

有限コクセター群の部分バーンサイド環の符号単元

近畿大学大学院・総合理工学研究科 森田一輝 (Kazuki Morita)

Graduate School of Science and Engineering, Kindai University

1 Notation

G は, 有限群とする. (H) は, G の部分群 H を含む G -共役類とする. $[X]$ は, G -集合 X を含む G -集合としての同型類とする. $\mathcal{D}$ は, G の部分群の collection を表す. つまり, $\mathcal{D}$ は, G -共役の作用で閉じている G の部分群族である. $C(\mathcal{D})$ は, $\mathcal{D}$ の G -共役類全体の集合とする. R を単位元を持つ可換環としたとき, $R^\times$ を R の単元群とする.

2 Introduction

有限群の collection の部分バーンサイド環 ([Yo90]) の単元群の研究は, [IO15] で始められた. 対称群とそのヤング部分群の collection から得られる部分バーンサイド環は, 1 でない単元 α を持つ ([IO15]). 単元 α は対称群の交代指標を与える.

本稿では, $I_2(m)$ 型のコクセター群とそのパラボリック部分群の collection から得られる部分バーンサイド環の単元を決定した.

$\Omega(G, \mathcal{D})$ を元 $[G/H]$, ただし, $H \in \mathcal{D}$, で生成された通常のバーンサイド環 $\Omega(G)$ の部分加群とする. このとき, $\Omega(G, \mathcal{D})$ は基底 $\{[G/H] \mid (H) \in C(\mathcal{D})\}$ を持つ自由 $\mathbb{Z}$ -加群である. G のバーンサイド環 $\Omega(G)$ は, G/H の同型類 $[G/H] \mid ((H) \in C(G))$ の $\mathbb{Z}$ -線形結合全体からなる可換環である. ただし, 基底の元の間の積は

$$[G/H] \cdot [G/K] = \sum_{HgK \in [H \setminus G/K]} [G/gHg^{-1} \cap K]$$

で与えられる.

3 Burnside ring

H を G の部分群とする. 写像 φ を

$$\varphi: \Omega(G) \rightarrow \tilde{\Omega}(G) := \prod_{(S) \in C(G)} \mathbb{Z}: [G/H] \mapsto (\varphi_S([G/H]))_{(S)}$$

と定義する. ここで $\varphi_S([G/H])$ は G -集合 G/H の S -固定点の個数である. 写像 φ は単射準同型である. また写像 φ を G のバーンサイド準同型という.

4 Coxeter group

W を有限群, S を有限集合とする. コクセター系 (W, S) をもつコクセター群とは

$$W \cong \langle S \mid (\alpha\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1, \alpha, \beta \in S \rangle$$

となるような W である。ただし $m(\alpha, \beta)$ は整数であり、 $\alpha \neq \beta$ のとき $m(\alpha, \beta) \geq 2$, $\alpha = \beta$ のとき $m(\alpha, \beta) = 1$ とする。

コクセター系 (W, S) を持つコクセター群を $W = \langle S \rangle$ とする。集合 S の任意の部分集合を $J \subseteq S$ とする。このとき

$$W_J = \langle J \rangle$$

と W -共役である W の部分群を W のパラボリック部分群という。

5 Units of PBR of coxeter group of type $I_2(m)$

$I_2(m)$ 型 ($m \geq 3$) のコクセター群を W とする。このとき W は位数 $2m$ の二面体群と同型である。位数 $2m$ の二面体群を D_{2m} とすると

$$D_{2m} = \langle a, b | a^m = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

である。 $S = \{s_0, s_1\}$, ただし $s_0 = b$, $s_1 = ab$ とする。このとき (W, S) は $I_2(m)$ 型コクセター群のコクセター系となる。 W の全てのパラボリック部分群の集合を $\mathcal{P}_m$ とすると

$$C(\mathcal{P}_m) = \begin{cases} \{(1), (P_0), (W)\} & (m: \text{odd}), \\ \{(1), (P_0), (P_1), (W)\} & (m: \text{even}) \end{cases}$$

となる。ここで $P_0 = \langle s_0 \rangle$, $P_1 = \langle s_1 \rangle$ とする。

このとき $\mathcal{P}_m$ に関する W の $\Omega(W, \mathcal{P}_m)$ は $\mathbb{Z}$ 上の基底

$$\begin{cases} \{[W/1], [W/P_0], [W/W]\} & (m: \text{odd}), \\ \{[W/1], [W/P_0], [W/P_1], [W/W]\} & (m: \text{even}) \end{cases}$$

をもつ。 W の $\mathcal{P}_m$ に関するマーク行列は次のようになる。

	1	P_0	W
$W/1$	$2m$		
W/P_0	m	1	
W/W	1	1	1

表 1: $m : \text{odd}$

	1	P_0	P_1	W
$W/1$	$2m$			
W/P_0	m	2		
W/P_1	m		2	
W/W	1	1	1	1

表 2: $m : \text{even}$

Proposition 5.1. [Yo90] 有理数体上の部分バーンサイド環 $\mathbb{Q}\Omega(G, \mathcal{D})$ の G の部分群 H に対応する原始べき等元を e_H , $\mu_{\mathcal{D}}$ をポセット $(\mathcal{D}, \leq)$ のメビウス関数とする。このとき

$$e_H = \sum_{(D) \in \mathcal{C}(\mathcal{D})} \frac{|D|}{|N_G(D)|} \sum_{H \in \mathcal{D}} (\mu_{\mathcal{D}}(D, H) \varphi_H(e_H)) [G/D]$$

が成り立つ。ただし $N_G(D)$ は G における部分群 D の正規化群とする。

Lemma 5.2. $I_2(m)$ 型コクセター群を W とする. このとき次が成り立つ.

1. m が奇数のとき, $\mathbb{Q}\Omega(W, \mathcal{P}_m)$ の原始べき等元は,

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2m}[W/1], \\ e_{P_0} &= -\frac{1}{2}[W/1] + [W/P_0], \\ e_W &= \frac{m-1}{2m}[W/1] - [W/P_0] + [W/W]. \end{aligned}$$

2. m が偶数のとき, $\mathbb{Q}\Omega(W, \mathcal{P}_m)$ の原始べき等元は,

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2m}[W/1], \\ e_{P_0} &= -\frac{1}{4}[W/1] + \frac{1}{2}[W/P_0], \\ e_{P_1} &= -\frac{1}{4}[W/1] + \frac{1}{2}[W/P_1], \\ e_W &= \frac{m-1}{2m}[W/1] - \frac{1}{2}[W/P_0] - \frac{1}{2}[W/P_1] + [W/W]. \end{aligned}$$

Proof. Proposition 5.1 より成り立つ. $\square$

Proposition 5.3. 部分群族 $\mathcal{D}$ に関する G の部分バーンサイド環を $\Omega(G, \mathcal{D})$, $I_2(G, \mathcal{D}) := \{e \in \mathbb{Q}\Omega(G, \mathcal{D}) | e^2 = e \in \Omega(G, \mathcal{D})\}$ とする. このとき $\Omega(G, \mathcal{D})^\times$ と $I_2(G, \mathcal{D})$ には 1 対 1 の対応がある.

Proof. 集合 $I_2(G, \mathcal{D})$ の元を e とすると $1 - 2e \in \Omega(G, \mathcal{D})^\times$ となる. 逆に $u \in \Omega(G, \mathcal{D})^\times$ に対し $\frac{1-u}{2} \in I_2(G, \mathcal{D})$ となる. これらの対応は互いに逆写像である. $\square$

Theorem 5.4. $I_2(m)$ 型コクセター群を W , W の全てのパラボリック部分群の集合を $\mathcal{P}_m$ とする.

1. m が奇数のとき,

$$\Omega(W, \mathcal{P}_m)^\times = \{\pm[W/W], \pm([W/1] - 2[W/P_0] + [W/W])\}.$$

2. m が偶数のとき,

$$\Omega(W, \mathcal{P}_m)^\times = \{\pm[W/W], \pm([W/1] - [W/P_0] - [W/P_1] + [W/W])\}.$$

Proof. Proposition 5.3 より成り立つ. $\square$

以後

$$\varepsilon = \begin{cases} [W/1] - 2[W/P_0] + [W/W] & (m: \text{ odd}), \\ [W/1] - [W/P_0] - [W/P_1] + [W/W] & (m: \text{ even}) \end{cases}$$

とする.

6 tom-Dieck 準同型と exponential map

有限群 G の実表現環を $R_{\mathbb{R}}(G)$ として, $\varphi(x) = (x_H)_{(H) \in C(G)}$ となる $\Omega(G)$ の元 x に対して, $x = \varphi^{-1}((x_H)_{(H) \in C(G)})$ と書く. このとき群準同型写像

$$u_G : R_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^\times : V \mapsto \varphi^{-1}((-1)^{\dim V^H})_{H \in C(G)} \quad (1)$$

が存在する [Di79]. ただし, V は $\mathbb{R}G$ -加群, V^H は V の H -不変空間である. また $\dim V^H$ は G の $\mathbb{C}$ -指標 χ の H 上への制限 $\chi|_H$ と H の単位指標 1_H の内積に等しい.

有限群 G の実数値をとる $\mathbb{C}$ -指標全体のなす環を $\overline{R}_{\mathbb{R}}(G)$ とする. このとき写像 u_G は群準同型

$$\overline{u}_G : \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^{\times} : \chi \mapsto \varphi^{-1}((-1)^{\dim V^H})_{H \in C(G)}$$

へ拡張できる. これを G の tom-Dieck 準同型という. また写像

$$\overline{\ell}_G : \Omega(G) \rightarrow \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) : [G/H] \mapsto \chi_{\mathbb{C}[G/H]}$$

を linearization map という [Ba10]. ただし $\chi_{\mathbb{C}[G/H]}$ は $\mathbb{C}G$ -加群 $\mathbb{C}[G/H]$ の指標とする. tom-Dieck 準同型と linearization map の合成

$$\exp_G := \overline{u}_G \circ \overline{\ell}_G : \Omega(G) \rightarrow \overline{R}_{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \Omega(G)^{\times}$$

として得られる写像を exponential map という.

Lemma 6.1. $I_2(m)$ 型コクセター群を W とする. このとき

$$\langle \chi|_H, I_H \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } (H) = (P_i), \\ 2 \text{ or } 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

となるような W の $\mathbb{C}$ -既約指標 χ が存在する.

Lemma 6.2. W の既約指標を χ とする. このとき

$$\varphi_H(\overline{u}_W(\chi)) = \begin{cases} -1 & \text{if } (H) = (P_i), \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

となる.

Theorem 6.3. (2) の W の既約指標 χ に対して

$$\varepsilon = \overline{u}_W(\chi)$$

が成り立つ.

Proof. $H \leq W$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_H([W/1]) &= \begin{cases} 2m & \text{if } (H) = (1), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \varphi_H([W/P_i]) &= \begin{cases} m & \text{if } (H) = (1), \\ -2 & \text{if } m \text{ odd, } (H) = (P_0), \\ -1 & \text{if } m \text{ even, } (H) = (P_i), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

$\varphi_H([W/W]) = 1$ となる. (2) から

$$\varphi_H(\varepsilon) = \begin{cases} -1 & \text{if } (H) = (P_i), \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

を得るので, (3), (4) と φ の単射性より定理の主張が示される. $\square$

Lemma 6.4. $I_2(m)$ 型コクセター群を W をとする. このとき $\Omega(W, \mathcal{P}_m)^\times$ は tom-Dieck 準同型 $\bar{u}_W$ の像に含まれる.

Proof. Theorem 6.3 より $\bar{u}_W(1) = -1, \bar{u}_W(\chi) = \varepsilon$ である. また $\Omega(W, \mathcal{P}_m)^\times = \langle -1, \varepsilon \rangle$ より成り立つ. $\square$

Remark 6.5. $I_2(m)$ 型コクセター群を W , W の部分群を K とする. (1) において $V = \mathbb{C}[W/K]$ とすると

$$\exp_W : \Omega(W) \rightarrow \Omega(W)^\times : [W/H] \mapsto \varphi^{-1}(((-1)^{|H \setminus W/K|}))_{H \in C(W)}$$

となるような写像を得る.

Theorem 6.6. $I_2(p)$ 型コクセター群を W , p を素数とする. このとき

$$\Omega(W, \mathcal{P}_p)^\times \subset \text{Im exp}_W \Leftrightarrow p \text{ が非ピタゴラス素数}$$

が成り立つ.

Proof. ($\Leftarrow$) 非ピタゴラス素数を p とする. このとき

$$C(W) = \{(e), (P_0), (C_p), (W)\}$$

である. ただし C_p は W の p -次巡回部分群とする. また

$$(|1 \setminus W/P_0|, |P_0 \setminus W/P_0|, |C_p \setminus W/P_0|, |W \setminus W/P_0|) = (p, 2(n+1), 1, 1)$$

であり,

$$\varphi(\bar{u}_W \circ \bar{\ell}_W([W/P_0])) = (-1, 1, -1, -1)$$

が得られる. よって

$$\exp_W([W/P_0]) = \bar{u}_W \circ \bar{\ell}_W([W/P_0]) = -\varepsilon$$

となる. $\exp_W([W/W]) = -1$ なので $\Omega(W, \mathcal{P})^\times \subset \text{Im exp}_W$ が成り立つ.

($\Rightarrow$) ピタゴラス素数を p とする. このとき

$$(|1 \setminus W/P_0|, |P_0 \setminus W/P_0|, |C_p \setminus W/P_0|, |W \setminus W/P_0|) = (p, 2n+1, 1, 1)$$

であり,

$$\varphi(\bar{u}_W \circ \bar{\ell}_W([W/P_0])) = (-1, -1, -1, -1)$$

が得られる. また

$$(|1 \setminus W/1|, |P_0 \setminus W/1|, |C_p \setminus W/1|, |W \setminus W/1|) = (2p, p, 2, 1)$$

$$(|1 \setminus W/C_p|, |P_0 \setminus W/C_p|, |C_p \setminus W/C_p|, |W \setminus W/C_p|) = (2, 1, 2, 1)$$

なので

$$\varphi(\exp_W([W/1])) = \varphi(\exp_W([W/C_p])) = (1, -1, 1, -1)$$

となる. よって

$$\exp_W(\tilde{\Omega}(W)) = \langle (-1, -1, -1, -1), (1, -1, 1, -1) \rangle$$

が得られるので矛盾. $\square$

参考文献

- [JL93] Gordon James.:Martin Liebeck.:*Representations and Characters of Groups*, (1993).
- [Di79] tom Dieck, T.: *Transformation Groups and Representation Theory*, Lecture Notes in Mathematics, **766**, Springer, Berlin, 1979.
- [GP00] Geck, M.; Pfeiffer, G.: *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **21**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [IO15] Idei, H.; Oda, F.: *The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group*, J. Algebra **429** (2015), 318–323.
- [Ma82] Matsuda, T.: *On the unit group of Burnside rings*, Japan. J. Math. **8** (1) (1982), 71–93.
- [Ya05] Yağın, E.: *An induction theorem for the unit groups of Burnside rings of 2-groups* J. Algebra **289** (2005), no. 1, 105–127.
- [Ba10] L. Barker.: Tornehave morphisms I: resurrecting the virtual permutation sets annihilated by linearization, Comm. Algebra **39** (2010), no. 355–395.
- [Yo83] Yoshida, T.: *Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem*, J. Algebra. **80** (1983), 90–105.
- [Yo90] Yoshida, T.: *The generalized Burnside ring of a finite group*, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.
- [Gl81] Gluck, D.: *Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial complex* Illinois J. Math. Volume 25, Issue 1 (1981), 63–67.
- [Co35] H. S. M. Coxeter.: *The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}}$* , J. London Math. Soc. 10 (1935), 21–25.
- [So76] L. Solomon.: *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*, J. Algebra **41** (1976), 255–264.