algebra A に対して、 $\bar{A/I}$ がすべての A の ideal に対して W^* -algebra $\Leftrightarrow A$ が scattered となる事。

この事はもし可分な C^* -algebra A に対して、 $\bar{A}$ が W^* ならば、 $\bar{A}$ は atomic であり、さらに一般の C^* -algebra B に対して、 B が scattered $\Leftrightarrow \bar{B/I}$ が atomic W^* -algebra $\forall$ ideal I of B であるという命題を使って証明する。

注意 3. (1) $\bar{A}$ は A の second dual A'' のように universal ではない。実際 Behnke-Knauf-Leptin は A の (non zero) primitive ideals が decreasing sequence J_n ($n \in \mathbb{N}$ 自然数) なる如き可分, primitive NGCR C^* -algebra A を構成した。さらに $J_n/J_{n+1} = C(K)$ がある Hilbert space において成立し A/J_n は primitive GCR ($\forall n$) なるものを構成した。 $\bar{A}$ は non W^* , type III, AW^* -factor であるが、 $J_n(\neq \{0\})$ に対して、 $\overline{A/J_n}$ はすべて type I W^* -factor である。

(2) $A \subset B$ (C^* -subalgebra) $\Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$? (C^* -subalgebra). "否"である。 A が separable infinite dimensional Hilbert space H に作用し、 $A \cap CCH = \{0\}$ なる UHF-algebra とする。 $B = A + CCH$ は、 $\bar{B} = BCH$ なる可分 C^* -algebra であり $\bar{A} \subset BCH$ (C^* -subalgebra) とすると、

$\bar{A}$ は自明でない可分な表現をもつことになり矛盾である。

(3) 残された問題として primitive separable NGCR-algebra A に対する $\bar{A}$ (non W^* , type II AW^* -factor) の分類があるがこれについては今のところまったく不明である。

次に問題(2)について考えよう。 C^* -algebra A 上の各 derivation δ が $\bar{A}$ 上に一意に拡張できるか? automorphism についてはどうか?

答は "yes" である。これは洪名, 岡安, 筆者の共同研究でおお[5]。

B を必ずしも unital でない C^* -algebra とし $\text{Der}(B)$ を B 上のすべての derivations のつくる Lie algebra とし, $\text{Der}(B; C)$ を $\delta \in \text{Der}(A)$ の元で, B の C^* -subalgebra C に対して $\delta(C) \subset C$ なるもの全体のつくる Lie subalgebra とする。

$(B_n)^m$ と B の injective envelope $I(B)$ に至ける B_n の元から成る increasing net の supremum 全体の集合とする。 $(B_n)^m \subset \bar{B}$ に注意しよう。

定理 5. (1) $\forall \delta \in \text{Der}(I(A); A)$ に対して, $\|\delta\| = \|\delta|_A\|$ かつ $\exists g \in (A_n)^m + i(A_n)^m (\subset \bar{A}) : \delta = \text{ad} g$,

(2) $\forall \delta \in \text{Der}(A)$ に対して, $\exists I(\delta) \in \text{Der}(I(A); A) : I(\delta)|_A = \delta$ 且つ mapping $\text{Der}(A) \ni \delta \longmapsto I(\delta) \in \text{Der}(I(A); A)$ は $\text{Der}(A)$ onto $\text{Der}(I(A); A)$ の isometric Lie isomorphism である。

(3) $I(\delta)$ が skew adjoint $\Leftrightarrow \delta$ が skew adjoint.

上の一意性の証明及び(2)の定理の証明には次の $I(A)$ の essential

properly が本質的である。

命題 $A \subset B \subset I(A)$ なる有限 C^* -algebra B に対して, B から A への C^* -algebra C の completely positive map Φ に対して, $\Phi|_A$ が completely isometric ならば Φ 自身 completely isometric である [3].

derivation δ の minimal generator $h(\delta)$ の一意性 [Halpern] 及び $\bar{A}$ の essential property によれば次の事実成立する。

定理 6. $D(A)$ は $\{A, h(\delta), \delta \in \text{Der}(A)\}$ により generate された C^* -algebra とする。この時, $D(A)$ は次の性質を満たす。

- (1) $D(A)$ は $\bar{A}$ の C^* -subalgebra である,
- (2) 各 $\delta \in \text{Der}(A)$ に対して, $\exists h(\delta) \in D(A) : \delta = \text{ad } h(\delta)|_A$,
 $\frac{1}{2} \|\delta\| = \|h(\delta)\|$,
- (3) $\forall$ ideal J of $D(A)$ $J \cap A = \{0\}$ なるものは $J = \{0\}$,
- (4) もし A が factorial ならば, $D(A)$ は境界の意味の A に対する derived algebra である。

ρ を C^* -algebra A の automorphism とすると, 一意的に $\rho = \pi\eta$ π は A の $*$ -automorphism, η は positive automorphism (i.e. $\eta'(x) = (\eta^{-1}(x))^*$ といったとき, $\eta' = \eta$, $\text{Sp}(\eta) \subset (0, +\infty)$) と分解できる事が知られており [6, 7]。 $\eta = (\rho'\rho)^{1/2}$ である。 η を derivation に变形しそれを $\bar{A}$ まで拡大し又もとにもとめると, ρ は $\bar{A}$ 上で $(I(A))$ uniquely extend できる。この事に注意すると次の事が

成立する。

定理 7. (1) $\forall \varphi \in \text{Aut}(A)$ に対して, unique な $I(\varphi) \in \text{Aut}(I(A); A)$
 が $I(\varphi)|_A = \varphi$ なる如く存在し,

$$\varphi \longmapsto I(\varphi)$$

は $\text{Aut}(A)$ onto $\text{Aut}(I(A); A)$ の uniformly bicontinuous group isomorphism
 である,

(2) $I(\varphi)$ が $*$ -preserving $\stackrel{(\text{resp. positive})}{\iff} \varphi$ が $*$ -preserving (resp. positive),

(3) $I(\varphi_t)$ $(-\infty < t < \infty)$ が uniformly continuous one parameter group
 $\iff \varphi_t$ $(-\infty < t < \infty)$ が uniformly continuous one parameter group,

この時, $I(\varphi_t)$ は $I(\varphi_t) = \text{Ad exp } t g \quad \forall t (-\infty < t < \infty)$ with
 $g \in \bar{A}$ を満たす。

References

- [1] H. Behnke, F. Krauss and H. Leptin, C^* -algebren mit geordneten ideal Folgen, J. Functional Anal., 10(1972), 204-211.
- [2] H. Halpern, The norm of an inner derivation of an AW^* -algebra, Preprint.
- [3] M. Hamana, Injective envelopes of C^* -algebras, J. Math. Soc. Japan, 31(1979), 181-197.
- [4] ———, Regular embeddings of C^* -algebras in monotone complete C^* -algebras, To appear in J. Math. Soc. Japan.
- [5] ———, T. Okayasu and K. Saitô, Extensions of derivations and automorphisms from C^* -algebras to their injective envelopes, To appear.

- [6] T. Okayasu, A structure theorem of automorphisms of von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 20(1968), 199-206.
- [7] ———, Polar decomposition for isomorphisms of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 26(1974), 541-554.
- [8] S. Sakai, Derived C^* -algebras of primitive C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 25(1973), 307-316.
- [9] K. Saitô, AW^* -algebras with monotone convergence property and examples by Takenouchi and Dyer, Tôhoku Math. J., 31(1979), 31-40.
- [10] ———, A structure theory in the regular σ -completion of a C^* -algebra, To appear in J. London Math. Soc..
- [11] J.D.M. Wright, Regular σ -completion s of C^* -algebras, J. London Math. J., 12(1976), 299-309.
- [12] ———, Wild AW^* -factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13(1976), 83-89.

$$N = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \mathbb{H}$$

$$\hat{\phi} \hat{N} = \mathbb{T} \oplus \mathbb{T} \quad \downarrow \quad \mathbb{T}'$$

$$\downarrow \text{Ind } \psi$$

$$N \uparrow H$$

$$\chi \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right) = e(\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2)$$

$$\phi(h \cdot z) = \phi(h) \chi(z)$$

$$\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, m \right) \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, 0 \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, m + 0 \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} m_1 + n_1 \\ m_2 + m n_1 + n_2 \end{pmatrix}, m \right)$$

$$\begin{cases} n_1 = 0 \\ m_2 + m n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, m \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -m n_1 \end{pmatrix}, m \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, 0 \right)$$

$$\phi \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, m \right) = \phi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -m n_1 \end{pmatrix}, m \right) \chi \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, 0 \right)$$