

横磁場の下でのXYスピニ系におけるソリトン時励起とダイナミクスおよび関連する問題 (superfluid He^4 など)

京都工芸繊維大学工学部物理教室
武野正三

§1. はじめに

古典的スピニ系は非線型励起としてのソリトンが重要な性質を有する。本質的な役割を果たす果てはfieldの一つである。一次元の場合、等価ハイゼンベルグ模型は所謂非線型シュレディンガー方程式と同等であることが示され、また微分幾何学のある種の問題としても重要な役割を担っている。二次元の場合、主として数理論理学の発展に伴ってその性格も当然であるが、二次元、三次元の問題は古典的スピニ系は他のfieldの問題と関連していることが最近明らかにされている。例えば、二次元の古典等価ハイゼンベルグ模型には定常解として、イニタニオン解があり、これはボクサーの閉じた軌道と関連していることが論じられている。また、三次元の等価ハイゼンベルグ模型は軸対称重力場と関連していることが知られている。このように、液体 He^4 と関連の深い横磁場の下でのXYスピニ系におけるソリトン時励起とそのダイナミクスおよび関連する問題を論ずることにする。この古典的スピニ系における非線型励起を表はす一様法解および渦解がソリトンとしての性質を持つことを示し、これらおよびそれに関連する物理的諸問題を考察することにする。

我々の考察の対称性をもつ系は次のハミルトニアンで表わされる:

$$H = -\epsilon \sum_n S_n^z - \sum_{nm} J(n, m) (S_n^x S_m^x + S_n^y S_m^y), \quad |S_n| = 1. \quad (1)$$

ここに、 ϵ は定数、 $J(n, m)$ は相互作用を表わす定数である。 S_n^α ($\alpha = x, y, z$) は二つの回転角 θ_n, φ_n により次の如く parametrized される。

$$S_n^x = \cos \theta_n \sin \varphi_n, \quad S_n^y = \sin \theta_n \sin \varphi_n, \quad S_n^z = \cos \theta_n. \quad (2)$$

すると、スピニに対する運動方程式は一般に次の形に書ける、

$$\dot{\theta}_n = (1/\sin \theta_n) (\partial H / \partial \varphi_n), \quad \dot{\varphi}_n = -(1/\sin \theta_n) \partial H / \partial \theta_n. \quad (3)$$

ボース系へのよりよい対応を考察するために、(3)の代りに

$$\dot{\theta}_n = (1/\sin \theta_n \cos \theta_n) (\partial H / \partial \varphi_n), \quad \dot{\varphi}_n = -(1/\sin \theta_n \cos \theta_n) \partial H / \partial \theta_n \quad (4)$$

を導入する方が便利である。(4)式で連続体近似(1次元)を得る。このスピニ系を便宜上 spin fluid と呼ぶことにする。横磁場下のXY模型に対して、spin fluid は次の式で表わされる

$$(1/2) (\partial/\partial t) (\sin^2 \theta) + \nabla \cdot (\sin^2 \theta \nabla \varphi) = 0 \quad (5a)$$

$$\sin \theta \cos \theta \dot{\varphi} = -\gamma \sin \theta + \cos \theta [1 - (\nabla \varphi)^2 + \Delta] \sin \theta, \quad \gamma = \epsilon/2 \sum_m J(n, m) \quad (5b)$$

ここで、時間変数、空間変数は適当に rescale してある。すると (54) は spin fluid の速度式、密度 ρ を次式

$$\vec{v} = \nabla \varphi, \quad \rho = \sin^2 \theta \quad (6)$$

で定義すると、連続の方程式となることになる。但し、元のスピニ系の場合には、(54) の左辺第一項の $\sin^2 \theta$ の代わりに $\cos \theta$ と云う項が現われ、流体の方程式に対応したものとなりなりこくに注意する必要がある。(5) 式の 定常解 系は local minimum state を与えるが、それは

$$2 \cos \theta \nabla \theta \cdot \nabla \varphi + \sin \theta \Delta \varphi = 0 \quad (7a)$$

$$-\gamma \sin \theta + \cos \theta [1 - (\nabla \varphi)^2 + \Delta] \sin \theta = 0 \quad \text{or} \quad \Delta \sigma + [1 - (\nabla \varphi)^2] \sigma - \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} = 0 \quad (7b)$$

$$\sigma = \sin \theta$$

の解がある。ここで、(7) 式の解としての一様流解と渦解を論じ、前者を液体 He⁴ の flowing state と対応させ、両者のエネルギー密度を比較することにより、critical velocity を導出する。すなわち、液体 He⁴ の場合と比較することにする。つぎに、渦解に対しては、(5) 式より、渦のダイナミクスを論じ、それは二次元の流体方程式に現われる渦のダイナミクスと同じ形の方程式に従うことを示す。

§2. 定常解の一般性質

(7a) 式で φ は Laplace 方程式の解であるとする。即ち

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{または} \quad \nabla \theta \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{or} \quad \nabla \theta \cdot \vec{v} = 0 \quad (8)$$

(8) は velocity field or velocity potential を決める式である、(7b) はそれに代ってスピニ流体の密度を決める式と考えることができる。定常解の形は、すると、(8) より与えられ、物理的に興味あるものとして、次の二つの型の解を考える：

(i) 一様流解

$$\vec{v} = \text{const} = \vec{v}_0 = v_0 \hat{z} \quad \text{or} \quad \varphi = v_0 z; \quad v_0: \text{定数}; \quad \hat{z}: z\text{-軸方向の単位ベクトル} \quad (9a)$$

$$\theta = \theta(x, y). \quad (9b)$$

(ii) 渦解 or 円柱対称解

$$\varphi = \delta \phi \quad \text{or} \quad \vec{v} = (\delta/r) \hat{\phi}; \quad \delta = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10a)$$

$(r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \phi, z)$: 円柱座標; $\hat{\phi}$: ϕ 方向の unit vector

$$\theta = \theta(r). \quad (10b)$$

(10a) のもっと一般的な解は

$$\varphi = \sum_j \delta_j \frac{z - z_j}{x - x_j}, \quad \delta_j = \pm 1, \pm 2, \dots; \quad x_j, z_j: \text{定数, vortex の位置を表わす} \quad (10a')$$

以下 §3, §4 に於て上式で与えられる一様流解、渦解をより詳しく論ずることにする。

§ 3. 一様流解とその性質

(9) と (7b) に代入すると, 流体の密度を σ とし

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + (1 - v_0^2) \sigma - \gamma \sigma (1 - \sigma^2)^{-1/2} = 0 \quad (11)$$

が得られる。この式の non-trivial solution として, symmetry-breaking state を与える解

$$\sigma = \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{(1 - v_0^2)^2}} \equiv \pm \sigma_0 \quad \text{with } \gamma < 1 \quad (12)$$

が得られる。これは z 軸方向に速さ v_0 の flowing state があるときの凝縮相に対応するものである。 σ_0 の最大値 $\sigma_0(\max)$ および σ_0 がゼロになる速度 $v_0(\max)$ は, それぞれ, 次の式で与えられる。

$$\sigma_0(\max) = \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad v_0(\max) = (1 - \gamma)^{1/2} \quad (13)$$

したがって, 系の Hamiltonian density を $\mathcal{H}$ とするとそれは次のようになる。

$$\mathcal{H} = \int \mathcal{H} d\vec{r} \quad \text{with} \quad \mathcal{H} = -\gamma \sqrt{1 - \sigma^2} - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2} [(\nabla \sigma)^2 + \sigma^2 (\nabla \varphi)^2] \quad (14)$$

$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\sigma)$ に於て, $\mathcal{H}(\sigma = \sigma_0) \equiv E_{uf}(v_0)$ は速さ v_0 の flowing state のエネルギー密度と定義するとそれは

$$E_{uf}(v_0) = -\frac{1 - v_0^2}{2} \left[1 + \frac{\gamma^2}{(1 - v_0^2)^2} \right] \quad (15)$$

が得られる。この状態の ground state からの excitation energy ΔE_{uf} は

$$\Delta E_{uf} \equiv E_{uf}(v_0) - E_{uf}(0) = \frac{v_0^2}{2} \left(1 - \frac{\gamma^2}{1 - v_0^2} \right) \quad (16)$$

となる。(11) は static な 2 次元の φ^4 -like model の方程式であるが, これは横磁場の Ising スピン系に現われる非対称型方程式と同一のものであることに注意(た 11.5) 流体 He^4 の問題に関しては, 11 冊, 壁が yz -面内にあり, flowing state は y -方向に一樣にあるとして σ を x のみの関数と考えると, (11) は境界条件

$$\sigma = 0 \quad \text{as } x \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sigma = \sigma_0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (17)$$

の下で

$$\frac{\sigma}{1 + \eta} = \frac{\sigma_0}{1 + \eta_0} \tanh \left[\left(\frac{\sigma_0}{2\eta_0} \right) \left\{ (1 - v_0^2)^{1/2} x - \sin^{-1} \sigma \right\} \right] ; \quad \eta \equiv \omega \theta, \eta_0 \equiv \omega \theta_0. \quad (18)$$

の解により記述される。この解は φ^4 -model の kink 解に相当するものであるが, これは当然, (12) により与えられる symmetry-breaking state の二重縮退性によるものである。尚, (18) より, 流体 He^4 の healing length に相当するものを議論するに役立つが, 詳細については省略することにする。尚, (17) 式または (11) より明らかになることであるが, Ginzburg-Pitaevskii 方程式の場合等と異なり, スピン系特有の $\omega \theta$ 型の非対称型項が現われる。

§4 渦解 とその性質

(10) を (7b) に代入すると σ に対する次のような非線形方程式の -

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\sigma}{dr} + \left(1 - \frac{\delta^2}{r^2}\right) \sigma - \frac{\gamma\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = 0 \quad (19)$$

方程式が得られる。この式に境界条件

$$\sigma = 0 \quad \text{as } r \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sigma = \sigma_0(\max) = (1-\delta^2)^{1/2} \quad (20)$$

を取扱ふものとすると、(19) の厳密解は求まることは出来ないが、次の形の漸近解を持つことが分かる：

$$\sigma = \begin{cases} J_\delta[r(1-\delta^2)], & (J_\delta: \text{Bessel func.}) & \text{for small } r \end{cases} \quad (21a)$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0(\max) - \delta^2 \delta^2 \sqrt{1-\delta^2} / r^2 & \text{for large } r. \end{cases} \quad (21b)$$

いま、spin fluid は半径 R 、長さ L の円筒形の容器に収められているものとすると、そのエネルギー E_v は、vortex の外殻 $E_v^{(out)}$ と内殻 $E_v^{(in)}$ の二つの部分に分けられる。vortex core の外殻に於ては σ は r に従ってゆるやかに変化するものと (7 (19) に於て $d^2\sigma/dr^2$, $d\sigma/dr$ を含む部分は無視すると $E_v^{(out)}$ に対する近似式として

$$E_v = -\pi\gamma L \left[\frac{1}{2}(R^2 - r_1^2) \left(\delta + \frac{1}{\delta} \right) + \frac{\gamma}{2} \ln \frac{R^2 - 1}{r_1^2 - 1} - \frac{1}{\delta} \ln \frac{R}{r_1} \right], \quad (r_1: \text{core の半径}) \quad (22)$$

が得られる。 $\delta = \pm 1$ に対する 1 個の vortex の生成エネルギー ΔE_v は

$$\Delta E_v = E_v - \pi\gamma L R^2 E_{uf}(v_0=0) = E_v^{(in)} + 2\pi L \left[\frac{1}{4}(1+\delta^2)r_1^2 + \frac{1}{2}(1-\delta^2) \ln \frac{R}{r_1} \right] \quad (23)$$

となる。(22) における特徴的な項は $\ln(R/r_1)$ の項であり、液体 He^4 の場合と同様同じ事情になる。

§5. Critical velocity

§3, §4 に於て、一様流解、渦解につき論じたが、 v_0 が小さいときには次の不等式

$$\text{一様流状態のエネルギー} < \text{渦状態のエネルギー} \quad (24)$$

が成り立つ。一様流状態のエネルギーは v_0 の増加と共に増大するから、 v_0 のある値に於て両者は互に等しくなる。このような v_0 の値 v_{0c} をここでは critical velocity と定義すればそれは

$$\pi R^2 L \Delta E_{uf}(v_0) = \Delta E_v \quad (25)$$

より得られる。 ΔE_v の中で、 r_1 は atomic scale の程度と考えると、 $E_v^{(in)}$ からの寄与は無視でき、 v_{0c} に対する近似式として

$$v_{0c} = \sqrt{2 \ln(R/r_1)} / R \quad (26)$$

が得られる。一方、よく知られている液体 He^4 に対する Feynman の式は、⁷⁾ critical velocity と v_{cr} とは

$$v_{cr} = (\hbar/mR) \ln(R/r_1) \quad (27)$$

となる。尚、(26) の導出に際しては、§ 5 と通じて適当に rescale した座標を用いているが、それは未だ速度のディメンジョンを持っていない。従って、(26) と (27) は R -dependence を別とすれば、尚直接比較できないものがある。

§ 6. 一様流状態のまわりの小さなゆらぎ (Bogoliubov phonons)

この section は本質的に線型の問題に属するものであるが、(3) に対する (4) の意味を考察する場合に有用と述べた。 $\sigma = \sin \theta$, $n = \cos \theta$ に対する (5) 式は

$$\sigma \ddot{\sigma} + \nabla \cdot (\sigma^2 \nabla \varphi) = 0 \quad (28a)$$

$$n \sigma \dot{\varphi} = -\gamma \sigma + n [1 - (\nabla \varphi)^2 + \Delta] \sigma \quad (28b)$$

となる。いま、定常解 $\sigma = \sigma(t)$, $n = n(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ のまわりのゆらぎを考察するため

$$\sigma = \sigma(t) + \sigma', \quad n = n(t) + n', \quad \varphi = \varphi(t) + \varphi' \quad (29)$$

$$\text{with } \sigma^2 + n^2 = 1, \quad \sigma(t)^2 + n(t)^2 = 1$$

とおき、又 (28) に入力して、 σ' , n' , φ' に ≈ 1 次の項のみを残す。すると、それぞれに対する式は

$$\ddot{\sigma}' = -2 \vec{v}_0 \cdot \nabla \sigma' - \sigma_0 \Delta \varphi' \quad (30a)$$

$$\dot{\varphi}' = -2 \vec{v}_0 \cdot \nabla \varphi' - \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_0^2} (1 - v_0^2) \sigma' + \frac{1}{\sigma_0} \Delta \sigma' \quad (30b)$$

が得られる。 $\lambda = r$

$$\sigma' = A \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})], \quad \varphi' = B \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \quad (31)$$

とおくと分散関係を表わす式

$$\omega \equiv \omega(\vec{k}) = \sigma_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \sigma_0^2} + \frac{k^2}{\sigma_0^2}} \quad \xrightarrow{k \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{1 - \sigma_0^2}} k \quad (32)$$

が得られる。これは Bogoliubov phonon に対応する線型モードの分散式である。一方 (3) からは

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\sigma_0^2 + n_0^2 k^2} \quad \xrightarrow{k \rightarrow 0} \sigma_0 k \quad (32')$$

が得られることを附記した。

§7. 液体 He^4 の対応

松原-松田の仕事⁴⁾以来、数回考察して来るスピニ模型は液体 He^4 と密接な対応を持つものがあることが分かった。これを一般化した結果は、 He^4 の場合に H のような意味を持つものがあるかを調べるために、この section では普通の scale を用いることにする。液体 He^4 の場合の condensate wave function ψ は今の場合

$$\psi = \sin \theta e^{i\varphi} \quad (33)$$

と ψ を ψ に対応する。すると、(7) は次の形を持つ：

$$-J\alpha a^2 \Delta \psi - J\psi + \epsilon \psi (1 - |\psi|^2)^{-1/2} = 0 \quad (34)$$

ここに

$$J = \sum_m 2J(n, m), \quad a: \text{格子定数}$$

である。また、 α は $J(n, m)$ の T - $1/2$ 変換に於て、 k に依存するものの T 最低次のものがある。即ち

$$\begin{aligned} J(\vec{k}) &= \sum_m J(n, m) \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{m} - \vec{n})a] \rightarrow J(\vec{k}=0) - J(\vec{k}=0)(\alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2 + \alpha_3 k_3^2) a^2 \\ &\rightarrow J(\vec{k}=0) - J(\vec{k}=0) \alpha^2 k^2 a^2 \end{aligned} \quad (35)$$

としたものがある。一方、Gross-Pitaevskii の方程式は⁶⁾

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - \beta \psi + g |\psi|^2 \psi = 0 \quad \beta, g: \text{定数} \quad (36)$$

により表わされる。又 α は T 次の対応

$$\alpha a^2 J \longleftrightarrow \hbar^2/2m, \quad J - \epsilon \longleftrightarrow \beta, \quad \epsilon/2 \longleftrightarrow g \quad (37)$$

があることが分かる。従って、(26) から入る ψ の critical velocity, (32) から得られる音速 C は、 λ は λ である

$$v_{oc} = (\hbar/mR) \sqrt{2 \ln(R/r_1)}, \quad C = (\hbar/m\alpha a^{1/2}) \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{1 - \sigma_0^2}} \quad (38)$$

と得る。ここに

$$\begin{aligned} m &= 2.7 \times 10^{-24} \text{ g}, \quad a = 3 \times 10^{-8} \text{ cm}, \quad \alpha = 1/6, \quad R = 10^{-5} \text{ cm}, \quad r_1 = 4 \times 10^{-8} \text{ cm} \\ \epsilon/J &= 1/4 \end{aligned} \quad (39)$$

とすると、

$$v_{oc} = 50 \text{ cm/sec}, \quad v_{cr} = 100 \text{ cm/sec}, \quad C = 230 \text{ m/sec}, \quad C_{exp} = 240 \text{ m/sec} \quad (40)$$

と云う結果となる。ただし、(39) に於て、 R と Γ の数値は Feynman のものと同一のも
のを用いた。また、 C_{exp} は音速の実験値である。尚 (32) より得られる音速を C' とすると、
(39) を与える数値に付いて

$$C' = (k/m\alpha^{1/2}) \sigma_0 = 60 \text{ m/sec} \quad (41)$$

が得られる。これは、松原-松田により得られた音速に対応する。⁴⁾ この数値は (40) の
第3式に於て与えられるものより約 1/4 程小さく、実験と大きく異なる。これは、
dynamic regime に於ては、流体への対応を論ずる限り、(3) より (4) により思われる第一の理
由である。(40) を与える結果は、 v_{0c} の数値、表式に尚若干の改良すべき点があるが、
大体に於て良好なように思われる。

§ 8. 渦のダイナミクス (= 次元の場合)

2次元の場合、渦解が物理的にあり唯一の意味ある解となる。この場合の渦のダイ
ナミクスを支配する方程式は何か。これがこの section の主要なる目標である。以下、
(5) に於て φ は次の式をみたすものとする:

$$\varphi = \Omega t + \phi \quad \text{with} \quad \Delta \phi = 0; \quad \phi = \sum_j \delta_j \tan^{-1} \frac{y - y_j}{x - x_j} \equiv \sum_j \phi_j(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (42)$$

即ち ϕ は、定常問題の場合の φ の解 (109') と同一の形式をとるものとする。ここでの
基本時仮定は、 ϕ , θ は渦の座標 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ を通じてのみ時間 t に依存すると云うものである。

すると、(5a), (5b) はそれぞれ

$$\sum_j \nabla_j \theta \cdot \vec{r}_j = -2 \sum_j \nabla \theta \cdot \vec{v}_j(\vec{r}, \vec{r}_j) \quad (43a)$$

$$\sin \theta \cos \theta \sum_j \nabla_j \phi_j \cdot \vec{r}_j = -\delta \sin \theta + \cos \theta (1 + \Delta) \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \sum_{j,k} \vec{v}_j(\vec{r}, \vec{r}_j) \cdot \vec{v}_k(\vec{r}, \vec{r}_k) - \Omega \sin \theta \quad (43b)$$

となる。ただし、 $\vec{v}_j(\vec{r}, \vec{r}_j) = (v_{jx}(\vec{r}, \vec{r}_j), v_{jy}(\vec{r}, \vec{r}_j))$ は velocity field $\vec{v} = (v_x, v_y)$ の j 番目の
vortex からの寄与である。

$$v_{jx} = -\delta_j \frac{y - y_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \quad v_{jy} = \delta_j \frac{x - x_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (44)$$

を与える。 $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_i$ の limit では

$$\theta(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) = \theta(\vec{r} - \vec{r}_i) \propto |\vec{r} - \vec{r}_i|^m \quad (m > 0), \quad \nabla \theta \cdot \vec{v}_i(\vec{r}, \vec{r}_i) \text{ for } \vec{r} \rightarrow \vec{r}_i \quad (45)$$

となるから

$$\vec{r}_i = 2 \sum_{j \neq i} \vec{v}_j(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (46)$$

が得られる。これは渦の運動を支配する式である。尚、(46) を (43b) に代入して得られ
るものは極限 $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_i$ に於て (45) の性質を持つことが示される。(46) を得るには、vortex core

の極小化に伴う解の性質(45)が本要であるが、このことは、この議論が正しいものなることを示すものである。(46)は次の正準方程式:

$$\delta_i \dot{x}_i = \partial H / \partial y_i, \quad \dot{y}_i = -\partial H / \partial x_i \quad (47)$$

$$H = -\sum_{i < j} \delta_i \delta_j \ln |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \quad (48)$$

と同等である。従って、2次元の *spin fluid* に於ける渦のダイナミクスは、通常の2次元流体カサの場合の渦のダイナミクス⁸⁾と同一の式に従うことが示される。尚、この結果は、元のスピン系のモデルの詳細にはよらず、唯対称性と次元数により決まるものであるようにある一種の *universality* が成り立つことを暗示している。(47), (48) は多体問題または力学系の一つの例を提供するが、近年、Novikov と Sedov は、この力学系は渦が3個以下は可積分であるが、4個以上になると非可積分となること、又(7, 数値計算に於て) 4個の場合の渦は *stochastic* な振舞をすることを示している。⁹⁾ 従って、我々の場合の *spin fluid* における渦のダイナミクスに於ても同様の *stochastic* な振舞が現われることを暗示している。多数の渦から成る系のダイナミクスは、同様の状況の下で、乱流の様相を示すかも知れない。

Acknowledgements

本研究は、岩大工学部(現在 Los Alamos Scientific Laboratory 滞在中) 本間重雄氏との共同研究によるものである。同氏との討論に於て得た多くの助言はここに附記したい。また、科研費の助成に感謝する。非常に有益であった。東大理学部 和田靖氏を始め、討論して頂いた同僚の亦に感謝の意を表したい。

References

- 1) M. Lakshmanan, *Phys. Letters* **61A**(1977), 53 and references cited therein.
- 2) A. A. Belavin and A. M. Polyakov, *JETP Letters* **22** (1975), 245.
岩崎洋一, 物性研究
- 3) S. Takeno, *Prog. Theor. Phys.* **66** (1981), 1250 and references cited therein.
- 4) T. Matsubara and H. Matsuda, *Prog. Theor. Phys.* **16** (1956), 569.
- 5) S. Takeno, *J. Phys. Soc. Japan*, **48** (1980), 1075.
- 6) V. L. Ginzburg and L. P. Pitaevskii, *Soviet Phys. - JETP* **34** (1958), 1240.
E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20** (1961), 454; *J. Math. Phys.* **4** (1963), 195.
- 7) R. P. Feynman, *Statistical Physics* (W. A. Benjamin, Inc., 1972), Chap. 11.
- 8) E. A. Novikov and Y. B. Sedov, *Soviet Phys. - JETP* **48** (1978), 440 and references cited therein.
- 9) S. Homma, T. Aoki and S. Takeno, *Prog. Theor. Phys.* **66** (1981), 1590.