

Fourier-Walsh級数 の概収束について

秋田大 館岡淳

§ 1. 序

L. Carleson [2] は L^2 関数の Fourier 級数 (F. S.) の概収束を示した。R. A. Hunt [3] は Carleson の方法と作用素の補間定理を用いて L^p 関数 ($1 < p$) の F. S. の概収束に拡張した。一オ Billard [1] は Carleson の方法を L^2 関数の Fourier-Walsh 級数 (F. W. S.) に応用した。ここでは Carleson-Hunt-Billard の方法で F. W. S. に対する Hunt の定理と類似の結果を述べる。

$f \in L^1(0,1)$ の F. W. S. の第 n 部分和を $S_n(x)$ で表わす。

$Mf(x) = \sup \{ |S_n(x)| : |n| \geq 0 \}, x \in (0,1)$ とするとき

定理 1. $\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p, 1 < p < \infty.$

定理 2. $\|Mf\|_1 \leq C \int_0^1 |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^2 dx + C.$

定理 3. $m \{x \in (0,1) : Mf(x) > y\} \leq C \exp \{-Cy / \|f\|_\infty\}, y > 0.$

§ 2. 記号

$(r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$ と $(w_0, w_1, \dots, w_n, \dots)$ はそれぞれ $(0, 1)$ に對する Rademacher 系, Walsh 系とする。整数 $n \geq 1$ に對し N_n を $2^{N_n} \leq n < 2^{N_n+1}$ と定義し $n = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} + 2^{N_n}$ ($N_n > n_1 > \dots > n_k \geq 0$) とおく。

Dirichlet-Walsh 核を $W_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} W_n(t) &= \prod_{j=1}^{N_n} (1 + r_j(t)) + r_{N_n+1} \prod_{j=1}^{n_1} (1 + r_j(t)) + \dots + r_{N_n+1} r_{n_1+1} \dots r_{n_k+1} \prod_{j=1}^{n_k} (1 + r_j(t)) \\ &= W_{N_n}(t) [\delta_{N_n}^*(t) + \delta_{n_1}^*(t) + \dots + \delta_{n_k}^*(t)], \end{aligned}$$

$$\text{但し } \delta_j^*(t) = 2^j (0 < t < 2^{-j-1}), -2^j (2^{-j-1} < t < 2^{-j}), 0 \text{ (その他)}.$$

$$\text{よって } \delta_n(t) = \delta_{N_n}^*(t) + \delta_{n_1}^*(t) + \dots + \delta_{n_k}^*(t) \text{ とおく。}$$

$f(x) \in L^1(0, 1)$ に對し $F.W.S.$ を

$$S(f) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n W_n(t), \quad (C_n = \int_0^1 f(t) W_n(t) dt)$$

と書けば $\Delta_k(f; t) = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} C_n W_n(t)$, ($k \geq 0$), $\Delta_{-1}(f; t) = C_0$ とおく

$$S(f) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \Delta_k(f; t).$$

$\omega_{j, \nu}$ ($\nu \geq 0$; $j = -2 \cdot 2^\nu, \dots, 2 \cdot 2^\nu - 1$) は $(-2, 2)$ を等分して得られる長さ $2^{-\nu}$ で左側から右側に番号をつけた区間で、特に $(-2, 2) = \omega_{0, -2}$,

$$(-2, 0) = \omega_{-1, -1}, (0, 2) = \omega_{0, -1} \text{ とおく。}$$

整数 n と区間 ω_ν に對し $n[\omega_\nu] = [n/2^\nu]$ (Gauss 記号) とし特に $n[\omega_2] = n[\omega_{-1}] = n$ とおく。

通常の区間 $(0, 1)$ を修正して点 $t = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ ($\xi_i = 0, 1$) の集合 $(0, 1)^*$ を考え、totally disconnected compact abelian 群とする。 ω_ν は点 $t = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_\nu^0, \xi_{\nu+1}, \dots)$ ($\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_\nu^0$ は固定され $\xi_{\nu+1}, \dots$

は独立に変わる)の集合とする。

$$\varphi_{\omega_0}[(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_{u_0}^0, \xi_{u_0+1}^0, \dots)] = (\xi_{u_0+1}, \xi_{u_0+2}, \dots)$$

で定義される関数 φ_{ω_0} で ω_0 の構造を $(0, 1)^*$ のそれに移す。 ω_0 上の Walsh 関数を $W_n(\omega_0; t) = W_n(\varphi_{\omega_0}(t))$ ($u \geq 0$) と定義し

$S_n^*(\omega_0; t), \delta_n(\omega_0; t)$ も同様にする。そうすれば

$$W_n(t) = \theta W_n[\omega_0](\omega_0; t), \quad \theta = \pm 1.$$

$(0, 1)^*$ 上の F. W. S. の第 n 部分

$$S_n((0, 1)^*; x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i W_i(x) = \int_0^1 f(t) W_n(x-t) \delta_n(x-t) dt$$

の修正第 n 部分

$$S_n^*((0, 1)^*; x) = \int_0^1 f(t) W_n(t) \delta_n(x-t) dt$$

を考えると $|S_n((0, 1)^*; x)| = |S_n^*((0, 1)^*; x)|$.

実数 l と区間 ω に対して

$$C_l(\omega) = C_l(\omega; f) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} f(t) W_l(\omega; t) dt$$

$$C_n(\omega) = C_n(\omega; f) = \frac{1}{l} \sum_{l=-n}^{\infty} |C_{l+n}(\omega)| / (1+l^2)$$

とおく。また $(n[\omega], \omega)$ に対して

$$C_{n[\omega]}^*(\omega) = \max_{\omega' \subset \omega, 4|\omega'| \leq |\omega|} C_{n[\omega']}(\omega)$$

とおく。

§ 3. 準備の結果

Hunt の定理を変形することによってこれらの結果は次の命題に帰着できる。すなわち

可測集合 $F \subset (0,1)^*$ の特性関数を χ_F とするとき

$$m\{x : M\chi_F(x) > y\} \leq B_p^p y^{-p} mF, \quad 1 < p < \infty.$$

この命題はさらに次の命題に帰着できる。すなわち

集合 F , 関数 $f(x) = \chi_F(x)$, $x \in (0,1)^*$, $1 < p < \infty$, $y > 0$ を固定する。任意に固定された $N > 0$ に対し $2^{-N} < \Lambda < 2^{N-2}$ ($\Lambda < 1$ は絶対定数) のとき

$$|S_n^*(x; \chi_F)| \leq \text{Const. } L y, \quad x \notin E, \quad mE \leq \text{Const. } y^p mF, \quad L \leq \text{Const. } p^2(p-1)^{-1}.$$

補題1. (C. Watari [4]) $f(x) \in L^p(0,1)$ に対し $S(f) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k(f; t)$

とする。そうすれば級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \Delta_k(f; t)$ ($\eta_k = 0, 1$)

はある $g(x) \in L^p(0,1)$ の F.W.S. である

$$\|g(x)\|_p \leq D_p \|f(x)\|_p, \quad D_p \leq \text{Const. } p^2(p-1)^{-1}, \quad 1 < p < \infty.$$

補題2. $f(x) \in L^1(0,1)$ に対し $Tf(x) = \sup \left| \sum_{k=1}^n \Delta_k(f; x) \right|$ とおくと

$$\|Tf(x)\|_p \leq E_p \|f(x)\|_p, \quad E_p \leq \text{Const. } p(p-1)^{-1}, \quad 1 < p < \infty.$$

区間 ω を固定し $\Omega((n[\omega], \omega)) = \{\omega_k\}$, $\omega_k = \omega_{\nu_k}$ を ω の互に素な分割

とする。 $x \in \omega_k = \omega_k(x) \subset \omega' \subset \omega$, $|\omega| = 2^{-\nu}$, $|\omega'| = 2^{-\nu'}$ とすると

$$\begin{aligned} S_{n[\omega]}^*(\omega; x) &= \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} f(t) \omega_{n[\omega]}(\omega; t) \delta_{n[\omega]}(\omega; x-t) dt \\ &= \theta S_{n[\omega]}^*(\omega'; x) + H_{n[\omega]}(x) + R_{n[\omega]}(x), \end{aligned}$$

但し $\theta = \pm 1$,

$$H_{n[\omega]}(x) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} [f(t) W_{n[\omega]}(\omega; t) - E_{n[\omega]}] \delta_{n[\omega]-2^{v'-v_{n[\omega]}}(\omega; x-t)} dt,$$

$$R_{n[\omega]}(x) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} E_{n[\omega]} \delta_{n[\omega]-2^{v'-v_{n[\omega]}}(\omega; x-t)} dt,$$

$$E_{n[\omega]}(t) = \frac{1}{|\omega_k(t)|} \int_{\omega_k(t)} f(\omega) W_{n[\omega]}(\omega; u) du.$$

$\therefore Z'' n[\omega] = \sum_{i=1}^{N_{n[\omega]}} \zeta_i 2^i \quad (\zeta_i = 0, 1; \sum_{i=1}^{N_{n[\omega]}} \zeta_i = 1)$ とすれば $R_{n[\omega]}(x)$ は

$$G(t) = \sum_{k=0}^{N_{n[\omega]}} \zeta_k \Delta_k(\omega; E_{n[\omega]}(t))$$

の点 x における部分和である。したがって、補題 1, 2 から

$$\|R_{n[\omega]}(x)\|_p \leq \|T(G)\|_p \leq \text{Const } p^3(p-1)^{-2} \|E_{n[\omega]}(x)\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

故に [5. II. p. 119] により

$$m\{x \in \omega; T(G) > \varphi\} \leq \text{Const. exp}(-\text{Const. } \varphi / \|E_{n[\omega]}(x)\|_{\infty}) |\omega|, \quad \varphi > 0.$$

§ 4. 多項式 $P_k(x; \omega)$

$b_k = 2^{-k} (k=0, 1, 2, \dots)$ とする。 $\omega = \omega_v$ を与えるとき

$\omega_v \subset \omega_{v+1} \subset \dots \subset \omega_0 = (0, 1)^*$ とする。はじめに ω_0 上の f の F.W.S.

$f \sim \sum_n a_n(\omega_0) \omega_n(x)$ を考える。 $|a_n(\omega_0)| \geq b_k \varphi^{\frac{p}{2}}$ のとき $(n, \omega_0) \in G_k(\omega_0)$

と書き $P_k(x; \omega_0) = \sum_{(n, \omega_0) \in G_k(\omega_0)} a_n(\omega_0) \omega_n(x)$ と定義する。 $\omega_1 \subset \omega_0$ に対し

2 は $f|_{\omega_1} - P_k(x; \omega_0) \sim \sum a_n(\omega_1) \omega_n(x)$ 。 $|a_n(\omega_1)| \geq b_k \varphi^{\frac{p}{2}}$ のとき $(n, \omega_1) \in G_k(\omega_1)$

と書き $P_k(x; \omega_1) = P_k(x; \omega_0) + \sum_{(n, \omega_1) \in G_k(\omega_1)} a_n(\omega_1) \omega_n(x)$ と定義する。

このようにして得られた $P_k(x; \omega)$ は $G_k = \bigcup_{\omega} G_k(\omega)$ とおけば

$P_k(x; \omega) = \sum_{(n, \omega) \in G_k, \omega' \supset \omega} a_n(\omega') \omega_{|\omega'|^{-1}}(x)$ と書ける。そうすれば

$$\sum_{|\omega|=2^{-v}} \int_{\omega} |f(x) - P_k(x; \omega)|^2 dx = \int_0^1 |f(\omega)|^2 dx - \sum_{(n, \omega) \in G_k, |\omega| \geq 2^{-v}} |a_n(\omega)|^2 |\omega|.$$

$$X_K = \{x \in (0,1)^{\mathbb{N}}; \sum_{(n,w) \in G_K, x \in w} |a_n(w)|^2 > b_K^{-1} y^p\}$$

$$X_k^* = \bigcup_{\omega} \{ \omega \subset X_k \text{ を含む } 4 \text{ 倍に拡大した区間} \}$$

$$2 \leq 3 \leq 4 \quad m X_K^* \leq 4 m X_K \leq 4 b_K y^{-p} m F.$$

$$\omega \notin X_k \text{ ならば } P_k(x; \omega) \text{ の項数 } \leq b_k^{-3}. \quad \text{ゆえに } |P_k(x; \omega)| \leq b_k^{-2} y^{\frac{p}{2}}.$$

§ 5. 対の選択

$\omega \notin X_K$ とする。 $P_K(x; \omega)$ が $a\omega_\lambda(x)$ を項にもつとき $\omega' \succ \omega$ に対し
 $(\lambda E \omega', \omega) \in G_K$ とできる。 各 $(\lambda E \omega', \omega)$ に対し

$$\widetilde{G}_K = \widetilde{G}_a \cup \widetilde{G}_b \text{ とおく。} \quad \therefore \quad z''$$

$$\tilde{G}_a = \{(n, \omega) : \omega \subset \omega', |\omega| \geq b_k^{-10} |\omega'|, |n - \lambda[\omega]| < b_k^{-10}\}$$

$$\widetilde{G}_b = \{ (n, \omega) ; \omega \subset \omega', |n - \lambda[\omega]| < b_K^{-10}, \exists \alpha' \omega_{X'}(x) \in P_K(x; \omega), \\ 4b_K^{10} \leq |\lambda - X| |\omega| \leq 4b_K^{-10} \}$$

$$(n, \omega_v) \in \widetilde{G}_K \quad (= \mathbb{Z} \uparrow \cup \mathbb{Z})$$

$$G_{T_k}^* = \begin{cases} (4n+m, \omega_{v-2}) & : v \geq 2, \omega_{v-2} \triangleright \omega_v, m=0,1,2,3, \\ (2n+m, \omega_{-1}) & : v=1, \omega_{-1} \triangleright \omega_1, m=0,1, \\ (n, \omega_{-2}) & : v=0 \end{cases}$$

とあれば $\sum_{g_k} |w| \leq \text{Const. } b_k^{-10} y^{-p} m F.$

$(n, \omega) \notin \widetilde{G}_k$, $\omega \notin X_k$ に対し $P_k(x; \omega)$ は次のように書ける。

$$P_k(x; \omega) = \rho_1 \omega_{\lambda_1}(x) + \rho_2 \omega_{\lambda_2}(x) + Q_k(x; \omega),$$

且 $\quad |g_2| \leq |g_1| \leq b_k^{-2} y^{\frac{p}{2}}, \quad |\lambda_1[\omega] - n|, |\lambda_2[\omega] - n| < b_k^{-1}, \quad |\lambda_1[\omega] - \lambda_2[\omega]| = 1$

$Q_k(x; \omega)$ は $|n - \lambda[\omega]| \geq b_k^{-10}$ なる λ の項のみを含む。

§ 6. 分割 $\Omega(n[\omega], \omega; k)$ と除外集合

$$S = \bigcup \{ \omega : \int |f|_a^p dx > y^p |\omega| \}$$

$$S^* = \bigcup \{ \omega \subset S \text{ を含む } 4 \text{ 倍に拡大した区間} \}$$

とすると $mS^* \leq 4mS \leq 4y^{-p}mF$.

$\omega \notin S$ のとき $|C_\alpha(\omega)| < y$. ゆえに $\omega \notin S^*$ のとき $L=L(p) \leq \text{Comat } p^2(p-1)^{-1}$

が存在して $b_k y \leq C_n^*(\omega)$ のとき $y^{\frac{p}{2}} \leq b_{KL}^{-\frac{1}{2}} y$.

与えられた対 $(n[\omega], \omega)$, $\omega = \omega_{\nu_0}$, $-2 \leq \nu_0 \leq N-2$ と $k \geq 1$ に対して

$$\Omega(k) : (n[\omega], \omega) = p' \in G_{KL}^*, C_{n[\omega]}^*(\omega) < b_{k-1} y$$

を満たすとき ω の分割 $\Omega(n[\omega], \omega; k) = \Omega(p'; k)$ を定義し次の条件を満たしているとする。

1° $\omega_\nu \in \Omega(p'; k) \Rightarrow \nu \geq \nu_0 + 2$. $\omega_\nu \subset \omega'$, $4|\omega'| \leq |\omega| \Rightarrow C_{n[\omega']}^*(\omega') < b_{k-1} y$.

2° $\omega_\nu \in \Omega(p'; k)$, $|\omega_\nu| > 2^{-N} \Rightarrow \exists \omega_{\nu+1} \subset \omega_\nu : C_{n[\omega_{\nu+1}]}^*(\omega_{\nu+1}) \geq b_{k-1} y$.

3° $\omega_\nu \in \Omega(p'; k) \Rightarrow \nu \geq N$.

$x \in \omega$ のとき $\omega_{j, \nu} \in \Omega(p'; k)$ に対して $\omega_{\nu-1} = \omega_{j, \nu} \cup \omega_{j+1, \nu}$, $x \in \omega_{\nu-1}$ 2° $|\omega_{\nu-1}|$ が最大な区間を $\omega(x)$ とする。そうすれば § 3 の $S_{n[\omega]}^*(\omega; \omega)$ の分解で $\delta_{n[\omega]-2^{\nu-\nu_0}n[\omega]}(\omega; x-t)$ は t に関し $\omega_2(t)$ 2° 定数になることから $H_{n[\omega]}(x) = 0$. また上の条件から $|E_n(t)| \leq \text{Comat. } b_{k-1} y$ を得るから § 3 の結果より

$$\sigma(p) = \{ x \in \omega : TG(x) > \text{Comat. } CLK b_{k-1} y \}, C \text{ は固定した定数}$$

$$\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\Omega(k)} \sigma(p)$$

$$X^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_{KL}^*$$

とおけば

$$m \cup (p) \leq \text{Const.} \exp(-CLK) |\omega|, \quad m \cup \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_{kL} y^{-p} m F,$$

$$m X^* \leq \text{Const.} \sum_{k=1}^{\infty} b_{kL} y^{-p} m F.$$

$$\text{ゆえに } E = X^* \cup S^* \cup \cup \quad \text{とおけば} \quad m E \leq \text{Const.} y^{-p} m F.$$

§ 7. 対の交換

n_0, ω_0, K, x は $x \notin E, x \in \omega_0, |\omega_0| > 2^{-N+2}, p_0 = (n_0[\omega_0], \omega_0) \notin G_{KL}^*$
 $b_k y \leq C^*(p_0) = C_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0) < b_{k-1} y$ とする。

補題 3. n_0, ω_0, K, x は上の条件を満たすとする。そうすれば
 $\tilde{n} \geq 0, \tilde{\omega} \supset \omega_0$ が存在して $\tilde{p} = (\tilde{n}[\tilde{\omega}], \tilde{\omega}) \in G_{KL}^*, |\tilde{n}[\tilde{\omega}] - n_0[\omega_0]| \leq A b_k^{-1}$.

さらに $|\tilde{n}[\omega_0] - \tilde{n}[\tilde{\omega}_0]| \leq 2A b_k^{-2}$ なる n' に對して

$$|S_{\tilde{n}[\omega_0]}^*(\omega_0; x) - S_{\tilde{n}[\tilde{\omega}_0]}^*(\omega_0; x)| \leq \text{Const.} [C^*(\tilde{p}_0) + C^*(\tilde{p}'_0) + b_{k-1} y]$$

$$\text{但し } \tilde{p}_0 = (\tilde{n}[\omega_0], \omega_0), \tilde{p}'_0 = (\tilde{n}[\tilde{\omega}_0], \omega_0).$$

補題 4. n_0, ω_0, K, x は上の条件を満たすとする。そうすれば
 $\bar{n} \geq 0, \bar{\omega} \supset \omega_0$ と最小の整数 m が存在して

$$|\bar{n}[\omega_0] - n_0[\omega_0]| < 2A b_k^{-1}, \bar{p} = (\bar{n}[\bar{\omega}], \bar{\omega}) \in G_{mL}^*, 1 \leq m \leq k.$$

また $\tilde{p}_0 = (\tilde{n}[\omega_0], \omega_0)$ ならば $C^*(\tilde{p}_0) < b_{m+1} y$. さらに $C^*(\bar{p}) < b_{m+1} y$.

ゆえに $\Omega(\bar{p}; m)$ が定義でき $\bar{\omega}(x) \subset \omega_0$.

§ 8. 証明

$x \notin E$, $0 < n < \Lambda 2^{N-2}$ ($0 < \Lambda < 1$) に対し 2 次の性質をもつ ω_j, k_j, m_j, n_j の有限列を作ることをさすれば $S_n^*(x) = O(L\gamma)$ である。

$$x \in \omega_j, \omega_{j+1} \subset \omega_j, k_{j+1} < m_j \leq k_j, n_{j+1} \leq (1 + 4b_j)n_j, \theta = \pm 1,$$

$$S_{n_j[\omega_j]}^*(\omega_j; x) = \theta S_{n_{j+1}[\omega_{j+1}]}^*(\omega_{j+1}; x) + O(Lm_j b_{m_j-1} \gamma).$$

今, K を $b_k \gamma \leq C_n^*(\omega_{0-2}) < b_{k-1} \gamma$ で定義すると $(n, \omega_{0-2}) \in G_{KL}^*$.

ゆえに分割 $\Omega(n[\omega_{0-2}], \omega_{0-2}; K)$ が定義され

$$\begin{aligned} S_n^*(x) &= \theta S_{n[\omega_{0-2}]}^*(\omega_{0-2}(x); x) + H_n(x) + R_n(x) \\ &= \theta S_{n[\omega_{0-2}]}^*(\omega_{0-2}(x); x) + O(LK b_{k-1} \gamma) \\ &= \theta S_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0; x) + O(LK_1 b_{k_1-1} \gamma) \quad \text{とおく。} \end{aligned}$$

$n_0[\omega_0] \neq 0$ のとき K_0 を $b_{K_0} \gamma \leq C_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0) < b_{K_0-1} \gamma$ で定義すれば $K_0 < K_1$.

場合 1. $P_0 = (n_0[\omega_0], \omega_0) \in G_{K_0 L}^*$ とすれば $\Omega(P_0; K)$ が定義され

$$S_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0; x) = \theta S_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0(x); x) + O(LK_0 b_{K_0-1} \gamma).$$

場合 2. $P_0 \notin G_{K_0 L}^*$, $n_0[\omega_0] > \Lambda b_{K_0}^{-2}$ とすれば補題 3 2° $\bar{n}, \bar{\omega}$ を

補題 4 2° $\bar{n}, \bar{\omega}, m$ を選ぶと $\Omega(\bar{P}; m)$, $\bar{P} = (\bar{n}[\bar{\omega}], \bar{\omega})$ が定義され

$$S_{\bar{n}[\bar{\omega}]}^*(\bar{\omega}; x) = \theta S_{\bar{n}[\bar{\omega}]}^*(\bar{\omega}(x); x) + O(Lm b_{m-1} \gamma),$$

$$S_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0; x) = \theta S_{\bar{n}[\bar{\omega}]}^*(\omega_0; x) + O(Lm b_{m-1} \gamma),$$

$$|S_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0; x) - S_{\bar{n}[\bar{\omega}]}^*(\omega_0; x)|$$

$$\leq \text{Const.} [C^*(P_0) + C^*(\bar{P}_0) + C^*((\bar{n}[\omega_0], \omega_0) + b_{K_0-1} \gamma)] = O(Lm b_{m-1} \gamma),$$

ゆえに $S_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0; x) = \theta S_{\bar{n}[\bar{\omega}]}^*(\bar{\omega}(x); x) + O(Lm b_{m-1} \gamma).$

また $n_0[\omega_0] > Ab_{k_0}^{-2}$, $|\bar{n}[\omega_0] - n_0[\omega_0]| < 4Ab_{k_0}^{-1}$ から $\bar{n} \leq (1+4b_{k_0})n_0$.

場合 3. $p_0 \notin G_{k_0, L}^*$, $n_0[\omega_0] \leq Ab_{k_0}^{-2}$ とすれば補題 3 2° $\bar{n}, \bar{\omega}$ を補題

4 2° m を選ぶと

$$|S_{\bar{n}[\omega_0]}^*(\omega_0; x) - S_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0; x)| \leq \text{Const.} [C^*(\bar{p}_0) + C^*(p_0) + b_{k_0} \gamma]$$

ゆえに $S_{n_0[\omega_0]}^*(\omega_0; x) = O(L^m b_{m-1} \gamma)$.

以上がすべて 2 の場合で分割を場合 3 または場合 1, 2 を $n_k[\omega_k]$ $= 0$ になるまで続けければよい。

文献

- [1] P. Billard, Sur la convergence presque partout des séries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$, Studia Math. 28 (1967).
- [2] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. 116 (1966).
- [3] R. A. Hunt, On the convergence of Fourier series.
- [4] C. Watari, Mean convergence of Fourier series, Tôhoku Math. J. 16 (1964).
- [5] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge. 1959.