

Lipemorphisms close to an Anosov Diffeomorphism

名大理 高木 健太郎

§ 0 Introduction

以下 M を compact connected boundaryless C^∞ -manifold of dimension n with a Riemannian metric $\|\cdot\|$ とする。 $\|\cdot\|$ より自然に induce される M 上の distance function を d で表わす。 M から M への continuous map の全体を $C^0(M)$ で表わし, homeomorphism の全体を $H(M)$ で表わす。 $C^0(M)$ 上には d より自然に induce される distance function d_0 がある。

$$; d_0(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x)) \quad \forall f, g \in C^0(M)$$

M から M への Lipschitz map の全体を $L(M)$ で表わし, Lipemorphism の全体を $HL(M)$ で表わす。 ; $HL(M) = \{f \in H(M) \mid f, f^{-1} \in L(M)\}$

勿論, $HL(M) \subset L(M) \subset C^0(M)$ である。 $HL(M)$ の各元 f, g に対して, $d_0(f, g)$ が十分小さければ, Lipschitz の意味での近さを計る量 $d_L(f, g)$ が自然に定義される。(§1)

M から M 上への C^1 -diffeomorphism の全体を $\text{Diff}^1(M)$ で表わす。

$\text{Diff}^1(M)$ の各元 f, g に対しても, $d_0(f, g)$ が十分小さければ, C^1 の

意味での近さを計る量 $d_1(f, g)$ が自然に定義される。平均値の定理によつて, $\text{Diff}^1(M) \subset \text{HL}(M)$ であるが, d_1 を $\text{Diff}^1(M)$ に制限したものが d_1 であるとみてよい。(See §1 and [4])

$f \in \text{Diff}^1(M)$ が Anosov diffeomorphism であるとは、次の条件をみたすことである。

$\exists E^s = \bigcup_{x \in M} E_x^s, \exists E^u = \bigcup_{x \in M} E_x^u$: continuous subbundles of TM
 $\exists C \geq 1, \exists \lambda : 0 < \lambda < 1$: constants

such that

(i) $TM = E^s \oplus E^u$ (Whitney sum)

(ii) $df(E^\sigma) = E^\sigma \quad \sigma = s, u$ 但し, df は f の differential を表わす。

(iii) $\|df^n(v)\| \leq C \cdot \lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E^s \quad \forall n \geq 0$

$\|df^{-n}(w)\| \leq C \cdot \lambda^n \|w\| \quad \forall w \in E^u \quad \forall n \geq 0$

Anosov diffeomorphism の stability に関して次の定理がある。

Theorem (Anosov) ([1])

$f \in \text{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする。このとき,

$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0$

such that

$\exists \gamma : \{g \in \text{Diff}^1(M) \mid d_1(g, f) < \delta_0\} \rightarrow \{u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0\}$

with the property that $\gamma \circ \gamma(g) = \gamma(g) \circ f$ for $\forall g \in \text{Diff}^1(M)$ with $d_1(g, f) < \delta_0$.

更にこのとき, 各 $g \in \text{Diff}^1(M)$ with $d_1(g, f) < \delta_0$ に対して, $\gamma(g)$ は homeomorphism であり, $d_0(\gamma(g), 1_M) \rightarrow 0$ as $d_1(g, f) \rightarrow 0$ でもある。

Theorem (P. Walters) ([7])

$f \in \text{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする。このとき,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0$$

such that

$$\exists^1 \gamma : \{g \in H(M) \mid d_0(g, f) < \delta_0\} \longrightarrow \{u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0\}$$

with the property that $f \circ \gamma(g) = \gamma(g) \circ f$ for $\forall g \in H(M)$ with $d_0(g, f) < \delta_0$.

更にこのとき, 各 $g \in H(M)$ with $d_0(g, f) < \delta_0$ に対して $\gamma(g)$ は onto であり, $d_0(\gamma(g), 1_M) \rightarrow 0$ as $d_0(g, f) \rightarrow 0$ でもある。

Remark.

P. Walters の定理で, $\gamma(g)$ は一般には injective ではない。

ここでは次の定理を証明する。

Theorem ([6])

$f \in \text{Diff}^1(M)$ を Anosov diffeomorphism とする。このとき,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \exists \delta_0 > 0$$

such that

$$\exists^1 \gamma : \{g \in HL(M) \mid d_2(g, f) < \delta_0\} \longrightarrow \{u \in C^0(M) \mid d_0(u, 1_M) < \varepsilon_0\}$$

with the property that $g \circ \gamma(g) = \gamma(g) \circ f$ for $\forall g \in HL(M)$ with $d_2(g, f) < \delta_0$.

更にこのとき, 各 $g \in HL(M)$ with $d_2(g, f) < \delta_0$ に対して, $\gamma(g)$ は homeomorphism であり, $d_0(\gamma(g), 1_M) \rightarrow 0$ as $d_2(g, f) \rightarrow 0$ でもある。

証明は, J. Moser [4] の idea に依りながら, Anosov diffeomorphism が expansive であることに注意して進めていく。 ([6])

$\{(U_\alpha, \alpha)\}_\alpha$ を有限個の charts よりなる M の 1 つの atlas とする。但し各 local diffeomorphism α は U_α の closure $\overline{U_\alpha}$ を含む, M のある open subset 上で define されているとする。

; $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$: a finite open covering of M .

$\phi(\alpha) \supset \overline{U_\alpha}$, $\alpha: \phi(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ into C^∞ diffeomorphism.

$\mathbb{R}^n$ の standard norm を $|\cdot|$ で表わす。

§1. Lipschitz maps on M .

正数 λ_1 を次の条件を満たすように十分小さくとる。

; 各 $f \in C^0(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ に対して,

$$f(\overline{U_\alpha}) \subset \phi(\alpha) \quad \forall \alpha$$

任意に $f \in C^0(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ をとる。このとき, $f \in L(M)$ となるためには, 各 α に対して $\alpha \circ f \circ \alpha^{-1}: \alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ が Lipschitz map であること, 即ち $\alpha \circ f \circ \alpha^{-1}: \alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ の Lipschitz constant を, 記号 $L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} \text{ on } \alpha(U_\alpha))$ (または単に $L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1})$) で表わすとき, $L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} \text{ on } \alpha(U_\alpha)) < +\infty$ であることが必要かつ十分である。

各 $f \in L(M)$ with $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ に対して, $d_L(f, 1_M)$ を,

$$d_L(f, 1_M) = d_0(f, 1_M) + \sup_\alpha L(\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} - 1 \text{ on } \alpha(U_\alpha))$$

によつて定める。また各 $g, f \in HL(M)$ with $d_0(g, f) = d_0(g \circ f^{-1}, 1_M) < \lambda_1$ に対して, $d_\lambda(g, f) = d_\lambda(g \circ f^{-1}, 1_M)$ と定める。

Proposition

$f \in L(M)$ を $d_0(f, 1_M) < \lambda_1$ とする。このとき, $\epsilon(, d_\lambda(f, 1_M))$ が十分小であるならば, f は M の diffeomorphism である。 $\therefore f \in HL(M)$

§2. Lipschitz vector fields on M .

$\mathcal{X}^0(M)$ を M 上の continuous vector field の全体とする。 $\mathcal{X}^0(M)$ の中には, complete norm $\|\cdot\|$ が, M 上の与えられている Riemannian metric $\|\cdot\|$ より自然に induce される。

$$\|\cdot\| = \sup_{x \in M} \|\cdot\|_{x} \quad \forall v = (v_x)_{x \in M} \in \mathcal{X}^0(M)$$

各 chart (U_α, α) に対して, $U'_\alpha = \alpha(U_\alpha)$ とおき, $T\alpha : TM|_{U_\alpha} \rightarrow U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$ を α より自然に induce された isomorphism とする。 $T\alpha : TM|_{U_\alpha} \rightarrow U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$ と projection $U'_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ との composition を $D\alpha$ と表わす。

$$\begin{array}{ccc} TM|_{U_\alpha} & \xrightarrow{T\alpha} & U'_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow D\alpha & \downarrow \text{projection} \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

また各 $v \in \mathcal{X}^0(M)$ に対して, $v_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $v_\alpha = D\alpha \circ v|_{U_\alpha}$ によつて定める。

map $|\cdot| : \mathcal{X}^0(M) \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$ を,

$$|v| = \sup_{\alpha} \left(\sup_{x \in U_\alpha} |v_\alpha(x)| \right) \quad \forall v \in \mathcal{X}^0(M)$$

によつて定める。 $\|\cdot\|$ は $\mathcal{X}^0(M)$ の中の complete norm であり, $\|\cdot\|$ とは equivalent である。

Definition.

$\forall V \in \mathcal{X}^0(M)$ をとる。 このとき V が M 上の Lipschitz vector field であるとは, 各 α に対して $V_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ が Lipschitz である, 即ち $L(V_\alpha \circ \alpha^{-1} \text{ on } U'_\alpha) < +\infty$ であることを言うものと定める。

M 上の Lipschitz vector field の全体を $\mathcal{X}_L(M)$ で表わす。 map $\|\cdot\|_L: \mathcal{X}_L(M) \rightarrow \mathbb{R}^+$ を

$$\|V\|_L = \|V\| + \sup_{\alpha} L(V_\alpha \circ \alpha^{-1}) \quad \forall V \in \mathcal{X}_L(M)$$

によつて定める。 $(\mathcal{X}_L(M), \|\cdot\|_L)$ は 1 つの Banach space である。

$\exp = (\exp_x)_{x \in M}: TM \rightarrow M$ を, M 上の与えられている Riemannian metric $\|\cdot\|$ より induce された exponential map とする。

一般に normed space $(E, \|\cdot\|)$ に於いて, 原点の周りの closed λ -ball を $(E, \|\cdot\|)_\lambda$ で, open λ -ball を $(E, \|\cdot\|)_\lambda^\circ$ で表わすことにする。

M は compact であるから, 正数 λ_2 が存在して, 各 $x \in M$ に対して $\exp_x$ は $(T_x M, \|\cdot\|)_{\lambda_2}^\circ$ から, (M, d) に於ける x の周りの open λ_2 -ball への onto diffeomorphism を与えるようにできる。更にこのとき, 任意の $x \in M$ 及び $v_x \in T_x M$ with $\|v_x\| < \lambda_2$ に対して $\|v_x\| = d(x, \exp_x v_x)$ であることがよい。従つてこの λ_2 に対しては $\exp: (\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_{\lambda_2}^\circ \ni V \rightarrow \exp V = \exp \circ V = \{f \in C^0(M) \mid d_0(f, 1_M) < \lambda_2\}$ は

well-defined で bijective であり, 更に, 任意の $V \in (\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_{\lambda_2}^\circ$ に
 対して, $d_0(\exp V, 1_M) = \|V\|$ とする. 便宜上, $\lambda_2 \leq \lambda_1$ としておく.

$\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|$ の equivalent 性により, 正数 ε_1 が存在して, $(\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_{\varepsilon_1}^\circ \subset (\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_{\lambda_2}^\circ$ とする.

Proposition

正数 ε_2 : $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ が存在して 次の条件を満たす.

(i) 各 $V \in (\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_{\varepsilon_2}^\circ$ に対して

$$\exp V \in L(M) \iff V \in \mathcal{X}_\varepsilon(M)$$

(ii) 各 sequence $\{V^i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{X}_\varepsilon(M) \cap (\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_{\varepsilon_2}^\circ$ に対して

$$d_\varepsilon(\exp V^i, 1_M) \rightarrow 0 \text{ as } i \rightarrow \infty \iff \|V^i\|_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ as } i \rightarrow \infty$$

§3. proof of the theorem.

Lemma 1

正数 δ_1, ε_3 : $0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_1$, 関数 $L_1 : (0, \delta_1) \times (0, \varepsilon_3) \rightarrow \mathbb{R}^+$
 及び continuous map $\tau : (\mathcal{X}_\varepsilon(M), \|\cdot\|_\varepsilon)_{\delta_1}^\circ \times (\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_{\varepsilon_3}^\circ \rightarrow \mathcal{X}^0(M)$ が
 存在して 次の条件を満たす.

(i) 各 $w \in (\mathcal{X}_\varepsilon(M), \|\cdot\|_\varepsilon)_{\delta_1}^\circ$ 及び $v \in (\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_{\varepsilon_3}^\circ$ に対して

$$\exp w \circ \exp v = \exp(w + v + \tau(w, v)) \quad \tau(w, 0) = \tau(0, v) = 0$$

(ii) $\forall \delta : 0 < \delta < \delta_1$, $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_3$, $\forall w \in (\mathcal{X}_\varepsilon(M), \|\cdot\|_\varepsilon)_\delta$

及び $\forall v, v' \in (\mathcal{X}^0(M), \|\cdot\|)_\varepsilon$ に対して,

$$|\tau(w, v) - \tau(w, v')| \leq L_1(\delta, \varepsilon) \cdot \|v - v'\|$$

$$(ii) \quad L_1(\delta, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{as } \delta, \varepsilon \rightarrow 0$$

以下 $f: M \rightarrow M$ を 1 つの C^1 -diffeomorphism とし、固定する。

この f に対して、 $\mathcal{X}^0(M)$ の continuous linear automorphism f_* を

$$f_*(v) = df \circ v \circ f^{-1} \quad \forall v \in \mathcal{X}^0(M)$$

により定める。

Lemma 2

正数 $\varepsilon_4: 0 < \varepsilon_4 \leq \varepsilon_1$, 有界関数 $L_2: (0, \varepsilon_4) \rightarrow \mathbb{R}^+$ を continuous map $\mathcal{J}: (\mathcal{X}^0(M), 1 \cdot 1)_{\varepsilon_4}^0 \rightarrow \mathcal{X}^0(M)$ が存在して、次の条件をみたす。

i) 各 $v \in (\mathcal{X}^0(M), 1 \cdot 1)_{\varepsilon_4}^0$ に対して

$$f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp(f_*(v) + \mathcal{J}(v)) \quad , \quad \mathcal{J}(0) = 0$$

ii) 各 $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_4$ 及び $v, v' \in (\mathcal{X}^0(M), 1 \cdot 1)_\varepsilon$ に対して

$$|\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(v')| \leq L_2(\varepsilon) |v - v'|$$

iii) $L_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lemma 3

f を Anosov diffeomorphism とする。然らば f は expansive である。即ち、正数 λ_0 が存在して、各 $x, y \in M$ with $x \neq y$ に対して常に

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} d(f^n(x), f^n(y)) > \lambda_0.$$

proof of the theorem

$\forall g \in HL(M)$ 及び $\forall u \in C^0(M)$ をとる。

このとき、

$$g \circ u = u \circ f \iff (g \circ f^{-1}) \circ (f \circ u \circ f^{-1}) = u \quad \dots\dots\dots ①$$

いま $d_x(g, f)$ 及び $d_0(u, 1_M)$ が十分小なければ, §2 で述べたことより, $\exists! w \in \mathcal{X}_x(M)$ with $|w|_x$ sufficiently small, $\exists! v \in \mathcal{X}^0(M)$ with $|v|$ sufficiently small such that $g \circ f^{-1} = \exp w$, $u = \exp v$ とする。よて ① は 次の式と equivalent とする。

$$\exp w \circ f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp v \quad \dots\dots\dots ②$$

Lemma 2 続いて Lemma 1 により,

$$\begin{aligned} \exp w \circ f \circ \exp v \circ f^{-1} &= \exp w \circ \exp(f_*(v) + \lambda(v)) \\ &= \exp(w + f_*(v) + \lambda(v) + t(w, f_*(v) + \lambda(v))) \end{aligned}$$

よて ② は 次の式と equivalent である。

$$w + f_*(v) + \lambda(v) + t(w, f_*(v) + \lambda(v)) = v \quad \dots\dots\dots ③$$

いま f は Anosov diffeomorphism であるから $1 - f_* : \mathcal{X}^0(M) \rightarrow \mathcal{X}^0(M)$ は continuous linear automorphism である。従て ③ は次の式と equivalent である。

$$v = (1 - f_*)^{-1}(w + \lambda(v) + t(w, f_*(v) + \lambda(v))) \quad \dots\dots\dots ④$$

以下 ④ を解くことを考える。

各 $w \in \mathcal{X}_x(M)$ with $|w|_x$ sufficiently small 及び $v \in \mathcal{X}^0(M)$ with $|v|$ sufficiently small に対して, $F(v) = f_*(v) + \lambda(v)$, $G_w(v) = (1 - f_*)^{-1}(w + \lambda(v) + t(w, f_*(v) + \lambda(v)))$ とする。Lemma 1 の (ii) と (iii) 及び Lemma 2 の (ii) と (iii) により 次の命題を得る。

$$\exists \delta_2 : 0 < \delta_2 \leq \delta_1, \quad \exists \varepsilon_5 : 0 < \varepsilon_5 < \varepsilon_1$$

such that

$$(i) \quad \forall w \in (\mathcal{X}_\ell(M), 1 \cdot 1_\ell)_{\delta_2}^\circ, \quad \forall v \in (\mathcal{X}^\circ(M), 1 \cdot 1)_{\varepsilon_5} \text{ に対して}$$

$$|(1-f_*)^{-1}(1(v))| \leq \frac{1}{3} |v|$$

$$|(1-f_*)^{-1}(1(w, F(v)))| \leq \frac{1}{3} |v|$$

$$(ii) \quad \forall w \in (\mathcal{X}_\ell(M), 1 \cdot 1_\ell)_{\delta_2}^\circ, \quad \forall v, v' \in (\mathcal{X}^\circ(M), 1 \cdot 1)_{\varepsilon_5} \text{ に対して}$$

$$|G_w(v) - G_w(v')| \leq \frac{1}{2} |v - v'|$$

さて, $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_5$ をとる. この ε に対して,

$$\exists \delta : 0 < \delta \leq \delta_2 \text{ such that } |(1-f_*)^{-1}(w)| < \frac{1}{3} \varepsilon \text{ for } \forall w \in (\mathcal{X}_\ell(M), 1 \cdot 1_\ell)_\delta^\circ$$

であることはよい. いま $\forall w \in (\mathcal{X}_\ell(M), 1 \cdot 1_\ell)_\delta^\circ$ をとるとき, いま

述べたことと, 上の (i), (ii) により, $G_w(\cdot) : (\mathcal{X}^\circ(M), 1 \cdot 1)_\varepsilon \ni v \longrightarrow$

$\rightarrow G_w(v) \in (\mathcal{X}^\circ(M), 1 \cdot 1)_\varepsilon$ は well-defined で, contraction constant $\frac{1}{2}$ の contraction 1=なる, (更に, 各 $v \in (\mathcal{X}^\circ(M), 1 \cdot 1)_\varepsilon$ に対して, $|G_w(v)| < \varepsilon$ である.) 従って contraction principle 1=より

$$\exists! v \in (\mathcal{X}^\circ(M), 1 \cdot 1)_\varepsilon^\circ \text{ s.t. } G_w(v) = v$$

$$\text{i.e. } \exp w \circ f \circ \exp v \circ f^{-1} = \exp v.$$

さて, $u = \exp v$ は 1_M と homotopic であるから onto である. よって

次の命題を証明すれば, Theorem の証明は終わる.

: $\forall u : M \rightarrow M$ map を $d_0(u, 1_M) < \lambda_0/2$ としとり fix. する.

いま, $\neq 1$. $\exists g : M \rightarrow M$ bijective map such that $g \circ u = u \circ f$ であるならば, u は injective である.

∴)

$\forall x, y \in M$ をとり, $u(x) = u(y)$ と仮定する. $x \neq y$ と仮定すれば

Lemma 3 により, $\exists m_0 \in \mathbb{Z}$ s.t. $d(f^{m_0}(x), f^{m_0}(y)) \geq \lambda_0$. 之より $u \circ f^{m_0}$
 $= g \circ u$ であるから, $u \circ f^{m_0}(x) = g^{m_0}(u(x)) = g^{m_0}(u(y)) = u \circ f^{m_0}(y)$
 $\therefore \lambda_0 \leq d(f^{m_0}(x), f^{m_0}(y)) \leq d(f^{m_0}(x), u \circ f^{m_0}(x)) + d(u \circ f^{m_0}(y), f^{m_0}(y))$
 $\leq d(u, 1_M) + d(u, 1_M) < \lambda_0$.

これは矛盾である. よって $x = y$ であることがわかる. //

f. e. d.

References.

- [1]. Anosov, Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, (translated by the AMS) No. 90 (1967)
- [2]. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960
- [3]. Hirsch and Pugh, Stable Manifolds and Hyperbolic Sets, Proc. of Symposia in Pure Math. (Global Analysis) XV, AMS (1970) 133 ~ 163.
- [4]. Moser, On a Theorem of Anosov, J. of Differential Equations 5 (1967) 411 ~ 440.
- [5]. Nitecki, Differentiable Dynamics, Cambridge the M.I.T. Press. 1971.
- [6]. Takaki, Lipschitz morphisms close to an Anosov Diffeomorphism, (to appear)
- [7]. Walters, Anosov Diffeomorphisms are topologically stable, Topology 9, 71 ~ 78 (1970)