

乱流のマルチフラクタル解析

筑波大学 物理学系 有光敏彦 (ARIMITSU, Toshihico)

目次

1	はじめに	336
1.1	歴史的概観	336
1.2	Kolmogorov スペクトル (K41) とカスケード・モデル	337
2	発達乱流の基礎方程式	341
2.1	非圧縮性流体	341
2.1.1	実空間	341
2.1.2	Fourier 空間	343
2.2	エネルギー収支とエネルギー輸送率	343
2.3	Taylor ミクロ長 Reynolds 数	346
2.4	Heisenberg の乱流理論	346
3	マルチフラクタル入門	348
3.1	フラクタル	348
3.2	二項式乗法過程	351
4	乱流のモデル	357
4.1	log-normal モデル	358
4.2	β モデル	359
4.3	p モデル	361
4.4	log-Poisson モデル	363
5	マルチフラクタル解析	363
5.1	特異性指数の空間分布	363
5.2	速度構造関数のスケーリング指数	367
5.3	確率密度関数	367

6	実験の解析	370
6.1	速度構造関数のスケーリング指数	370
6.2	確率密度関数	372
6.2.1	Swinney らの実験	372
6.2.2	Bodenschatz らの実験	374
6.2.3	後藤らの DNS	377
7	まとめ	380
A	一般化されたエントロピーに基づく解析	382
A.1	Rényi エントロピー	384
A.2	THC エントロピー	384
B	マルチフラクタル性とエントロピー指数	385
C	log-normal モデル再考	386
C.1	p モデルとの関係	386
C.2	マルチフラクタル解析との関係	387

1 はじめに

1.1 歴史的概観

充分発達した乱流（以下混乱のない限り，単に，乱流と記す）の理論的研究は，慣性領域における乱雑速度場の自己相似性の仮説に基づいた Kolmogorov [1] の次元解析から始まった。Heisenberg による予備的研究の後，自己相似性の破れ，すなわち，速度場における間欠性を扱う方法は主に二つの方向に発展した。一つはダイナミカルな方法（表 1 の字下がりの項目）であり，もうひとつはアンサンブル的方法（表 1 の左寄せの項目）である。ダイナミカルな方法では，確率的 Navier-Stokes 方程式を摂動論で直接扱う。他方，アンサンブル的方法では，渦がエネルギー・カスケードを構成するものとして乱流を統計力学的に解析する。アンサンブル的方法の中でもマルチフラクタルによる解析が，乱流現象解明に有力であることが最近

表 1: Historical (DIA: Direct Interaction Approximation, RG: Renormalization Group)

年代	研究のおもな展開
1883	Reynolds
1941	Kolmogorov spectrum
44	Landau equation
48	turbulent viscosity (Heisenberg; 55 Chandrasekhar)
55	vortex tangle (Feynman)
57	closure problem (e.g., Tatsumi)
59	DIA (Kraichnan; 64 Edwards, 65 Novikov)
62	log-normal model (Oboukhov, Kolmogorov; 66 Yaglom)
77	RG (Forster-Nelson; 86 Yakhot)
78	β model (Frisch-Nelkin)
87	p model (Meneveau-Sreenivasan)
94	log-Poisson model (She-Leveque)
94	re-summation (Procaccia)
94	Lagrangian method (Pope; 99 Reynolds, 00 Sawford-Yeung)
2000	the multi-fractal analysis (Arimitsu-Arimitsu)

明らかになって来た。そこでは，乱流の重要な要素である間欠性を，「特異性が実空間にマルチフラクタル分布している」として解析するもので，最近の高精度な実験やシミュレーションを高精度で再現できる。1880年頃に Reynolds が行った系統的な実験（図 1）以来 120 年に亘る物理学における難問への，新しい視点での挑戦である。このマルチフラクタルによる解析は，ダイナミカルな方法に対しても実り多い洞察を与えることが期待される。

乱流のマルチフラクタル解析 (multifractal analysis) とは，Tsallis 型分布関数 [2, 3] に基づいて構築された，大偏差系を扱うための系統的で自己無撞着な統計力学的方法である [4]-[16]。Tsallis 型分布関数は，適切な条件下で示量的 Rényi エントロピー [17] か，あるいは非示量的 Tsallis エントロピー [2, 3, 18] の極値を与える定常分布である。この解析法は，高 Reynolds 数における Navier-Stokes 方程式の尺度変換 (scale transformation) 不変性と，この不変性に起因する特異性が実空間にマルチフラクタル分布しているという仮定に基づいている。なお，マルチフラクタル解析は，log-normal モデル [19, 20, 21] を一般化したものととらえることもできる。実際，Boltzmann-Gibbs エントロピーに基づいてマルチフラクタル解析を行うと，log-normal モデルが導かれる [8]。

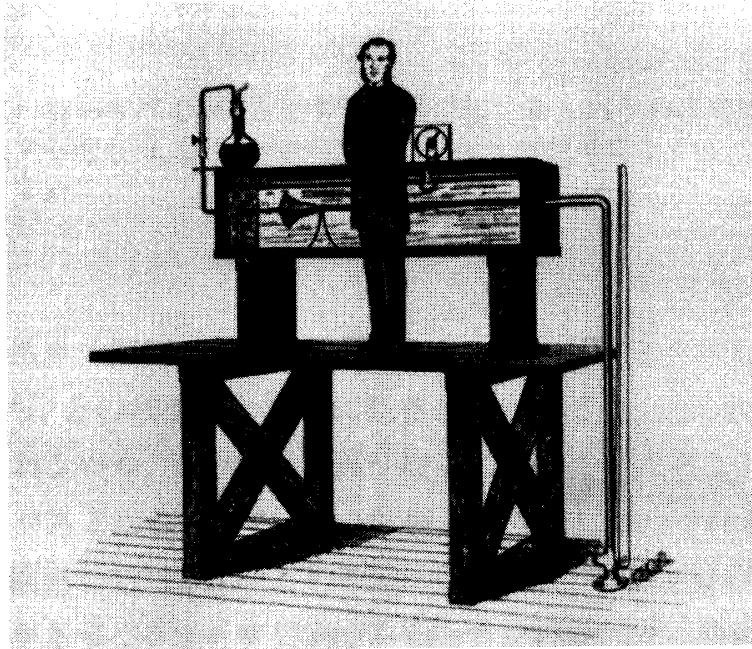


図 1: Reynolds' experimental setup

1.2 Kolmogorov スペクトル (K41) とカスケード・モデル

乱流のカスケード・モデルは, Richardson [22] が初めて提唱したとされている [23]。カスケード・モデルの基礎にあるのは, 「乱流は, 直径の異なる渦が混在して形成されている」という描像である。乱流では常に同じ調子で流速場が乱れている訳ではなく, 乱れの調子が時々刻々と変化し, しかも時折爆発的な乱れが観測される。カスケード・モデルは, この間欠現象を表現するものとして導入された様である。格子を通過した層流は, まず格子の網目サイズ程度の直径を持つ渦を形成し, 下流に行くほどより小さい渦を形成しながら充分発達した乱流へと成長する (図 2)。この状況を記述するために, 次々と生成される渦のサイズを

$$\ell_{\bar{n}} = \ell_{\text{in}} \delta_{\bar{n}}, \quad \delta_{\bar{n}} = \delta^{-\bar{n}} \quad (\bar{n} = 0, 1, 2, \dots), \quad \delta > 1 \quad (1.1)$$

と置く。ただし, $\bar{n}$ はカスケードのステップ数を表す。 $\ell_{\bar{n}=0} = \ell_{\text{in}}$ は格子の網目サイズ, したがって, 最大渦の直径である。以下では, 主に $\delta = 2$ を採用する。これは, 次々と生成される渦の直径が順次半分になって行くことを表しているが, 実際にどうなっているかは実験結果を解析して初めて判定できることである。乱流のエネルギー・カスケードは, 渦の直径の逆数を波数の目安として 3 つの領域に分けて議論すると便利である (図 3)。格子の網目サイズ ℓ_{in} 程度の波数領域 (図 3 の領域 I) は, そこが乱流系へのエネルギー注入源であるので, エネルギー注入領域 (energy input range) と呼ばれる。渦の直径が $\ell_{\text{in}} \gg \ell_{\bar{n}} \gg \eta$ を満たす領域 (図 3 の領域 II) は, 散逸の影響が無視できる領域で, 慣性領域 (inertial range) と呼ばれる。そこでは, 渦のエネルギーは順次小さい渦へ受け渡されてゆく。渦の直径が小さくなり η 程度になると散逸の影響が無視できなくなり, 乱流系のエネルギーは熱となって系外に放出される。この領域 (図 3 の領域 III) は, 散逸領域 (dissipation range) と呼ばれる。

さて, エネルギー・スペクトルの観測結果 (図 4) に現れる乱流に普遍的な傾斜 $-5/3$ を説明するに当たって, Kolmogorov は次のような仮説を立てた [1]。

1. 普遍的な傾斜が現れる慣性領域 ($\ell_{\text{in}} \gg \ell_{\bar{n}} \gg \eta$) では, 異なる直径の渦が, それぞれ, ぎっしりと空間

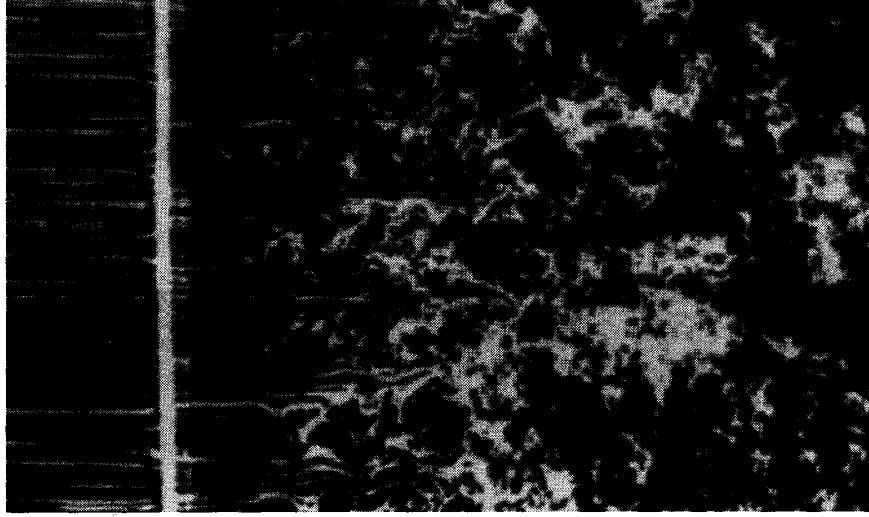


図 2: Homogeneous turbulence behind a grid [23] (Photographed by T. Corke and H. Nagib).

- (3次元を想定)を埋めている。したがって、単位体積中の直径 ℓ_n の渦の数は、 δ^{3n} の割合で増える。
2. エネルギー注入領域 ($\ell_n \sim \ell_{in}$) で注入されたエネルギー (単位時間、単位質量あたりのエネルギー注入率を ϵ とする) は、慣性領域では、順次小さい直径の渦に受け渡されて行く。熱となって系外へ散逸するエネルギーはない。
 3. 散逸領域 ($\ell_n \sim \eta$) では、乱流のエネルギーは流体のずり摩擦 (動粘性係数を ν とする) により熱に変換され散逸する。

まず、3番目の仮説より、散逸領域ではエネルギー注入率 ϵ と動粘性係数 ν が重要な働きをされると考えられる。ところで、これらの物理量の次元は、

$$[\epsilon] = \frac{L^2}{T^3}, \quad [\nu] = \frac{L^2}{T} \quad (1.2)$$

である。この2つの量で長さの次元を作ると、散逸領域の長さのオーダーを与える η が

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (1.3)$$

と求まる。これは、Kolmogorov スケール (Kolmogorov 散逸長) と呼ばれる。次に、1番目と2番目の仮説より、慣性領域での物理量は、渦の直径 ℓ_n とエネルギー注入率 ϵ のみに依存すると考えられる。そこで、単位質量あたりの流体の運動エネルギーに対して

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \langle u^\alpha(x) u^\alpha(x) \rangle = \int_0^\infty dk E_k, \quad (1.4)$$

により定義されるエネルギー・スペクトル E_k の表式を求めてみよう。なお、ここでの平均 $\langle \dots \rangle$ は、時間平均や空間平均など適切な平均がとられているものとする。 k は渦に特徴的な波数で、

$$k = \frac{1}{\ell_n} \quad (1.5)$$

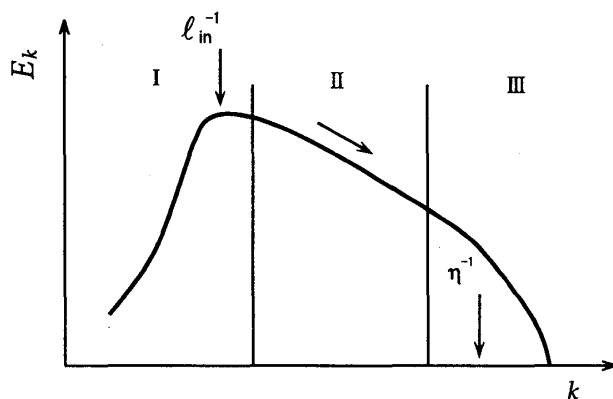


図 3: The ranges in the energy cascade. I: Energy input range, II: Inertial range and III: Dissipation range.

にて導入する。運動エネルギーの次元が L^2/T^2 なので、エネルギー・スペクトルの次元は

$$[E_k] = \frac{L^3}{T^2} \quad (1.6)$$

となる。これより、慣性領域では [1]

$$E_k \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (1.7)$$

となることが分かる。これは Kolmogorov スペクトルと呼ばれ、図 4 の傾斜を良く再現している。波数 k の渦に特有な時間 τ_k は、

$$\tau_k \propto \epsilon^{-1/3} k^{-2/3}. \quad (1.8)$$

となることも分かる。これより、小さい渦ほど早く消滅することが分かる。なお、渦の寿命は、渦の歪みや渦同士の衝突などで決まると考えられる。

Kolmogorov スペクトルは、以下のような直感的な考えでも導出できる [24]。直径が $\ell_{\bar{n}} \sim \ell_{\bar{n}} + d\ell_{\bar{n}}$ の渦が持つ単位質量あたりの運動エネルギーを

$$E_{\bar{n}} = \int_{k_{\bar{n}}}^{k_{\bar{n}+1}} dk E_k \propto \delta u_{\bar{n}}^2, \quad (1.9)$$

で定義する。ただし、 $k_{\bar{n}} = \ell_{\bar{n}}^{-1}$ と置いた。また、 $\delta u_{\bar{n}}$ は、この渦の周辺の回転の速さの目安である。これより、渦が一回転するのに要する時間の目安は

$$t_{\bar{n}} = \frac{\ell_{\bar{n}}}{\delta u_{\bar{n}}} \quad (1.10)$$

で与えられる。これは、直径が $\sim \ell_{\bar{n}}$ の渦が持つ運動エネルギーが、直径 $\sim \ell_{\bar{n}+1}$ の渦へ受け渡すのに必要な特性時間（寿命）と解釈される。すると、直径 $\sim \ell_{\bar{n}}$ の渦から直径 $\sim \ell_{\bar{n}+1}$ への単位時間・単位質量あたりのエネルギー輸送率 $\epsilon_{\bar{n}}$ は、

$$\epsilon_{\bar{n}} \sim \frac{E_{\bar{n}}}{t_{\bar{n}}} \sim \frac{(\delta u_{\bar{n}})^3}{\ell_{\bar{n}}} \quad (1.11)$$

で与えられることになる [24]。カスケードの各ステップ（例えば、 $\bar{n}$ 番目のステップと呼ぶ）で渦は 2 個 ($\delta = 2$) に分裂するが、それにより、単位質量あたりのエネルギー輸送率 $\epsilon_{\bar{n}}$ で、サイズ $\ell_{\bar{n}}$ の渦からサイズ $\ell_{\bar{n}+1}$ の渦へエネルギーが受け渡されると考えるのである。

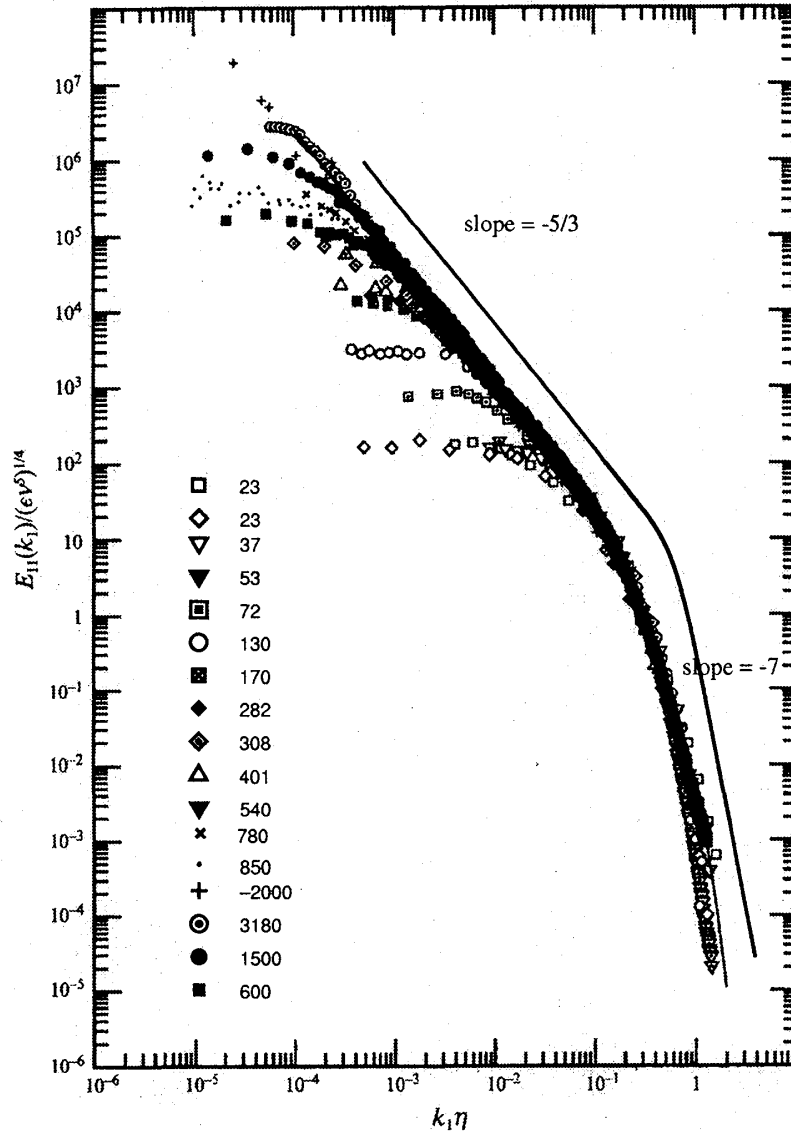


図 4: Energy spectrums collected from various observations [25]. The numerals attached to the symbols are the Taylor micro-scale Reynolds numbers R_λ : 23 (the first) boundary layer (Tielman 1967); 23 (the second) wake behind cylinder (Uberoi & Freymuth 1969); 37 grid turbulence (Comte-Bellot & Corrsin 1971); 53 channel centreline (Kim & Antonia (DNS) 1991); 72 grid turbulence (Comte-Bellot & Corrsin 1971); 130 homogeneous shear flow (Champagne et al. 1970); 170 pipe flow (Laufer 1954); 282 boundary layer (Tielman 1967); 308 wake behind cylinder (Uberoi & Freymuth 1969); 401 boundary layer (Sanborn & Marshall 1965); 540 grid turbulence (Kistler & Vrebalovich 1966); 780 round jet (Gibson 1963); 850 boundary layer (Coantic & Favre 1974); 2000 tidal channel (Grant et al. 1962); 3180 return channel (CAHI Moscow 1991); 1500 boundary layer (Saddoughi & Veeravalli 1994); 600 boundary layer (Saddoughi & Veeravalli 1994). The line, shifted for better visibility, describes Heisenberg's energy spectrum given by (2.69) with $K_0 = 2.0$.

ところで、散逸の影響が無視できる慣性領域 ($\ell_{\text{in}} \gg \ell_{\bar{n}} \gg \eta$) では、定常状態の渦のエネルギーは小さい渦へ順次 $\epsilon_{\bar{n}}$ で受け渡されることになる。ここで、「 $\epsilon_{\bar{n}}$ が $\bar{n}$ にらず一定である ($\epsilon_{\bar{n}} = \epsilon$)」と仮定しよう。これを (1.11) に代入すると、

$$\delta u_{\bar{n}} \sim (\epsilon \ell_{\bar{n}})^{1/3}, \quad E_{\bar{n}} \sim (\epsilon \ell_{\bar{n}})^{2/3} \quad (1.12)$$

を得る。(1.9) より、Kolmogorov スペクトル

$$E_k \sim E_{\bar{n}} k_{\bar{n}}^{-1} \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (1.13)$$

が得られる。さらに、(1.12) を (1.10) に代入すると、

$$t_{\bar{n}} \sim \epsilon^{-1/3} \rho_{\bar{n}}^{2/3} \quad (1.14)$$

を得る。これは特性時間 τ_k , (1.8), を与える。ここで、 $t_{\bar{n}}^{\text{diss}} \sim \ell_{\bar{n}}^2/\nu$ により、粘性による散逸時間を定義し、条件 $t_{\bar{n}} = t_{\bar{n}}^{\text{diss}}$ を (1.14) に用いると、慣性領域内の最小の渦の直径の目安である Kolmogorov スケール η が得られる。

m 次の速度構造関数 (速度揺らぎのモーメント) のスケーリング指数 ζ_m を

$$\left\langle \left(\frac{\delta u_{\bar{n}}}{\delta u_{\text{in}}} \right)^m \right\rangle = \left(\frac{\ell_{\bar{n}}}{\ell_{\text{in}}} \right)^{\zeta_m} \quad (1.15)$$

で定義する。ただし、先に述べたように、平均 $\langle \dots \rangle$ は適切なアンサンブル平均をとるものとする。実は、この平均を如何なる分布関数でとるかがこの講義の中心課題である。(1.12) の第 1 式を用いると、K41 でのスケーリング指数が

$$\zeta_m = \frac{1}{3}m \quad (1.16)$$

で与えられることが分かる。

2 発達乱流の基礎方程式

2.1 非圧縮性流体

2.1.1 実空間

一般に、流体系は、連続の方程式と Navier-Stokes (ナヴィエ・ストークス) 方程式を満たす。連続の方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (u^\alpha \rho) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, d) \quad (2.1)$$

で与えられる。ただし、 $\rho = \rho(x)$ は質量密度 (mass density), $u^\alpha = u^\alpha(x)$ は流速場の α 成分, d は空間の次元を表す。 $d+1$ 次元ベクトル $x = (\vec{x}, t)$ を導入した。Navier-Stokes 方程式は、

$$\frac{\partial \rho u^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} j_P^{\alpha\beta} = \rho f^\alpha \quad (2.2)$$

で与えられる。ただし、

$$j_P^{\alpha\beta} = j_P^{\alpha\beta}(x) = \rho u^\alpha u^\beta + P^{\alpha\beta}, \quad (2.3)$$

$$P^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta}(x) = \bar{p} \delta^{\alpha\beta} - \bar{\eta} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right), \quad (2.4)$$

$f^\alpha = f^\alpha(x)$ は単位質量あたりの外場, $\check{p} = \check{p}(x)$ は流体の圧力, $\check{\eta}$ は粘性率 (viscosity) である。繰り返しの添え字は, 和をとるものとする (たとえば, $A^\alpha B^\alpha = \sum_{\alpha=1}^d A^\alpha B^\alpha$)。

さて, 非圧縮性流体では質量密度が一定である: $\rho = \text{一定}$ 。このとき (2.1) より

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.5)$$

となり, Navier-Stokes 方程式 (2.2) は

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + u^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} p + \nu \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\beta} + f^\alpha \quad (2.6)$$

となる。ただし, $p = \check{p}/\rho$ と, 動粘性率 (kinematic viscosity) $\nu = \check{\eta}/\rho$ を導入した。ベクトル記法では, (2.5) と (2.6) は, それぞれ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (2.8)$$

となる。ただし, 以下, 主に外場のない場合を扱うので, $\vec{f} = 0$ と置いた。渦度 (vorticity) $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ に対する方程式は, (2.8) より

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.9)$$

で与えられることが分かる。

特徴的な速度場の大きさを u , 速度場が変化する特徴的な距離を L とすると, 対流を表す Navier-Stokes 方程式 (2.8) の左辺第 2 項と, 散逸を表す右辺第 2 項は, それぞれ, u^2/L , $\nu u/L^2$ と見積もれる。これらの比

$$\text{Re} = \frac{uL}{\nu} \quad (2.10)$$

は Reynolds (レイノルズ) 数と呼ばれ, 流体の状態を表す無次元量である。

Navier-Stokes 方程式 (2.8) は, 速度 $\vec{U}$ で動く慣性座標系に移っても不変である。つまり, Galilei 変換

$$t \rightarrow t' = t, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{U}t, \quad \vec{u} \rightarrow \vec{u}' = \vec{u} + \vec{U} \quad (2.11)$$

の下で, (2.8) は不変である。

また, Navier-Stokes 方程式 (2.8) は, 尺度変換 (scale transformation)

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \lambda \vec{x}, \quad \vec{u} \rightarrow \vec{u}' = \lambda^{\alpha/3} \vec{u}, \quad t \rightarrow t' = \lambda^{1-\alpha/3} t, \quad p \rightarrow p' = \lambda^{2\alpha/3} p, \quad \nu \rightarrow \nu' = \lambda^{1+\alpha/3} \nu \quad (2.12)$$

に関しても不変である。ただし, α は任意の実数である。この際, Reynolds 数が不変であることは注意を要する。映画などで模型を使って特殊撮影をする際, 模型の戦艦を海の水に浮かべたのでは Reynolds 数が変化してしまい, 観客に特殊撮影が見破られてしまう。そこで, Reynold 数を不変にするような溶液 (油など) に浮かべて特殊撮影をするのである。

ところで, 発達乱流の解析で利用する尺度変換は,

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \lambda \vec{x}, \quad \vec{u} \rightarrow \vec{u}' = \lambda^{\alpha/3} \vec{u}, \quad t \rightarrow t' = \lambda^{1-\alpha/3} t, \quad p \rightarrow p' = \lambda^{2\alpha/3} p \quad (2.13)$$

である [26, 27]。ここでは, 動粘性係数 ν を変化させない。これは, 「発達乱流状態では, 見る尺度を変えても流速場の様子が変わらない」という観測事実を表現するために, 尺度変換不変性を利用するからである。同じ流体でこの性質が観測される訳で, 動粘性係数は当然同一である。尺度変換 (2.13) で Navier-Stokes 方

程式 (2.8) が不変になるのは、 $\nu = 0$ 、つまり Reynolds 数が無限大のときのみである。実は、発達乱流状態が実現するのは、Reynolds 数が充分大きい場合である。したがって、尺度変換 (2.13) を以下で用いる際、高 Reynolds 数 ($\text{Re} \gg 1$) の場合を想定し、また実質的に $\nu = 0$ と考えてよい慣性領域での議論に用いることとする。

2.1.2 Fourier 空間

流速場の Fourier 変換を

$$u^\alpha(x) = \int_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^\alpha(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \int_{\vec{k}} = \int d^d k \quad (2.14)$$

により導入する。逆 Fourier 変換は

$$u_{\vec{k}}^\alpha(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\vec{x}} u^\alpha(x) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (2.15)$$

で与えられる。他の物理量の Fourier 変換も同様に導入すると、非圧縮性 (2.5) と Navier-Stokes 方程式 (2.6) は、それぞれ、

$$k^\alpha u_{\vec{k}}^\alpha(t) = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} u_{\vec{k}}^\alpha(t) = -\nu k^2 u_{\vec{k}}^\alpha(t) + i k^\alpha p_{\vec{k}}(t) + i \int_{\vec{p}} \int_{\vec{q}} k^\beta \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_{\vec{p}}^\beta(t) u_{\vec{q}}^\alpha(t) + f_{\vec{k}}^\alpha \quad (2.17)$$

となる。

(2.17) に $i k^\alpha$ をかけ α について和をとり、(2.16) を用いると、

$$p_{\vec{k}}(t) = - \int_{\vec{p}} \int_{\vec{q}} \frac{k^\beta k^\gamma}{k^2} \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_{\vec{p}}^\beta(t) u_{\vec{q}}^\gamma(t) + i k^\gamma f_{\vec{k}}^\gamma(t) \quad (2.18)$$

を得る。つまり、非圧縮性流体では、圧力を流速場（と外場）で記述できることが分かる。これを代入して圧力を消去すると、(2.17) は流速場の Fourier 成分に対する非線形微分積分方程式

$$\frac{d}{dt} u_{\vec{k}}^\alpha(t) = -\nu k^2 u_{\vec{k}}^\alpha(t) + i \int_{\vec{p}} \int_{\vec{q}} M_{\vec{k}}^{\alpha\beta\gamma} \delta(\vec{k} - \vec{p} - \vec{q}) u_{\vec{p}}^\beta(t) u_{\vec{q}}^\gamma(t) + D_{\vec{k}}^{\alpha\gamma} f_{\vec{k}}^\gamma(t) \quad (2.19)$$

となる。ただし、

$$M_{\vec{k}}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(k^\beta D_{\vec{k}}^{\alpha\gamma} + k^\gamma D_{\vec{k}}^{\alpha\beta} \right) \quad (2.20)$$

$$D_{\vec{k}}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \quad (2.21)$$

を導入した。 $k^\alpha D_{\vec{k}}^{\alpha\beta} = 0$ より、 $D_{\vec{k}}^{\alpha\beta}$ が横波の成分を取り出す演算子であることが分かる。この演算子は、射影演算子の性質

$$D_{\vec{k}}^{\alpha\beta} D_{\vec{k}}^{\beta\gamma} = D_{\vec{k}}^{\alpha\gamma} \quad (2.22)$$

を持つことが確かめられる。(2.19) の右辺第 3 項では、外場の横成分だけが寄与していることが分かる。

2.2 エネルギー収支とエネルギー輸送率

流速場の相関関数

$$Q^{\alpha\beta}(x, x') = \langle (u^\alpha(x) - U^\alpha)(u^\beta(x') - U^\beta) \rangle = \langle u^\alpha(x) u^\beta(x') \rangle - U^\alpha U^\beta, \quad U^\alpha = \langle u^\alpha(x) \rangle \quad (2.23)$$

を考える。ただし、 $\langle \dots \rangle$ は、発達乱流に適切なアンサンブル平均とする。簡単のため、平均流速 $\vec{U}$ は空間的にも時間的にも一定であると仮定する。

平均流速 $\vec{U}$ に乗った座標系では、発達した乱流系は一様 (homogenous) であると仮定する。その場合、相関関数は $\vec{x} - \vec{x}'$ の関数となる： $Q^{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{x}'; t, t')$ 。このとき、

$$\begin{aligned} \langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{\vec{k}'}^{\beta}(t') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\vec{x}} \int_{\vec{x}'} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} \langle u^{\alpha}(x) u^{\beta}(x') \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\vec{x}} \int_{\vec{x}'} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} \{ Q^{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{x}'; t, t') + U^{\alpha} U^{\beta} \} \\ &= Q_{\vec{k}}^{\alpha\beta}(t, t') \delta(\vec{k} + \vec{k}') + U^{\alpha} U^{\beta} \delta(\vec{k}) \delta(\vec{k}') \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる。したがって、

$$Q_{\vec{k}}^{\alpha\beta}(t, t') = \frac{1}{\delta(0)} \left\{ \langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{-\vec{k}}^{\beta}(t') \rangle - U^{\alpha} U^{\beta} \delta(\vec{k}) \delta(-\vec{k}) \right\} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\vec{x}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} Q^{\alpha\beta}(\vec{x}; t, t') \quad (2.25)$$

である。また、

$$Q^{\alpha\beta}(\vec{x}; t, t') = \int_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} Q_{\vec{k}}^{\alpha\beta}(t, t') = \frac{1}{\delta(0)} \int_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{-\vec{k}}^{\beta}(t') \rangle - U^{\alpha} U^{\beta} \quad (2.26)$$

を得る。平均流速の運動エネルギーを差引いた単位質量あたりの流体の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \langle u^{\alpha}(x) u^{\alpha}(x) \rangle - \frac{1}{2} U^{\alpha} U^{\alpha} = \frac{1}{2} Q^{\alpha\alpha}(\vec{0}; t, t) = \frac{1}{2\delta(0)} \int_{\vec{k}} \langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{-\vec{k}}^{\alpha}(t') \rangle - \frac{1}{2} U^{\alpha} U^{\alpha} \quad (2.27)$$

で与えられる。

ここで、「平均速度 $\vec{U}$ に乗った系では、発達した乱流系が等方的である」と仮定する。このとき、2 時間相関関数 $\langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{-\vec{k}}^{\beta}(t') \rangle - U^{\alpha} U^{\beta}$ は

$$\langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{-\vec{k}}^{\beta}(t') \rangle - U^{\alpha} U^{\beta} = \delta(0) D_{\vec{k}}^{\alpha\beta} q_{\vec{k}}(t, t') \quad (2.28)$$

の形に書ける。¹ 同時刻相関関数

$$Q_{\vec{k}}^{\alpha\beta}(t, t) = \frac{1}{\delta(0)} \left\{ \langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{-\vec{k}}^{\beta}(t) \rangle - U^{\alpha} U^{\beta} \right\} \quad (2.32)$$

は、

$$Q_{\vec{k}}^{\alpha\beta}(t, t) = D_{\vec{k}}^{\alpha\beta} q_{\vec{k}}(t), \quad q_{\vec{k}}(t) = q_{\vec{k}}(t, t) \quad (2.33)$$

で与えられるので、(2.27) より

$$\frac{1}{2} \langle u^{\alpha}(x) u^{\alpha}(x) \rangle - \frac{1}{2} U^{\alpha} U^{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{\vec{k}} D_{\vec{k}}^{\alpha\alpha} q_{\vec{k}}(t) = \frac{d-1}{2} \int_{\vec{k}} q_{\vec{k}}(t) = \frac{d-1}{2} \int_0^{\infty} dk E_k(t) \quad (2.34)$$

¹ 等方的な場合、この 2 時間相関関数の一般系形は

$$\langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{-\vec{k}}^{\beta}(t') \rangle - U^{\alpha} U^{\beta} = \delta(0) \left\{ \delta^{\alpha\beta} q_{\vec{k}}(t, t') + k^{\alpha} k^{\beta} r_{\vec{k}}(t, t') \right\} \quad (2.29)$$

で与えられる。さらに、ここでは非圧縮性流体を扱っているので、(2.16) より

$$k^{\alpha} \langle u_{\vec{k}}^{\alpha}(t) u_{-\vec{k}}^{\beta}(t') \rangle = \delta(0) k^{\beta} \left\{ q_{\vec{k}}(t, t') + k^2 r_{\vec{k}}(t, t') \right\} = 0 \quad (2.30)$$

となり、

$$r_{\vec{k}}(t, t') = -\frac{q_{\vec{k}}(t, t')}{k^2} \quad (2.31)$$

を得る。

を得る。ただし,

$$E_k(t) = \mathcal{D}_k q_k(t), \quad (2.35)$$

$$\mathcal{D}_k = \frac{\pi^{d/2} d}{\Gamma(1 + d/2)} k^{d-1} \quad (2.36)$$

と置いた。 $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。特に n が正の整数のとき,

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n + 1)!! \pi^{1/2}}{2^n} \quad (2.37)$$

となる。

(2.19), (2.28) より,

$$\frac{d}{dt} q_k(t) = -2\nu k^2 q_k(t) + \frac{1}{\delta(0)} \Im m \int_{\vec{p}} \int_{\vec{q}} M_{\vec{k}}^{\alpha\beta\gamma} \delta(\vec{k} + \vec{p} + \vec{q}) \langle u_{\vec{k}}^\alpha(t) u_{\vec{p}}^\beta(t) u_{\vec{q}}^\gamma(t) \rangle + \frac{1}{\delta(0)} \Re e D_{\vec{k}}^{\alpha\gamma} \langle u_{\vec{k}}^\alpha f_{-\vec{k}}^\gamma \rangle \quad (2.38)$$

となり, これより

$$\frac{d}{dt} E_k(t) = -2\nu k^2 E_k(t) + S_k(t) + I_k(t) \quad (2.39)$$

を得る。ただし,

$$S_k(t) = \frac{1}{\delta(0)} \Im m \int_{\vec{p}} \int_{\vec{q}} \mathcal{D}_k M_{\vec{k}}^{\alpha\beta\gamma} \delta(\vec{k} + \vec{p} + \vec{q}) \langle u_{\vec{k}}^\alpha(t) u_{\vec{p}}^\beta(t) u_{\vec{q}}^\gamma(t) \rangle, \quad (2.40)$$

$$I_k(t) = \frac{1}{\delta(0)} \Re e \mathcal{D}_k D_{\vec{k}}^{\alpha\gamma} \langle u_{\vec{k}}^\alpha f_{-\vec{k}}^\gamma \rangle \quad (2.41)$$

は, それぞれ, エネルギー輸送項とエネルギー注入項である。前者の被積分関数 $\langle u_{\vec{k}}^\alpha(t) u_{\vec{p}}^\beta(t) u_{\vec{q}}^\gamma(t) \rangle$ は, モード間の結合 (mode-mode coupling) を記述している。なお, $\Re e$, $\Im m$ は, それぞれ, 実部, 虚部のことである。エネルギー輸送項は

$$\int_0^\infty dk S_k(t) = 0 \quad (2.42)$$

を満たすので,

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty dk E_k(t) = -2\nu \int_0^\infty dk k^2 E_k(t) + \epsilon \quad (2.43)$$

を得る。ただし,

$$\epsilon = \int_0^\infty dk I_k(t) \quad (2.44)$$

は, 外場によって単位時間に単位質量あたり注入されるエネルギー (エネルギー注入率) である。(2.43) は, 単位時間当たりの乱流系のエネルギー変化は, 散逸によって失われる部分と外場によって注入される部分によって記述されることを表している。

特に定常状態では (2.43) の左辺がゼロとなるので, 外場によって系に注入されたエネルギーがすべて散逸によって系外に放出されることが分かる。このとき,

$$\epsilon = 2\nu \int_0^\infty dk k^2 E_k \quad (2.45)$$

を満たす。定常状態では, E_k は時間に依存しない。

2.3 Taylor ミクロ長 Reynolds 数

エネルギー・スペクトルにおける波数の拡がりの程度を見積もる量として, Taylor ミクロ長 (Taylor micro-scale) λ を

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\int_0^\infty k^2 E_k}{\int_0^\infty dk E_k} \quad (2.46)$$

で定義すると, (2.45) より,

$$\epsilon = 3\nu \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2 \quad (2.47)$$

を得る。ただし,

$$\int_0^\infty dk E_k = \frac{3}{2} u^2 \quad (2.48)$$

と置いた。

Taylor ミクロ長 Reynolds 数 (Taylor micro-scale Reynolds number) R_λ は

$$R_\lambda = \frac{u\lambda}{\nu} \quad (2.49)$$

で定義される。 R_λ と Reynolds 数 Re は, 以下の考察により関係づけられる。直径 $L = \ell_0$ (例えば, 乱流を発生する格子の網目のサイズ) の渦の円周上の回転速度を $u = \delta u_0$ とする。この渦の周辺が1周するのに要する時間

$$\tau = \frac{\pi L}{u} \quad (2.50)$$

は, この渦が, より小さい渦に緩和する特徴的な時間を与えるものと考えられる。今, サイズ L の渦にエネルギー $3u^2/2$ が注入されたとしよう。この渦は, 特徴的な時間 $\tau = t_0$ の間に, より小さい渦へエネルギー $3u^2/2$ を受け渡して緩和するので, エネルギー輸送率 ϵ は

$$\epsilon = \frac{3u^2/2}{\tau} \quad (2.51)$$

と評価できよう。これに (2.50) を代入すると

$$\epsilon = \frac{3u^3}{2\pi L} \quad (2.52)$$

が得られる。(2.47), (2.52) より ϵ を消去すると

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\nu L}{u}\right)^{1/2} \quad (2.53)$$

となるので, (2.49) から Reynolds 数との関係

$$R_\lambda^2 = 2\pi Re \quad (2.54)$$

が得られる。比例係数 2π は, 乱流系の入れ物の形状などにより多少変化する [28]。

2.4 Heisenberg の乱流理論

Heisenberg の乱流理論 [29, 30] とは, (2.35) のエネルギー・スペクトル $E_k(t)$ に対する方程式 (2.39)

$$\frac{d}{dt} E_k(t) = -2\nu k^2 E_k(t) + S_k(t) \quad (2.55)$$

と, $S_k(t)$ に対する条件 (2.42) のみで乱流を扱おうというものである (前期乱流理論と呼ばれることもある)。ただし, ここでは, 慣性領域でのエネルギー流出, すなわち, 緩和乱流としての考察を行うので, エネルギー注入領域のみで利く外場項は除いてある。(2.55) を 0 から k まで積分すると,

$$\frac{d}{dt} \int_0^k dk' E_{k'}(t) = -2(\nu + \nu_k(t)) H_k(t) \quad (2.56)$$

を得る。ただし, k は慣性領域内の波数とし,

$$H_k(t) = \int_0^k dk' k'^2 E_{k'}(t) \quad (2.57)$$

である。また, 乱流粘性 $\nu_k(t)$ を

$$\int_0^k S_{k'}(t) = -2\nu_k(t) H_k(t) \quad (2.58)$$

で導入した。 $S_k(t)$ に対する条件 (2.42) と (2.58) より,

$$\nu_\infty(t) = 0 \quad (2.59)$$

を得る。

ここで, 乱流粘性は, k より波数の大きい領域が k より小さい波数領域に与える影響を記述するものと解釈する。つまり, 波数とエネルギー・スペクトルのみに依存するある関数 $F(k', E_{k'}(t))$ を用いて,

$$\nu_k(t) = \int_k^\infty dk' F(k', E_{k'}(t)) \quad (2.60)$$

と表せると仮定するのである。次元解析より

$$[F] = \frac{L^3}{T} \quad (2.61)$$

が分かるので, $F(k', E_{k'}(t))$ の関数形が

$$F(k, E_k(t)) = A k^{-3/2} E_k(t)^{1/2} \quad (2.62)$$

と判明する。

さて, 定常状態を考えるとすると, 慣性領域内の波数 k に対しては

$$\frac{d}{dt} \int_0^k dk' E_{k'} = -\epsilon \quad (2.63)$$

であるので, (2.56) は

$$\frac{\epsilon}{H_k} = 2\nu + 2A \int_k^\infty dk' k'^{-3/2} E_{k'}^{1/2} \quad (2.64)$$

と書き直せる。これを k で微分し, (2.57) から得られる関係式

$$\frac{dH_k}{dk} = k^2 E_k \quad (2.65)$$

を利用すると, けっきょく,

$$\frac{dH_k}{dk} = \frac{4A^2}{\epsilon^2} k^{-5} H_k \quad (2.66)$$

を得る。(2.59) から得られる境界条件

$$H_{k \rightarrow \infty} = \frac{\epsilon}{2\nu} \quad (2.67)$$

の下にこれを解くと,

$$H_k = \left(\frac{\epsilon^2}{3A^2} \right)^{1/3} k^{4/3} \left[1 + \frac{8}{3A^2} (k\eta)^4 \right]^{-1/3} \quad (2.68)$$

となり, (2.65) より, 最終的に Heisenberg のエネルギー・スペクトル

$$E_k = K_0 (\epsilon\nu^5)^{1/4} (k\eta)^{-5/3} \left[1 + \frac{27K_0^3}{8} (k\eta)^4 \right]^{-4/3} \quad (2.69)$$

が得られる。ただし,

$$K_0 = \left(\frac{8}{9A} \right)^{2/3} \quad (2.70)$$

と置いた。図 4 に, $K_0 = 2.0$ とした場合の (2.69) を実線で記してある。

慣性領域では $k\eta \ll 1$ が成立するので, (2.69) は

$$E_k = K_0 (\epsilon\nu^5)^{1/4} (k\eta)^{-5/3} \quad (2.71)$$

となる。これは, K41 エネルギー・スペクトル (1.7) と一致している。一方, 散逸領域では $k\eta \gg 1$ が成立しているので, (2.69) は

$$E_k = \left(\frac{2}{3} \right)^4 \frac{(\epsilon\nu^5)^{1/4}}{K_0^3} (k\eta)^{-7} \quad (2.72)$$

となる。

(2.69) により, 定常状態での乱流粘性 ν_k は

$$\nu_k = \nu \left\{ \left[\left(\frac{2}{3K_0} \right)^3 \frac{1}{(k\eta)^4} + 1 \right]^{1/3} - 1 \right\} \quad (2.73)$$

と求まる。

3 マルティフラクタル入門

3.1 フラクタル

図 5 の三幅対 (triadic) Koch 曲線が占める空間の次元を調べてみよう。初め ($n = 0$) の線分の長さ L_0 を 1 とする: $L_0 = 1$ 。第 n 番目ステップでの 1 辺の長さ δ_n は

$$\delta_n = \delta^{-n}, \quad \delta = 3, \quad (3.1)$$

辺の数 N_n は

$$N_n = 4^n \quad (3.2)$$

であるので, このときの全長は

$$L_n = N_n \delta_n = \left(\frac{4}{3} \right)^n \quad (3.3)$$

となる。したがって, $n \rightarrow \infty$ の極限で, この長さは発散する。

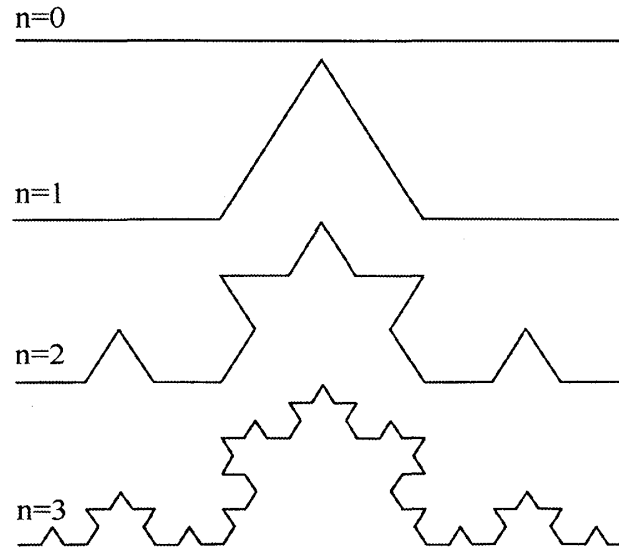


図 5: The triadic Koch curve.

ここで、全長が L_n の「曲線」が、実は、 D 次元の「体積」 1^D の領域を占めていると考えてみよう。これを、1 辺が δ_n の D 次元の「箱」で覆うために必要な箱の数が

$$N_n = \frac{1^D}{\delta_n^D} = \delta_n^{-D} = 3^{nD} \quad (3.4)$$

であると見なすのである。(3.2), (3.4) より

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \sim 1.26 \quad (3.5)$$

を得る。つまり、三幅対 Koch 曲線は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、1.26 次元の空間を占める存在になっていることが分った。 $n \rightarrow \infty$ の極限で全長が発散したのは、「 $D (> 1)$ 次元の領域を巾のない直線で塗りつぶすことができない」ことの現われだったのである。

次に、図 6 上段の Sierpinski の三角形ガスケットを調べてみよう。Sierpinski の三角形ガスケットの初め ($n = 1$) の一辺の長さを 1 とすると、 n ステップ目 ($n = 1, 2, \dots$) の三角形一辺の長さは

$$\delta_n = \delta^{-n}, \quad \delta = 2, \quad (3.6)$$

その数は

$$N_n = 3^n \quad (3.7)$$

なので、面積 S_n は

$$S_n = N_n \frac{3^{1/2}}{4} \delta_n^2 = \frac{3^{1/2}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (3.8)$$

で与えられる。 $n \rightarrow \infty$ の極限で、この面積はゼロとなる。

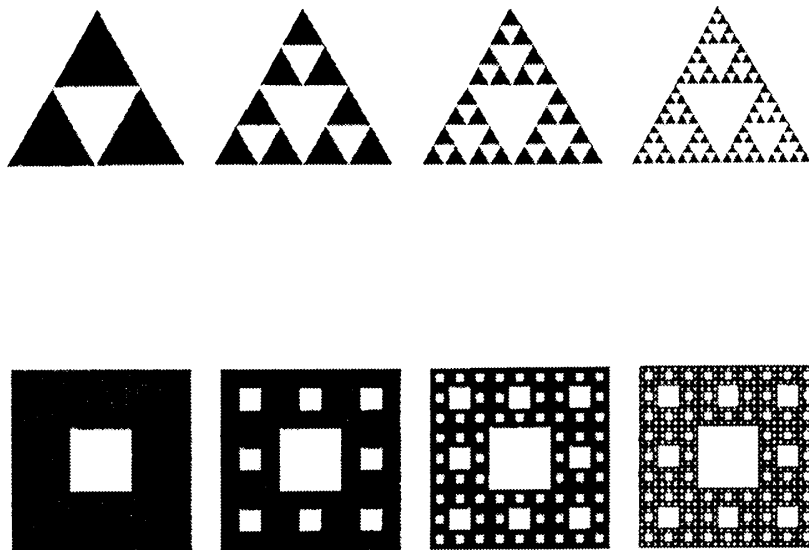


図 6: The triangular Sierpinski gasket (above) and the Sierpinski carpet (below).

ここで、面積 S_n の「黒三角形」が、 D 次元の「体積」 1^D の領域を占めていると考えてみよう。これを、1 辺が δ_n の D 次元の「箱」で覆うために必要な箱の数が

$$N_n = \frac{1^D}{\delta_n^D} = \delta_n^{-D} = 2^{nD} \quad (3.9)$$

であると見なす。(3.7), (3.9) より

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \sim 1.58 \quad (3.10)$$

を得る。

図 6 下段の Sierpinski カーペットでは、カーペットの初め ($n = 1$) の一辺の長さを 1 とすると、 n ステップ目 ($n = 1, 2, \dots$) の四角形一辺の長さは

$$\delta_n = \delta^{-n}, \quad \delta = 3, \quad (3.11)$$

その数は

$$N_n = 8^n \quad (3.12)$$

なので、面積 S_n は

$$S_n = N_n \delta_n^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^n \quad (3.13)$$

で与えられる。やはり、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、この面積もゼロとなる。

ここで、面積 S_n の「黒四角形」が、 D 次元の「体積」 1^D の領域を占めていると考えてみよう。これを、1 辺が δ_n の D 次元の「箱」で覆うために必要な箱の数は

$$N_n = \frac{1^D}{\delta_n^D} = \delta_n^{-D} = 3^{nD} \quad (3.14)$$

である。(3.12), (3.14) より

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \sim 1.89 \quad (3.15)$$

を得る。

Sierpinski のガスケツトとカーベツトの見た目での「黒っぽさ」を、フラクタル次元 (3.10) と (3.15) の大小との関係で味ってみると、フラクタル次元の有用性が分かるであろう。

3.2 二項式乗法過程

N 個の点が線分 $S = [0, 1]$ にばら撒かれているとする。これらの点の分布を知るために、線分 S を 2^n 個の領域に等分する。各領域の長さは $\delta_n = 2^{-n}$ である。領域に左から順番に番号 $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ をふっておく。点の分布は、 i 番目の領域に入っている点の数 N_i により、解像度 δ_n で特定できる。 i 番目の領域に入っている点の数の割合

$$p_n(i) = \frac{N_i}{N} \quad (3.16)$$

は、規格化

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} p_n(i) = 1 \quad (3.17)$$

を満たし、 i 番目領域に点を見つける確率を与える。集合

$$\mathcal{M}_n = \{p_n(i)\}_{i=0}^{2^n-1} \quad (3.18)$$

が与えられると、この解像度での点の分布を完全に知ることになる。

二項式乗法過程 (binomial multiplicative process) を例にして、マルチフラクタル手法の解説を行う [31]。まず、最初の過程で、 S が長さ δ_1 の 2 つの領域に分割される。左側の領域には、点の総数の内 p だけの割合の点が入るとする。したがって、左側の領域に点を見つける確率は $p_1(0) = p$ である。右側の領域には残りの点が入るので、そこに点を見つける確率は、 $p_1(1) = 1 - p$ となる。このとき、

$$\mathcal{M}_1 = \{p_n(i)\}_{i=0}^1 = \{p_1(0), p_1(1)\} = \{p, 1 - p\} \quad (3.19)$$

である。乗法過程では、それぞれの領域の点の数を、次々に同様の仕方で分ける。つまり、

$$\mathcal{M}_2 = \{p_2(i)\}_{i=0}^3 = \{p_1(0)p_1(0), p_1(0)p_1(1), p_1(1)p_1(0), p_1(1)p_1(1)\} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3 &= \{p_3(i)\}_{i=0}^7 \\ &= \{p_1(0)p_1(0)p_1(0), p_1(0)p_1(0)p_1(1), p_1(0)p_1(1)p_1(0), p_1(0)p_1(1)p_1(1), \\ &\quad p_1(1)p_1(0)p_1(0), p_1(1)p_1(0)p_1(1), p_1(1)p_1(1)p_1(0), p_1(1)p_1(1)p_1(1)\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

となってゆく。この過程を繰り返すと、分割された領域は小さくなり、それぞれの領域の測度は少なくなつてゆく。図 7 に、 $p = 0.694$, $n = 11$ の場合の確率 $p_n(x)$ を載せた。ただし、 $x = i\delta_n$ ($i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$) と置いた。 $p_n(x)$ は、 n 個の異なる値

$$\mu_n(\xi) = p_1(0)^k p_1(1)^{n-k} = [p^\xi (1-p)^{1-\xi}]^n \quad (3.22)$$

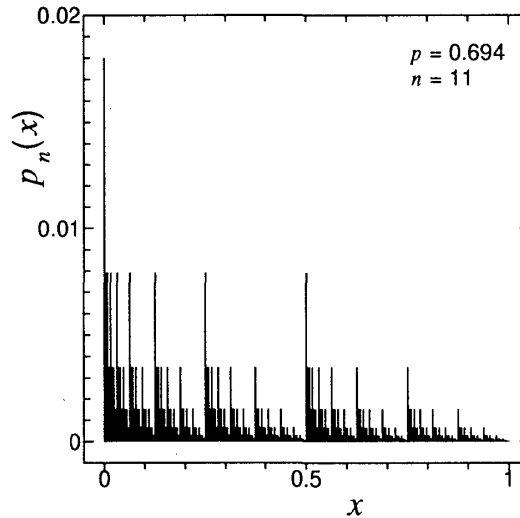


図 7: The content $p_n(x)$ of a cell as a function of the segment number $x = i\delta_n$ ($i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$) for $p = 0.694$ in the case of $n = 11$.

をとる。ただし、 $\xi = k/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) と置いた。 $p_n(x)$ の値が $\mu_n(\xi)$ である個数 $N_n(\xi)$ は、

$$N_n(\xi) = \binom{n}{k} = \binom{n}{\xi n}, \quad (3.23)$$

である。図 7 で $p_n(x)$ の最も大きい値 $\mu_{n=11}(10/11) = 0.0180$ は $N_{n=11}(10/11) = 1$ 本、2 番目に大きい値 $\mu_{n=11}(9/11) = 0.0079$ は $N_{n=11}(9/11) = 11$ 本、などなどである。

図 8 には、領域 $[0, x]$ における累積測度 $M_{n=11}(x)$ を載せた。ただし、累積測度は

$$M_n(x) = \sum_{i=1}^{x \cdot 2^n} p_n(i) \quad (3.24)$$

で定義した。確率の規格化 (3.17) は、

$$M_n(x=1) = \sum_{\xi=0}^1 N_n(\xi) \mu_n(\xi) = (p_1(0) + p_1(1))^n = 1 \quad (3.25)$$

と書ける。

長さ $\mu_n(\xi)$ が $\mathcal{S}$ に占める領域 $\mathcal{S}_n(\xi)$ は、単位線分の部分集合を構成する。つまり、

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\xi} \mathcal{S}_n(\xi) \quad (3.26)$$

である。部分集合 $\mathcal{S}_n(\xi)$ の Lipschitz-Hölder 指数 $\alpha(\xi)$ とフラクタル次元 $f(\xi)$ を、それぞれ、

$$\mu_n(\xi) = \delta_n^{\alpha(\xi)} \quad (3.27)$$

$$N_n(\xi) = \delta_n^{-f(\xi)}, \quad (3.28)$$

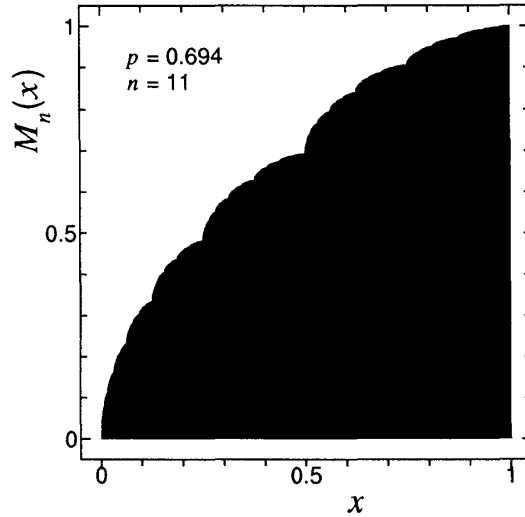


図 8: The measure $M_n(x)$ for the binomial multiplicative process for $p = 0.694$ in the case of $n = 11$.

にて導入する。(3.22) と (3.27) の比較, および (3.23) と (3.28) の比較より

$$\alpha(\xi) = -[\xi \log_2 p + (1 - \xi) \log_2 (1 - p)]. \quad (3.29)$$

$$f(\xi) = -[\xi \log_2 \xi + (1 - \xi) \log_2 (1 - \xi)], \quad (3.30)$$

が得られる [31]。ただし, 導出に当たって, Stirling の公式 $n! = (2\pi)^{1/2} n^{n+1/2} e^{-n}$ ($n \gg 1$) を利用した。確率 $p_n(i)$ を有する小領域の位置を特定する座標 $x = i\delta_n$ を, $p_1(0)$, $p_1(1)$ の引数 0, 1 を利用して 2 進数表示することを考える。たとえば, (3.21) に掲げた $M_{n=3}$ の 8 つの要素 $p_{n=3}(i)$ ($i = 0, 1, \dots, 7$) の座標は,

$$x = \{0.000, 0.001, 0.010, 0.011, 0.100, 0.101, 0.110, 0.111\} \quad (3.31)$$

のように, 小数点以下 $n = 3$ 桁の 2 進小数で与えられる。これらの内, $p_n(x)$ の値が $\mu_n(\xi)$ である小領域 ((3.27) より, $\alpha(\xi)$ でも区別される) の位置を与える $N_n(\xi)$ 個の座標点は, 2 進数表示の小数点以下のゼロの数 k ($\xi = k/n$) で分類されている。これらの座標点が部分集合 $S_n(\xi)$ の要素を構成する。 $S(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\xi)$ は, フラクタル次元 $f(\xi)$ の座標点を要素とするフラクタル部分集合を成す。

(3.29) と (3.30) より, フラクタル次元 $f(\xi)$ は α を用いると

$$f(\alpha) = f(\alpha(\xi)) = - \left[\frac{\alpha + \log_2 (1 - p)}{\log_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)} \log_2 \frac{\alpha + \log_2 (1 - p)}{\log_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)} + \frac{-\alpha - \log_2 p}{\log_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)} \log_2 \frac{-\alpha - \log_2 p}{\log_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)} \right] \quad (3.32)$$

と表せる。² α と ξ は (3.29) により, $\alpha = \alpha(\xi)$ で 1 対 1 対応しているので, 部分集合 $S_n(\xi)$ の性質はそのまま長さ

$$\mu_n(\alpha) = \delta_n^\alpha \quad (3.33)$$

² 一般に $f(\xi)$ と $f(\alpha)$ は異なる関数であり, 本来ならば別の関数記号を用いるべきであるが, 「マルチフラクタル・スペクトルに関数記号 f を割り当てる」という考えで同じ関数記号を用いることにする。この慣習は, 混乱のない限り, 物理屋が日常的に使っているもので, その起源はおそらく熱力学にあると思われる。本講義ノートでは, 他の関数にもこの慣習を採用している。

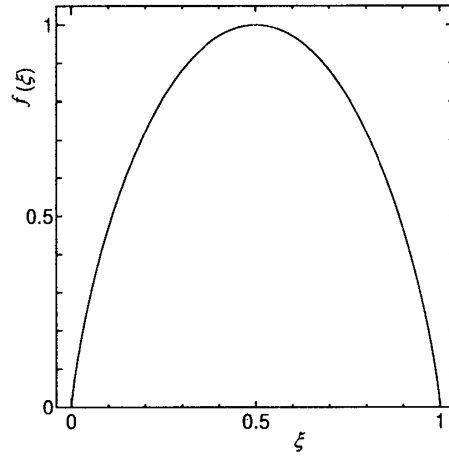


図 9: Multifractal spectrum $f(\xi)$.

が S に占める領域 $S_n(\alpha)$ へ焼き直せる。Lipschitz-Hölder 指数 α で分類される部分集合 $S_n(\alpha)$ は、単位線分の部分集合を構成する：

$$S = \bigcup_{\alpha} S_n(\alpha). \quad (3.34)$$

$S(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\alpha)$ は、フラクタル次元 $f(\alpha)$ で単位線分に分布する座標点が構成するフラクタル部分集合である。また、Lipschitz-Hölder 指数 α を持つ座標 $x = x(\alpha)$ では

$$\left. \frac{dM(x)}{dx} \right|_{x=x(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n(x(\alpha) + \delta_n) - M_n(x(\alpha))}{\delta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^\alpha = \begin{cases} 0 & (\alpha > 1) \\ \infty & (\alpha < 1) \end{cases} \quad (3.35)$$

となる。したがって、 $M(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(x)$ は、 $\alpha > 1$ なる点では傾きが零、 $\alpha < 1$ の点は特異点となっている。累積測度 $M(x)$ は、0 から 1 への増加関数であるが（図 8 参照）ほとんどいたる所で傾きが零の「悪魔の階段（Devil's staircase）」なのである。

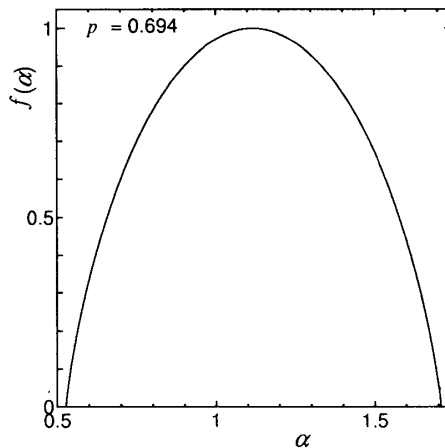


図 10: Multifractal spectrum $f(\alpha)$ for $p = 0.694$ giving $\alpha_{\min} = 0.527$ and $\alpha_{\max} = 1.708$.

ここで、二項式乗法過程の n 番目のステージに対する分配関数

$$Z_{n,\bar{q}} = \sum_{0 \leq \xi \leq 1} N_n(\xi) \mu_n(\xi)^{\bar{q}} = [p^{\bar{q}} + (1-p)^{\bar{q}}]^n \quad (3.36)$$

を考える。質量指数 $\tau(\bar{q})$ ，および一般化次元 (Rényi 次元) $D_{\bar{q}}$ を

$$Z_{n,\bar{q}} \sim \delta_n^{-\tau(\bar{q})} \sim \delta_n^{(\bar{q}-1)D_{\bar{q}}}, \quad (3.37)$$

つまり

$$\tau(\bar{q}) = (1 - \bar{q})D_{\bar{q}} \quad (3.38)$$

にて導入すると [32, 27],

$$\tau(\bar{q}) = \log_2 [p^{\bar{q}} + (1-p)^{\bar{q}}] \quad (3.39)$$

となる。

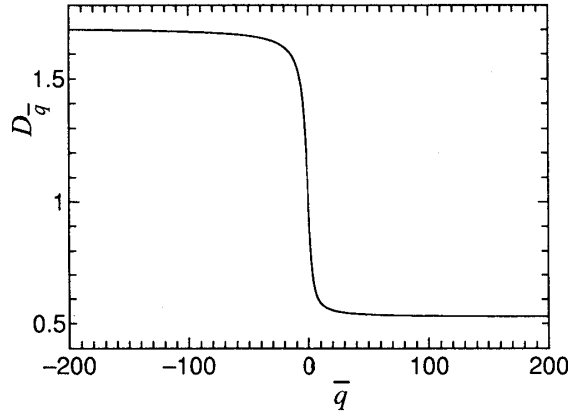


図 11: Generalized dimension $D_{\bar{q}}$ for $p = 0.694$ giving $D_{\bar{q}=-\infty} = 1.708$ and $D_{\bar{q}=\infty} = 0.527$.

$f(\alpha)$ と $\tau(\bar{q})$ は, $\delta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) の極限で,

$$f(\alpha) = \alpha \bar{q} + \tau(\bar{q}) \quad (3.40)$$

$$\alpha = -\frac{d\tau(\bar{q})}{d\bar{q}} \quad (3.41)$$

$$\bar{q} = \frac{af(\alpha)}{d\alpha} \quad (3.42)$$

を満たす。(3.40), (3.41), (3.42) は Legendre (ルジャンドル) 変換を構成している。

(3.41), (3.42) より, α と $\bar{q}$ との関係

$$\alpha = -\frac{p^{\bar{q}} \log_2 p + (1-p)^{\bar{q}} \log_2 (1-p)}{p^{\bar{q}} + (1-p)^{\bar{q}}} \quad (3.43)$$

$$\bar{q} = -\frac{1}{\log_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)} \log_2 \left[\frac{\log_2 (1-p) + \alpha}{-\log_2 p - \alpha} \right] \quad (3.44)$$

が求まる。(3.29) より, $p > 1/2$ のとき, $\alpha_{\min}$ と $\alpha_{\max}$ が, それぞれ,

$$\alpha_{\min} = \alpha(\xi = 1) = -\log_2 p = D_{\bar{q}=+\infty}, \quad (3.45)$$

$$\alpha_{\max} = \alpha(\xi = 0) = -\log_2(1-p) = D_{\bar{q}=-\infty} \quad (3.46)$$

で与えられることが分かる。ただし, $\alpha_{\min}$ と $\alpha_{\max}$ は,

$$f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0 \quad (3.47)$$

により導入した。なお, $\bar{q}$ と ξ の関係は

$$\bar{q} = \frac{\ln \xi - \ln(1-\xi)}{\ln p - \ln(1-p)} \quad (3.48)$$

で与えられる。

(3.42), (3.48) より

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\ln \xi - \ln(1-\xi)}{\ln p - \ln(1-p)}, \quad (3.49)$$

さらに α で微分して

$$\frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} = -\frac{1}{\xi(1-\xi)\ln 2} \quad (3.50)$$

を得る。これらより,

$$\bar{q} = \frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 0 \quad (3.51)$$

なる点

$$\xi = \xi_0 \equiv \frac{1}{2}, \quad \alpha = \alpha_0 \equiv -\frac{\log_2 p + \log_2(1-p)}{2} \quad (3.52)$$

で, $f(\alpha)$ は最大値

$$f(\alpha_0) = \tau(0) = 1 \quad (3.53)$$

をとることが分かる。ただし, (3.38) と (3.39) を用いた。さらに, (3.40) より

$$\tau(0) = D_0 \quad (3.54)$$

であるので, (3.53) は

$$D_0 = 1 \quad (3.55)$$

を意味する。一般に, 部分集合 $S(\alpha)$ のフラクタル次元 $f(\alpha)$ の最大値 D_0 は, 測度の受け皿のフラクタル次元を与える。ここでは, 測度は単位線分 $S = [0, 1]$ 全体で定義されているので, D_0 はその次元 1 となっている。ただし, 部分集合 $S(\alpha_0)$ のフラクタル次元は 1 であるが, この部分集合に属する要素が S 全体を覆っているという訳ではなく, やはり, その部分集合を構成しているのである。

一方,

$$\bar{q} = \frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1 \quad (3.56)$$

なる点

$$\xi = p, \quad \alpha = \alpha_1 \quad (3.57)$$

では, (3.38) より

$$\tau(1) = 0, \quad (3.58)$$

さらに (3.40) より

$$f(\alpha_1) = \alpha_1 \quad (3.59)$$

が成り立っている。この点では、

$$\alpha_{\bar{q}} = -\frac{d\tau(\bar{q})}{d\bar{q}} = D_{\bar{q}} - (1 - \bar{q}) \frac{dD_{\bar{q}}}{d\bar{q}} \quad (3.60)$$

より

$$\alpha_1 = D_1 \quad (3.61)$$

も成り立っており、けっきょく

$$D_1 = -[p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p)] \quad (3.62)$$

を得る。 D_1 は一般に情報エントロピーと呼ばれるが、(3.62) の表式を見ると、これが二項式乗法過程における情報エントロピーを与えていることが見て取れる。

ここで、長さ δ_n のある領域に注目したとき、 α を $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ の範囲に発見する確率 $P^{(n)}(\alpha)d\alpha$ を求めておこう。これは、フラクタル次元 $f(\alpha(\xi)) = f(\xi)$ の空間を埋め尽くしている長さ δ_n の領域の数 $N_n(\xi)$ と線分 S を埋め尽くしている箱の総数 δ_n^{-1} との比で与えられるから、

$$P^{(n)}(\alpha)d\alpha = \delta_n^{1-f(\alpha(\xi))}d\alpha \equiv P_B^{(n)}(\xi)d\xi \quad (3.63)$$

となる。(3.30) を代入すると

$$P_B^{(n)}(\xi) = [2\xi^\xi(1 - \xi)^{1-\xi}]^{-n} \quad (3.64)$$

と求まる。なお、 ξ と α の関係は (3.29) で与えられている。

4 乱流のモデル

今考えている乱流系の Reynolds 数 Re は、

$$Re = \frac{\delta u_{in} \ell_{in}}{\nu} = \left(\frac{\ell_{in}}{\eta} \right)^{4/3} \quad (4.1)$$

で与えられる。ただし、 η は (1.3) に定義された Kolmogorov スケール [1]、 ϵ はエネルギー注入スケール ℓ_{in} へのエネルギー注入率である。これより、 $Re \gg 1$ は $\ell_{in} \gg \eta$ を意味していることが分かる。つまり、高 Reynolds 数では慣性領域が広いのである。距離 ℓ_n 離れた 2 点間での流速場 $\vec{u}$ の 1 成分 u の揺らぎ

$$\delta u_n = |u(\bullet + \ell_n) - u(\bullet)| \quad (4.2)$$

が速度揺らぎの定義であるが、これを利用して

$$\delta u_{in} = |u(\bullet + \ell_{in}) - u(\bullet)| \quad (4.3)$$

を導入した。距離 ℓ_n 離れた 2 点間での圧力差を質量密度で割った

$$\delta p_n = |p(\bullet + \ell_n) - p(\bullet)| \quad (4.4)$$

も重要な測定量である。距離の測定は、離散的な単位

$$\ell_n = \delta_n \ell_0 \quad (4.5)$$

で行なう。ただし、 $\delta_n = \delta^{-n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) である。以下では、エネルギー・カスケード・モデルのときと同様に、主に $\delta = 2$ として扱う。非負の整数 n を「マルチフラクタル深度」と称する。なお、実験の解析では n を非負の実数として扱うので、実質的には距離の測定は連続的に行われる。ただ、ここではカスケード・モデルとの概念的な整合性をとるために、便宜上、(4.5) の離散的な単位で距離を測定するとして議論を進める。ところで、マルチフラクタル深度 n は、エネルギー・カスケード・モデルにおけるステップ数 $\bar{n}$ と関係づけられる。エネルギー・カスケード・モデルでは、直径 r の渦のステップ数 $\bar{n}$ は $\bar{n} = -\log_2(r/\ell_{\text{in}})$ で定義される。 $r = \ell_n$ を代入すると $\bar{n}$ と n の関係

$$\bar{n} = n - \log_2(\ell_0/\ell_{\text{in}}). \quad (4.6)$$

が得られる。

さて、乱流粘性に比べて動粘性 ν の影響が無視できる高 Reynolds 数状態 $\text{Re} \gg 1$ では、尺度変換 (2.13) に対して、非圧縮流体を記述する Navier-Stokes 方程式 (2.8) は不変であった。この尺度変換不変性より

$$\frac{\delta u_n}{\delta u_0} = \delta_n^{\alpha/3}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\delta p_n}{\delta p_0} = \delta_n^{2\alpha/3}, \quad (4.8)$$

を得る。また、(1.11) と (4.7) より、

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon} = \delta_n^{\alpha-1} \quad (4.9)$$

も得られる。ただし、 $\epsilon = \epsilon_{\text{in}} = \epsilon_0$ と置いた。なお、尺度変換に現れる指数 α は任意の実数である。

4.1 log-normal モデル

K41 では、エネルギー輸送率 ϵ_n が n に依らず一定値 ϵ をとるものとして解析した。乱流の間欠性を取り入れるために、 ϵ_n の揺らぎを初めて考慮したのが log-normal モデルである [19, 20, 21]。慣性領域では散逸の影響は利かないので、エネルギー保存より、エネルギー輸送率の平均値はエネルギー注入率 ϵ と一致するはずである：

$$\langle \epsilon_n \rangle = \epsilon. \quad (4.10)$$

それでは、如何なる分布関数で平均操作 $\langle \dots \rangle$ をとるべきなのであろうか？そこで、直径が ℓ_{n-1} の渦が受け取ったエネルギーのうちのどの程度の割合が ℓ_n の渦へ受け渡されるかを示す量 $\epsilon_n/\epsilon_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) を確率変数として採用してみよう。なお、この確率変数の変域は $[0, \infty]$ とする。各 n に対するこの変数が互いに確率的に独立で、平均値が $\delta^{1-\alpha}$ 、分散が σ^2 の共通の分布関数を持つと仮定する。このとき、 $n \gg 1$ に対して、確率変数

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{j=1}^n \ln \frac{\epsilon_j}{\epsilon_{j-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \ln \frac{\epsilon_n}{\epsilon} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (1 - \alpha) \ln \delta \quad (4.11)$$

の分布は、中心極限定理により、正規分布 (Gauss 分布)

$$P^{(n)}(\alpha) d\alpha = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} e^{-n(\alpha-\bar{\alpha})^2/2\sigma^2} d\alpha \quad (4.12)$$

となるはずである。ただし, (4.11) の最後の等号で (4.9) を用いた。 α の変域は $[-\infty, \infty]$ である。

変数 ϵ_n/ϵ の分布関数 $P_\epsilon^{(n)}(\epsilon_n/\epsilon)$ を

$$P_\epsilon^{(n)}\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right) d\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right) = P^{(n)}(\alpha) d\alpha \quad (4.13)$$

で導入すると,

$$P_\epsilon^{(n)}\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi n \sigma \epsilon_n \ln \delta}} \exp \left[-\frac{(\ln(\epsilon_n/\epsilon) - n(1 - \bar{\alpha}) \ln \delta)^2}{2n(\sigma \ln \delta)^2} \right] \quad (4.14)$$

を得る。

エネルギー輸送率の $\bar{q}$ 次のモーメントは

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon} \right)^{\bar{q}} \right\rangle &\equiv \int_0^\infty d\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right) \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon} \right)^{\bar{q}} P_\epsilon^{(n)}\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right) \\ &= \delta_n^{-(1-\bar{\alpha})\bar{q} - \sigma^2 \ln(\delta) \bar{q}^2 / 2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。ところで, エネルギー輸送率の平均値は, エネルギー保存則 (4.10) を満たさなければならない。また, 間欠性指数 μ は

$$\left\langle \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon} \right)^2 \right\rangle = \delta_n^{-\mu} \quad (4.16)$$

で定義される。(4.10) と (4.16) を (4.15) に適用すると

$$\bar{\alpha} = 1 + \frac{\mu}{2} \quad \sigma^2 = \frac{\mu}{\ln \delta} \quad (4.17)$$

を得る。これより, (4.15) は

$$\left\langle \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon} \right)^{\bar{q}} \right\rangle = \delta_n^{-\mu \bar{q} (\bar{q}-1)/2} \quad (4.18)$$

となる。

(4.7) と (4.9) より

$$\left\langle \left(\frac{\delta u_n}{\delta u_0} \right)^m \right\rangle = \delta_n^{m/3} \left\langle \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon} \right)^{m/3} \right\rangle \quad (4.19)$$

となることが分かるので, (4.18) を代入すると, (1.15) で導入された速度構造関数のスケーリング指数が

$$\zeta_m = \frac{1}{3}m - \frac{\mu}{18}m(m-3) \quad (4.20)$$

と求まる。また, (1.9) より, log-normal モデルでのエネルギー・スペクトル

$$E_k \propto k^{-(\zeta_2+1)} = k^{-5/3-\mu/9} \quad (4.21)$$

を得る。K41 からの補正が $-\mu/9$ で与えられている。

4.2 β モデル

β モデルでは, 小さい渦ほど空間 (次元を d とする) を占める体積が減少するとし, 直径が ℓ_n の渦の体積密度を $\beta_n (\leq 1)$ と置くことを提案した [24]。カスケードの各ステップ ($n = 1, 2, \dots$) で, 直径 ℓ_{n-1} の

渦が直径 ℓ_n の渦を平均 N 個発生するとしよう。直径 ℓ_{n-1} の渦 1 個が占める領域の内、直径 ℓ_n の渦が占める領域の平均の体積が $N\ell_n^d/\ell_{n-1}^d = N\delta^{-d}$ で与えられるので、直径 ℓ_n の渦の体積密度は

$$\beta_n = (N\delta^{-d})^n \quad (4.22)$$

と求まる。ただし、エネルギー注入サイズの直径 ℓ_0 の渦の体積密度を $\beta_0 = 1$ とした。直径 ℓ_n の渦は直径 ℓ_{n-1} の渦に埋め込まれ付着していると仮定している。渦が埋め込まれているフラクタル次元を D_β とすると、 N は体積 $\ell_{n-1}^{D_\beta}$ 中に入る体積 $\ell_n^{D_\beta}$ の箱の数であるから

$$N = \frac{\ell_{n-1}^{D_\beta}}{\ell_n^{D_\beta}} = \delta^{D_\beta} \quad (4.23)$$

となり、

$$\beta_n = \delta^{n(D_\beta-d)} \quad (4.24)$$

が得られる。

(1.11) を使ってエネルギー保存則を書き下すと

$$\langle \epsilon_n \rangle = \beta_n \frac{\delta u_n^3}{\ell_n} = \epsilon \quad (4.25)$$

となるので、

$$\delta u_n = \left(\frac{\epsilon \ell_n}{\beta_n} \right)^{1/3} \quad (4.26)$$

を得る。(4.24) を代入すると

$$\frac{\delta u_n}{\delta u_0} = \delta_n^{(1-d+D_\beta)/3} \quad (4.27)$$

となる。

ここで、フラクタル次元 D_β と間欠性指数 μ との関係を求めておこう。(1.11) より

$$\langle \epsilon_n^2 \rangle = \beta_n \left(\frac{\delta u_n^3}{\ell_n} \right)^2 = \epsilon^2 \delta_n^{D_\beta-d} \quad (4.28)$$

となる。ただし、第 2 等号で (4.26) を用いた。間欠性指数の定義 (4.16) との比較により

$$\mu = d - D_\beta \quad (4.29)$$

が得られる。これより、

$$N = \delta^{d-\mu}, \quad \beta_n = \delta_n^\mu, \quad \frac{\delta u_n}{\delta u_0} = \delta_n^{(1-\mu)/3} \quad (4.30)$$

を得る。

m 次の速度構造関数は

$$\left\langle \left(\frac{\delta u_n}{\delta u_0} \right)^m \right\rangle = \beta_n \left(\frac{\delta u_n}{\delta u_0} \right)^m = \delta_n^{\mu+m(1-\mu)/3} \quad (4.31)$$

となるので、スケーリング指数

$$\zeta_m = \frac{1}{3}m - \mu \left(\frac{1}{3}m - 1 \right) \quad (4.32)$$

を得る。エネルギー・スペクトル E_k の傾きは

$$-(\zeta_2 + 1) = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\mu \quad (4.33)$$

となり、 β モデルにおける K41 からの補正は $-\mu/3$ であることが分かる。

4.3 p モデル

p モデルでは、「エネルギー・カスケードの各直径の渦が、そのエネルギー輸送率 ϵ_n の違いによって分類すると、同じ直径の渦どうしでマルチフラクタルに空間を占めている」と仮定することで乱流の間欠性を説明しようと試みた [32, 27]。その考えのエッセンスは以下のものである。 α と ϵ_n は、 $\epsilon_n \neq 0$ のとき、(4.9) より

$$\alpha = \frac{\ln(\epsilon_n/\epsilon)}{\ln \delta_n} + 1 \quad (4.34)$$

に関連している。空間 (d 次元, 体積 ℓ_0^d) を体積 ℓ_n^d の箱で隙間なく埋め尽くすと、その数は δ_n^{-d} である。そのひとつの箱に注目したとき、そこで ϵ_n/ϵ が、零と異なる、 $\epsilon_n/\epsilon \sim \epsilon_n/\epsilon + d(\epsilon_n/\epsilon)$ の範囲の値を持つ渦を発見する確率 $P_\epsilon^{(n)}(\epsilon_n/\epsilon)d(\epsilon_n/\epsilon)$ は、

$$P_\epsilon^{(n)}\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right)d\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right)P_{\epsilon_n \neq 0}^{(n)} = P^{(n)}(\alpha)d\alpha \quad (4.35)$$

と与えられるとする。ただし、 $P_{\epsilon_n \neq 0}^{(n)}$ は、選んだ箱が $\epsilon \neq 0$ を満たしてる確率である。これは、 $\epsilon_n \neq 0$ の箱が占めている空間のフラクタル次元 D_0 での箱の数 $\delta_n^{-D_0}$ とすべての箱の数 δ_n^{-d} との比で与えられる：

$$P_{\epsilon_n \neq 0}^{(n)} = c_1 \delta_n^{d-D_0}. \quad (4.36)$$

一方、 α で特徴づけられる渦は、フラクタル次元 $f_d(\alpha)$ で空間を占めているとする。注目している箱に $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ の範囲の値を持った渦を見つける確率は、フラクタル次元 $f_d(\alpha)$ の空間を埋め尽くしている箱の数 $\delta_n^{-f_d(\alpha)}$ とすべての箱の数 δ_n^{-d} との比で与えられると考えると、

$$P^{(n)}(\alpha)d\alpha = c_2(\alpha)\delta_n^{d-f_d(\alpha)}d\alpha \quad (4.37)$$

となる。(4.36) と (4.37) を (4.35) に代入すると、けっきょく、

$$P_\epsilon^{(n)}\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right) = \frac{c_2(\alpha)}{c_1 \ln \delta_n} \frac{\epsilon}{\epsilon_n} \delta_n^{D_0-f_d(\alpha)} \quad (4.38)$$

が得られる。ただし、 α と ϵ_n/ϵ の関係は (4.34) で与えられる。以下、規格化係数 $c_2(\alpha)$ の α 依存性は無視できるものとして考察を進める。

エネルギー輸送率の $\bar{q}$ 次モーメントを計算すると

$$\left\langle \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right)^{\bar{q}} \right\rangle \equiv \int_0^\infty d\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right) \left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right)^{\bar{q}} P_\epsilon^{(n)}\left(\frac{\epsilon_n}{\epsilon}\right) \sim \delta_n^{-\tau_d(\bar{q})+D_0-\bar{q}} \quad (4.39)$$

となる。ただし、質量指数 $\tau_d(\bar{q})$ と $f_d(\alpha)$ は Legendre 変換、

$$f_d(\alpha) = \alpha\bar{q} + \tau_d(\bar{q}), \quad (4.40)$$

$$\alpha = -\frac{d\tau_d(\bar{q})}{d\bar{q}}, \quad (4.41)$$

$$\bar{q} = \frac{df_d(\alpha)}{d\alpha}. \quad (4.42)$$

を満たす [27]。以下、流速場 1 成分の時系列データ解析を想定し、 $d=1$ の場合を考察する。 $f_{d=1}(\alpha) = f(\alpha)$, $\tau_{d=1}(\bar{q}) = \tau(\bar{q})$ と置くと、Legendre 変換 (4.40), (4.41), (4.42) は、それぞれ、(3.40), (3.41), (3.42) となる。このとき一般化次元 $D_{\bar{q}}$ は (3.38) にて定義される。

確率の規格化より

$$\tau(0) = D_0 = f(\alpha_0) \quad (4.43)$$

を得る。また、エネルギー保存 (4.10) より

$$\tau(1) = D_0 - 1 \quad (4.44)$$

となるが、(3.38) より一般に $\tau(1) = 0$ であるので、フラクタル集合の受け皿次元が

$$D_0 = 1 \quad (4.45)$$

と求まる。さらに、間欠性指数の定義 (4.16) より

$$\mu = \tau(2) - D_0 + 2 = 1 + \tau(2) = 1 - D_2 \quad (4.46)$$

が得られる。ただし、第2等号で (4.45) を代入し、第3等号では $\tau(2) = -D_2$ を用いた。(4.19) に (4.39) を用いると、 m 次のモーメント速度構造関数のスケーリング指数は

$$\zeta_m = 1 - \tau\left(\frac{m}{3}\right) \quad (4.47)$$

で与えられることが分かる。因みに、エネルギー・スペクトルの勾配は

$$-(\zeta_2 + 1) = \tau\left(\frac{2}{3}\right) - 2 \quad (4.48)$$

で与えられる。

p モデルでは、 $P^{(n)}(\alpha)$ として二項乗法過程の (3.63), (3.64) を採用した。つまり、質量指数は (3.39) で与えられる。(4.46) より、 p と間欠性指数 μ の関係

$$p = \left(1 + (2^\mu - 1)^{1/2}\right) / 2 \quad (4.49)$$

が得られる。これより、質量指数 (3.39) が間欠性指数の関数として求まる：

$$\tau(\bar{q}) = \log_2 \left[\left(1 + (2^\mu - 1)^{1/2}\right)^{\bar{q}} + \left(1 - (2^\mu - 1)^{1/2}\right)^{\bar{q}} \right] - \bar{q}. \quad (4.50)$$

また、速度構造関数のスケーリング指数は

$$\zeta_m = \frac{m}{3} + 1 - \log_2 \left[\left(1 + (2^\mu - 1)^{1/2}\right)^{m/3} + \left(1 - (2^\mu - 1)^{1/2}\right)^{m/3} \right] \quad (4.51)$$

となる。エネルギー・スペクトルの傾斜の補正は、 $-1 + \log_2 \left[\left(1 + (2^\mu - 1)^{1/2}\right)^{2/3} + \left(1 - (2^\mu - 1)^{1/2}\right)^{2/3} \right]$ である。なお、(3.45), (3.46) より

$$\alpha_{\min} = 1 - \log_2 \left(1 + (2^\mu - 1)^{1/2}\right), \quad \alpha_{\max} = 1 - \log_2 \left(1 - (2^\mu - 1)^{1/2}\right) \quad (4.52)$$

となる。

なお、p モデルと log-normal モデルとの関係を、付録 C に入れた。

4.4 log-Poisson モデル

カスケードの n ステップの内, k ステップがエネルギーを失うのに関わり, $n-k$ ステップは Navier-Stokes 方程式に従い乱流中に渦構造を形成するのに関わりと仮定する [33, 34]。このとき, 局所散逸率 $\epsilon_n^{(k)}$ が

$$\epsilon_n^{(k)} = \epsilon \beta^k \delta_n^{-\gamma} \quad (4.53)$$

で与えられ, エネルギーを失う事象の起こる確率 $P(k)$ が, $n \gg 1$ では, Poisson 分布

$$P(k) = e^{-\tilde{\lambda}} \tilde{\lambda}^k / k!, \quad \tilde{\lambda} = \ln \delta_n^{\gamma/(\beta-1)} \quad (4.54)$$

で与えられると考えるのである。なお, パラメータ $\tilde{\lambda}$ は, エネルギー保存 (4.10) により決められている。

以上より,

$$\left\langle \left(\frac{\epsilon_n^{(k)}}{\epsilon} \right)^{\bar{q}} \right\rangle = \delta_n^{\gamma(-\bar{q} + \frac{\beta\bar{q}-1}{\beta-1})}, \quad (4.55)$$

を得る。ただし, ここでの平均 $\langle \dots \rangle$ は, Poisson 分布 (4.54) で取っている。パラメータ γ と β は, $k \gg 1$ の場合での考察あるいはデータ解析で決める。間欠性指数とは

$$\mu = \gamma(1 - \beta) \quad (4.56)$$

と関係している。通常, $\gamma = 2/3$ と $\beta = 2/3$ が採用されている [33, 34]。この場合, $\mu = 0.2$ としたことに当たる。

(4.19) を利用すると, (4.55) より

$$\zeta_m = \frac{m}{9} + 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{m/3} \right]. \quad (4.57)$$

が得られる。

5 マルティフラクタル解析

5.1 特異性指数の空間分布

スケーリング則

$$|x_n| \equiv \left| \frac{\delta x_n}{\delta x_0} \right| = \delta_n^{\phi\alpha/3} \quad (5.1)$$

を満たす, ある物理量の揺らぎ

$$\delta x_n = |x(\bullet + \ell_n) - x(\bullet)| \quad (5.2)$$

を考えよう。このとき,

$$|x'| = \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \frac{\delta x_n}{\ell_n} \propto \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^{\phi\alpha/3-1} \quad (5.3)$$

で定義される空間導関数は, $\alpha < 3/\phi$ で発散する。指数 α は, その特異性の度合いを表す指標となっている。

速度揺らぎ ($\phi = 1$), 圧力揺らぎ ($\phi = 2$) に対して, スケーリング則 (4.7), (4.8) が得られる。速度導関数と流体粒子加速度は, それぞれ

$$|u'| = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n \quad (5.4)$$

$$|\vec{a}| = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (5.5)$$

で記述される。ただし、特徴的長さ ℓ_n に対応する速度導関数を

$$u'_n = \frac{\delta u_n}{\ell_n}, \quad (5.6)$$

加速度を

$$a_n = \frac{\delta p_n}{\ell_n} \quad (5.7)$$

とした。流体粒子の加速度 $\vec{a}$ は、速度の実時間導関数： $\vec{a} = \partial \vec{u} / \partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ で与えられる。速度導関数と流体粒子加速度が、それぞれ $\alpha < 3$ と $\alpha < 1.5$ で特異性を持つことが分かる：

$$|u'| \propto \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \ell_n^{(\alpha/3)-1} \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

$$|\vec{a}| \propto \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \ell_n^{(2\alpha/3)-1} \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

なお、エネルギー散逸率は、 $\alpha < 1$ で特異性を持つ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{\alpha-1} \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

マルティフラクタル解析の本質は、特異性指数 α にマルティフラクタル分布を仮定するところにある。実空間の 1 点で指数 α の値を $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ の範囲に見つける確率 $P^{(n)}(\alpha)d\alpha$ は、パラメータ q の Tsallis 型分布

$$P^{(n)}(\alpha) = \frac{1}{Z_\alpha^{(n)}} \left[1 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{(\Delta\alpha)^2} \right]^{n/(1-q)} \quad (5.11)$$

で与えられるとする [5]-[8] (付録 A 参照)。 $Z_\alpha^{(n)}$ は分配関数である。ただし、

$$(\Delta\alpha)^2 = \frac{2X}{(1-q)\ln 2} \quad (5.12)$$

とおいた。 α の範囲は $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ である。ここで、 $\alpha_{\min} = \alpha_0 - \Delta\alpha$ 、 $\alpha_{\max} = \alpha_0 + \Delta\alpha$ とした。この分布は、関係

$$P^{(n)}(\alpha) \propto \delta_n^{1-f(\alpha)} \quad (5.13)$$

[27, 8] を踏襲している ((4.37) 参照)。この関係は、スケール不変性を表しており、指数 α で特徴付けられた各特異点がどれ位の密度で実空間を占めているかを示している。これより、マルティフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ は、

$$f(\alpha) = 1 + \frac{1}{1-q} \log_2 \left[1 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{(\Delta\alpha)^2} \right] \quad (5.14)$$

で与えられる [5]-[8]。なお、エントロピーが示量的か非示量的であるかに関わらず、その極値を与える分布関数 $P^{(n)}(\alpha)$ は、同じ関数構造を持っている。³

ところで、 $\bar{q}$ と α の関係は (4.42) により与えられる。それを解き、 $q \rightarrow 1$ の極限で有限な解を選ぶと

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{1 - \sqrt{C_{\bar{q}}}}{\bar{q}(1-q)\ln 2} \quad (5.15)$$

³ 本論文における表式では、乱流の背景となるエントロピーがいずれであるかを決定することはできない。

を得る。ただし,

$$C_{\bar{q}} = 1 + 2\bar{q}^2(1 - q)X \ln 2 \quad (5.16)$$

である。さらに,

$$\alpha_{\max} - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_{\min} = \sqrt{\frac{2X}{(1 - q) \ln 2}} \quad (5.17)$$

の関係より $\alpha_{\max} = \alpha(\bar{q} = -\infty)$ と $\alpha_{\min} = \alpha(\bar{q} = +\infty)$ が得られる。

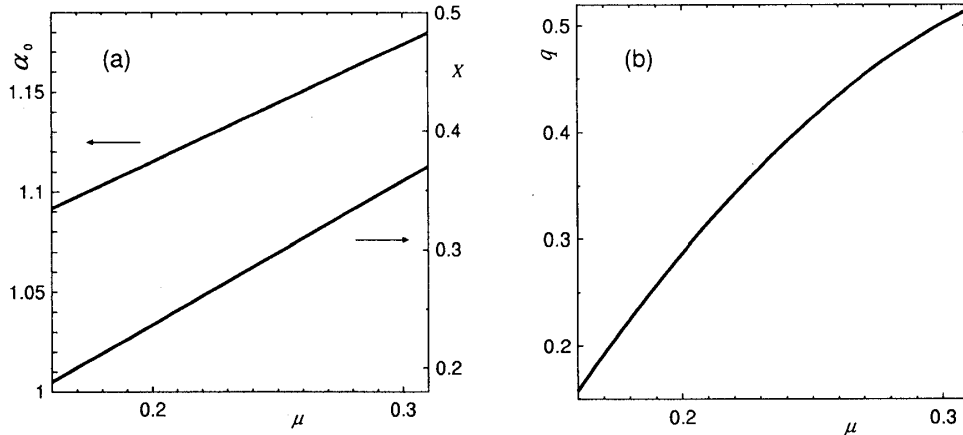


図 12: (a) The μ -dependence of α_0 and X . Squares and circles are the points where the self-consistent equations are solved. (b) The μ -dependence of q . Circles are the points where the self-consistent equations are solved.

(4.40) に (5.14) と (5.15) を用いると,

$$\tau(\bar{q}) = 1 - \alpha_0 \bar{q} + \frac{2X\bar{q}^2}{1 + \sqrt{C_{\bar{q}}}} + \frac{1}{1 - q} \left[1 - \log_2 \left(1 + \sqrt{C_{\bar{q}}} \right) \right] \quad (5.18)$$

が得られる。 $q \neq 1$ の場合は, 大きい $|\bar{q}|$ に対して $\tau(\bar{q})$ に対数項が現れる。

間欠性指数 μ の値が与えられると, パラメータ α_0 , X , q は 3 つの条件式より自己無撞着に決定される (図 12 参照)。3 つの条件式は, エネルギーの保存 (4.10) :

$$\tau(1) = 0, \quad (5.19)$$

間欠性指数 μ の定義 (4.16) :

$$\mu = 1 + \tau(2), \quad (5.20)$$

それと, スケーリング則 (付録 B 参照) :⁴

$$\frac{1}{1 - q} = \frac{1}{\alpha_-} - \frac{1}{\alpha_+} \quad (5.21)$$

で与えられる。ただし, $\alpha_{\pm}$ は $f(\alpha_{\pm}) = 0$ を満たす。平均 $\langle \dots \rangle$ は $P^{(n)}(\alpha)$ でとるものとする。

$f(\alpha)$ と $D_{\bar{q}} = \tau(\bar{q})/(1 - \bar{q})$ を, それぞれ, 図 13 と図 14 に載せた。マルチフラクタル解析における $f(\alpha)$ は負の値も取る。負のフラクタル次元については, 参考文献 [35] に議論されている。

Boltzmann-Gibbs エントロピーを出発点にして以上の手続きをとると, log-normal モデルが導かれる (付録 C 参照)。したがって, マルティフラクタル解析は log-normal モデルの拡張と捉えることもできる。

⁴ 文献 [36, 37] で初めて導かれたものをマルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ が負値をとる場合へ拡張したものである。

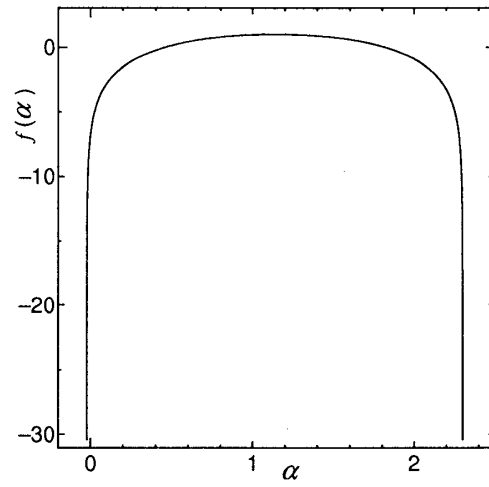


図 13: Multifractal spectrum $f(\alpha)$ with $\mu = 0.240$ ($q = 0.391$).

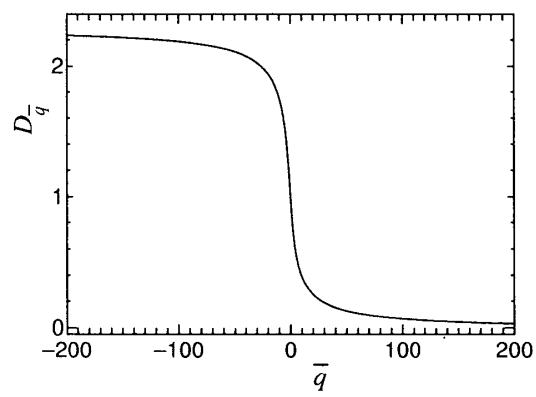


図 14: Generalized dimension $D_{\bar{q}} = \tau(\bar{q})/(1 - \bar{q})$ with $\mu = 0.240$ ($q = 0.391$).

5.2 速度構造関数のスケーリング指数

物理量 x_n の値を $x_n \sim x_n + dx_n$ の範囲に見つける確率 $\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n$ は,

$$\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n = \Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n)dx_n + \Delta\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n \quad (5.22)$$

で与えられる。ただし、規格化を

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \Pi_\phi^{(n)}(x_n) = 1 \quad (5.23)$$

を課す。(5.22) の第1項は、特異点が実空間にマルチフラクタル分布しているという仮定によるもので、物理量 x_n の異常部分からの寄与を記述している。これは、変数変換 $|x_n| = \delta_n^{\phi\alpha/3}$ を通じて

$$\Pi_{\phi,S}^{(n)}(|x_n|)dx_n \propto P^{(n)}(\alpha)d\alpha \quad (5.24)$$

で与えられる。他方、第2項 $\Delta\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n$ は、Navier-Stokes 方程式における散逸項や測定誤差による寄与を記述している。散逸項は尺度変換に基づく不変性を破るので、上記の特異性の分布に対する考察では無視されていた。第2項は、第1項への補正項である。表式 (5.22) の各項は2つの確率分布関数、1) 2つの独立な原因のうちの、いずれからの寄与であるかを定める確率分布関数と、2) $x_n \sim x_n + dx_n$ の範囲に x_n を見つける条件付確率分布関数、の積となっている。特異性に起因する部分の x_n の値は大きく、間欠性にかかわる大偏差を記述する。補正項の寄与する部分の x_n の値は自分自身の標準偏差と比べて小さい。なお、測定された確率密度関数は、通常、左右非対称であるが、以下では、非対称性は現象の本質的な原因によるものではないと仮定して、確率密度関数の対称部分を調べることにする。

変数 $|x_n|$ の m 次モーメントは、

$$\langle\langle |x_n|^m \rangle\rangle_\phi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n|^m \Pi_\phi^{(n)}(x_n) = 2\gamma_{\phi,m}^{(n)} + (1 - 2\gamma_{\phi,0}^{(n)})a_{\phi m} \delta_n^{\zeta_{\phi m}} \quad (5.25)$$

で与えられる。ただし、

$$2\gamma_{\phi,m}^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n|^m \Delta\Pi_\phi^{(n)}(x_n), \quad (5.26)$$

$$a_{\phi m} = \left[\frac{2}{\sqrt{C_{\phi m/3}}(1 + \sqrt{C_{\phi m/3}})} \right]^{1/2}, \quad (5.27)$$

である。物理量

$$\begin{aligned} \zeta_m &= 1 - \tau\left(\frac{m}{3}\right) \\ &= \frac{\alpha_0 m}{3} - \frac{2Xm^2}{9(1 + \sqrt{C_{m/3}})} - \frac{1}{1-q} \left[1 - \log_2 \left(1 + \sqrt{C_{m/3}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

は速度構造関数、すなわち速度揺らぎ ($\phi = 1$) の m 次モーメント $\langle\langle |\delta u_n / \delta u_0|^m \rangle\rangle$ のスケーリング指数である [5]-[8]。なお、表式 (5.28) が n に依存しないのは尺度変換不変性の現れである。

5.3 確率密度関数

標準偏差 $\langle\langle x_n^2 \rangle\rangle^{1/2}$ でスケールした新たな変数

$$\xi_n = \frac{x_n}{\langle\langle x_n^2 \rangle\rangle^{1/2}} \quad (5.29)$$

で書かれた PDF $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n)$ を

$$\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n)d\xi_n = \Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n \quad (5.30)$$

により導入する。これが実験で得られた PDF と比較されるべきものである。新たな変数と α には

$$|\xi_n| = \bar{\xi}_n \delta_n^{\phi\alpha/3 - \zeta_{2\phi}/2} \quad (5.31)$$

の関係がある。ただし、

$$\bar{\xi}_n = \left[2\gamma_{\phi,2}^{(n)} \delta_n^{-\zeta_{2\phi}} + (1 - 2\gamma_{\phi,0}^{(n)}) a_{2\phi} \right]^{-1/2} \quad (5.32)$$

である。領域 $\xi_n^* \leq |\xi_n| \leq \xi_n^{\max}$ では、間欠的で稀な事象を記述する表式 (5.22) 第 1 項の異常部分に比べて、第 2 項の寄与は無視できると考えられる。すると

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n)d\xi_n &= \Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n)dx_n \\ &= \bar{\Pi}_\phi^{(n)} \frac{\bar{\xi}_n}{|\xi_n|} \left[1 - \frac{1-q}{n} \frac{(3 \ln |\xi_n/\xi_{n,0}|)^2}{2\phi^2 X |\ln \delta_n|} \right]^{n/(1-q)} d\xi_n \end{aligned} \quad (5.33)$$

を得る。ただし、

$$\xi_{n,0} = \bar{\xi}_n \delta_n^{\phi\alpha_0/3 - \zeta_{2\phi}/2}, \quad (5.34)$$

$$\xi_n^{\max} = \bar{\xi}_n \delta_n^{\phi\alpha_{\min}/3 - \zeta_{2\phi}/2}, \quad (5.35)$$

$$\bar{\Pi}_\phi^{(n)} = \frac{3(1 - 2\gamma_0^{(n)})}{2\phi \bar{\xi}_n \sqrt{2\pi X |\ln \delta_n|}} \quad (5.36)$$

である。他方、 $|\xi_n| \leq \xi_n^*$ を満たす小さな揺らぎへの寄与は、主に熱揺らぎか測定誤差によるとし、その領域では、パラメータ q' の Tsallis 型関数

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n)d\xi_n &= \left[\hat{\Pi}_{\phi,S}^{(n)}(x_n) + \Delta \hat{\Pi}_\phi^{(n)}(x_n) \right] dx_n \\ &= \bar{\Pi}_\phi^{(n)} \left\{ 1 - \frac{1-q'}{2} \left(1 + \frac{3f'(\alpha^*)}{\phi} \right) \left[\left(\frac{\xi_n}{\xi_n^*} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{1/(1-q')} d\xi_n \end{aligned} \quad (5.37)$$

で与えられると仮定する。2つの PDF, (5.33) と (5.37) は、 ξ_n^* で関数値とその傾きが一致するよう接続されている。ただし、

$$\xi_n^* = \bar{\xi}_n \delta_n^{\phi\alpha^*/3 - \zeta_{2\phi}/2} \quad (5.38)$$

である。 α^* は、

$$\frac{\zeta_{2\phi}}{2} - \frac{\phi\alpha}{3} + 1 - f(\alpha) = 0 \quad (5.39)$$

の小さい方の解である。 ξ_n^* は、 $n \gg 1$ で $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n^*)$ の n 依存性が最小となる点である。

表式 (5.37) の 2 番目の等号と (5.33) を用いると、 $\Delta \Pi_\phi^{(n)}(x_n)$ が得られ、

$$2\gamma_{\phi,m}^{(n)} = \frac{K_{\phi,m}^{(n)} - L_{\phi,m}^{(n)}}{1 + K_{\phi,0}^{(n)} - L_{\phi,0}^{(n)}} \quad (5.40)$$

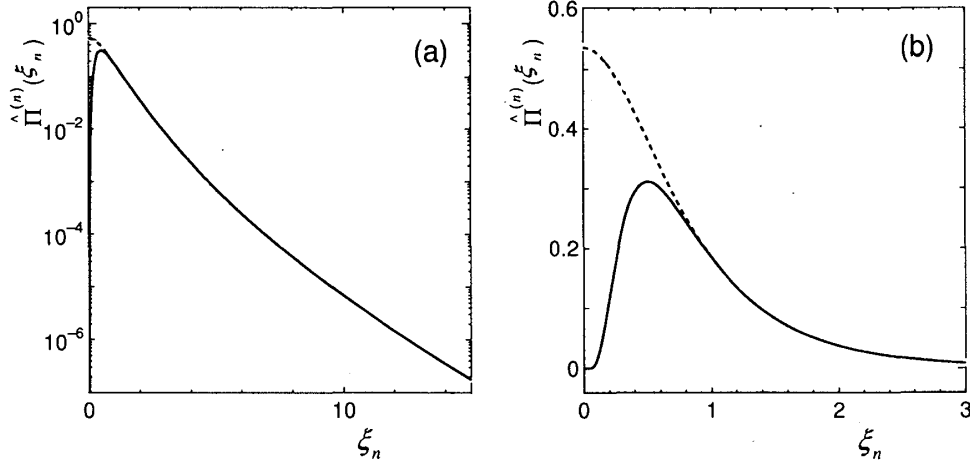


図 15: Contributions to PDF from the tail part and the center part are plotted on (a) log and (b) linear scales. The solid line represents the contribution from the multifractal distribution of singularities in physical space due to the scale invariance of the Navier-Stokes equation for large Reynolds number. The dashed line represent the center part where the portion of the contribution from the singularities are represented by solid line.

により $\gamma_{\phi,m}^{(n)}$ の解析的表式も得られる。ただし,

$$K_{\phi,m}^{(n)} = \frac{3 \delta_n^{\phi(m+1)\alpha^*/3-\zeta_{2\phi}/2}}{\phi \sqrt{2\pi X |\ln \delta_n|}} \int_0^1 dz z^m \left[1 - \frac{1-q'}{2} \left(1 + \frac{3f'(\alpha^*)}{\phi} \right) (z^2 - 1) \right]^{1/(1-q')} \quad (5.41)$$

$$L_{\phi,m}^{(n)} = \frac{3 \delta_n^{\phi m \alpha^*/3}}{\phi \sqrt{2\pi X |\ln \delta_n|}} \int_{z_{\min}^*}^1 dz z^{m-1} \left[1 - \frac{1-q}{n} \frac{(3 \ln |z/z_0^*|)^2}{2\phi^2 X |\ln \delta_n|} \right]^{n/(1-q)} \quad (5.42)$$

$$z_{\min}^* = \xi_{\min}/\xi_n^* = \delta_n^{\phi(\alpha_{\max}-\alpha^*)/3}, \quad (5.43)$$

$$z_0^* = \xi_{n,0}/\xi_n^* = \delta_n^{\phi(\alpha_0-\alpha^*)/3} \quad (5.44)$$

である。

以上より, PDF の裾部分, (5.33), は間欠性指数 μ とマルチフラクタル深度 n (あるいは, 距離 ℓ_n) でほぼ決まり, 中心部の PDF, (5.37), は主に q' に支配されることが分かる。図 15 に, 裾部分 PDF を実線, 中心部 PDF を破線で示した。中心部分に延びている実線は (5.33) を記したもので, 尺度不変に起因する異常性が中心部でどの程度利いているかを示したものと理解される。なお, 裾部分は異常性のみにより PDF が決定されている。図 16 には, PDF の n 依存性を載せた。 n が大きいほど (したがって, ℓ_n が小さいほど) PDF の裾が広がっているのが分かる。PDF には 2ヶ所 n 依存性が少ない部分のあることが見て取れる。裾部分と中心部を繋いでいる点は, この 2 点の内, ξ_n の値が小さい方の点である。

速度揺らぎ PDF と速度導関数 PDF は, 規格化された変数 $\xi_n = \delta u_n / \langle (\delta u_n)^2 \rangle^{1/2}$ に対して, 共通の表式 $\hat{\Pi}^{(n)}(\xi_n) \equiv \hat{\Pi}_{\phi=1}^{(n)}(\xi_n)$ で与えられる。他方, 圧力揺らぎ PDF と流体粒子加速度 PDF は, 規格化された変数 $\omega_n = \delta p_n / \langle (\delta p_n)^2 \rangle^{1/2}$ に対して, 共通の表式 $\hat{\Lambda}^{(n)}(\omega_n) \equiv \hat{\Pi}_{\phi=2}^{(n)}(\omega_n)$ によって与えられる。なお, エネルギー散逸率 PDF は $\phi = 3$ を代入して得られる。

なお, マルティフラクタル解析と log-normal モデルとの関係を, 付録 C に入れた。

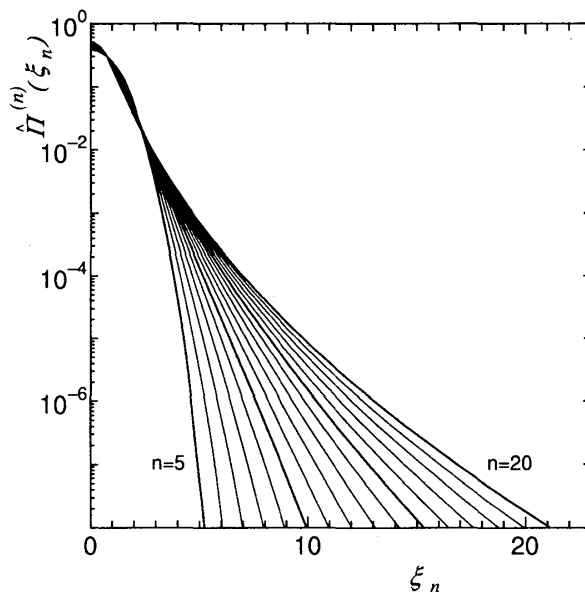


図 16: The n -dependence of the PDF $\hat{H}^{(n)}(\xi_n)$ given by the present analysis with $q = 0.471$ ($\mu = 0.280$) for integer values n from 5 to 20, from left to right at the axis ξ .

6 実験の解析

発達乱流中の各種の確率密度関数（PDF）の理論的表式 (5.33), (5.37) により, 以下の 3 つの実験で得られた PDF を解析する。

1. $R_\lambda = 262$ における速度揺らぎ PDF。これは, Lewis と Swinney による同心円柱系での Couette-Taylor 乱流の実験で測定されたものである [38]。
2. $R_\lambda = 690$ における Lagrange 描像での実験で得られた流体粒子加速度 PDF。この実験は, Bodenschatz らにより, シリコン検知機を用いて空間・時間的測定分解能を劇的に向上させることで実現されたものである [39, 40]。
3. $R_\lambda = 380$ における速度揺らぎ, 速度導関数, 流体粒子加速度の PDF。これは, 後藤らによるメッシュ・サイズ 1024^3 の直接数値シミュレーション (direct numerical simulation; DNS) [41] で得られたものである。

6.1 速度構造関数のスケーリング指数

速度構造関数のスケーリング指数の表式 (5.28) と実験結果との比較を, 図 17, 図 18, 図 19 に載せた。

図 17 では, 間欠性指数 $\mu = 0.238$ における理論表式 (5.28) を実線で示し, 文献 [42] の $R_\lambda = 110$ での実験データとの比較を行った。図には, 間欠性指数が同じ値での他の理論曲線も載せてある: 点線は K41 [1], 破線は β モデル [24], 一点破線は p モデル [32, 27], 短破線は log-Poisson モデル [33, 34], 二点破線は log-normal モデル [19, 20, 21] である。

図 18 では, 文献 [38] の Swinney らの実験で得られた速度構造関数のスケーリング指数のデータと, 実線で示した理論表式 (5.28) との比較を行った。間欠性指数は最適な $\mu = 0.28$ を採用している。図には, K41 [1]

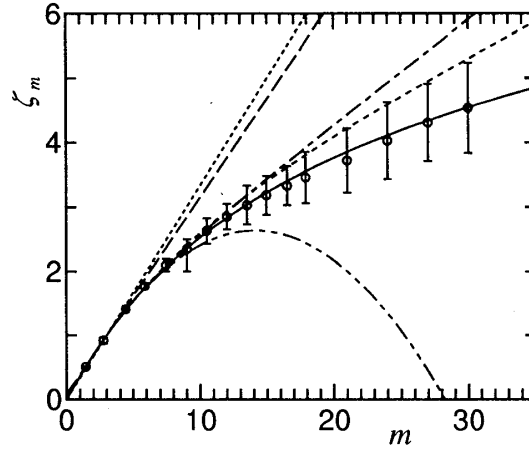


図 17: Comparison of the present scaling exponents ζ_m for $\mu = 0.238$ (solid curve) with the experimental results plotted by circles at $R_\lambda = 110$ ($Re = 32000$) [42], and with other theories with the same value of μ . K41 is given by the dotted line, β -model by the dashed line, p-model by the dotted dashed line, log-Poisson model by the short dashed curve, and log-normal by the two dotted dashed curve.

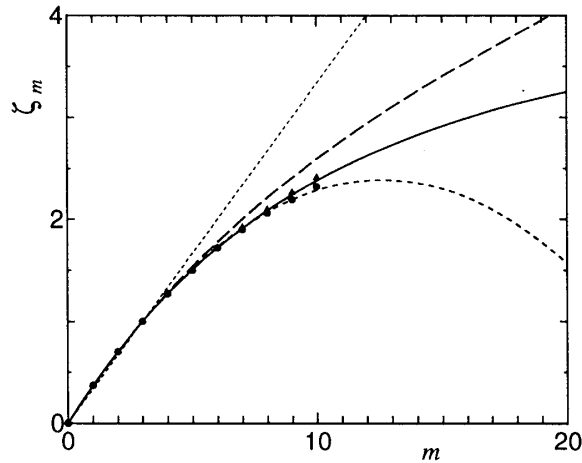


図 18: The scaling exponent ζ_m of the velocity structure function. The experimental results obtained by Lewis and Swinney [38] are shown by circles ($Re = 540\,000$) and by triangles ($Re = 69\,000$). The present theoretical result (5.28) is drawn by solid line for the intermittency exponent $\mu = 0.28$ taken from the experimental data. Dotted line represents K41, whereas dashed line log-Poisson model. The prediction of the log-normal model is given by short-dashed line with the best fit but inconsistent value $\mu = 0.27$ of the intermittency exponent following Lewis and Swinney.

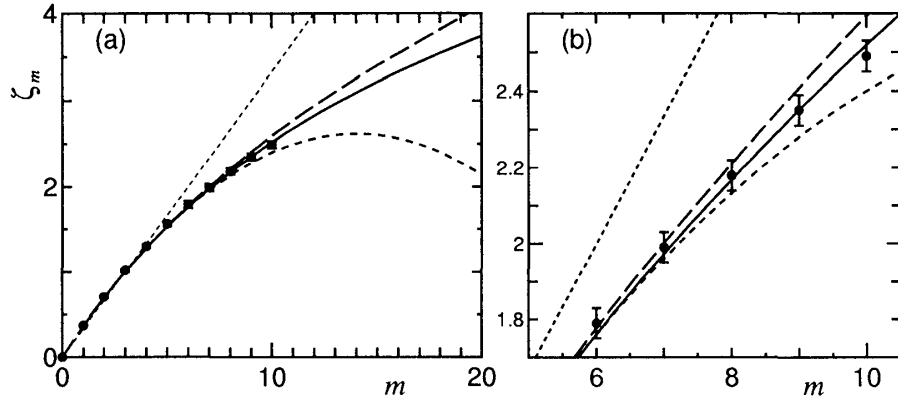


図 19: Scaling exponents ζ_m of the velocity structure function. The second figure (b) is a magnification of the first (a). The results of DNS ($R_\lambda = 381$) conducted by Gotoh et al. [41] are shown by closed circles. The present theoretical formula (5.28) for $\mu = 0.240$ is drawn by solid line. Dotted line represents the prediction of K41, dashed line of log-Poisson, and short-dashed line of the log-normal model for $\mu = 0.240$.

(点線), log-Poisson モデル [33, 34] (破線) の理論曲線も載せた。短破線は log-normal モデル [19, 20, 21] であるが, Swinney らの報告に従い $\mu = 0.27$ を採用してある。

図 19 では, 文献 [41] の後藤らの実験で得られた速度構造関数のスケーリング指数のデータと, 実線で示した理論表式 (5.28) との比較を行い, 間欠性指数は $\mu = 0.240$ であることを見出した。図には, K41 [1] (点線), log-Poisson モデル [33, 34] (破線), log-normal モデル [19, 20, 21] (短破線) の理論曲線も載せた。

6.2 確率密度関数

6.2.1 Swinney らの実験

図 20 は, Swinney ら [38] が $R_\lambda = 262$ において同心円柱間に発生させた Couette-Taylor 乱流で測定した速度揺らぎ PDF である。エネルギー注入スケール ℓ_{in} は, 実験装置の大きさ [38] により $\ell_{in} = 2\pi \times 19.00 \approx 119.32$ cm で与えられる。Kolmogorov スケールは $\eta \approx 0.006$ cm と報告されている。これより, Reynolds 数は $Re = 540\,000$ と見積もられる。

左右の PDF データ (左側の PDF データは白三角, 右側の PDF データは白四角) を平均したものが黒丸で示されている。マルチフラクタル解析で得られた速度揺らぎ PDF の理論曲線 (5.33), (5.37) は, 実線で示されている。実験データにおける距離 $r/\eta = \ell_n/\eta$ の値は, 上から下へ, 11.6, 23.1, 46.2, 92.5, 208, 399, 830, 1440 である。理論曲線におけるマルチフラクタル深度数 n は, 上から下へ, 14, 13, 11, 10, 9.0, 8.0, 7.5, 7.0 である。見易くするために, 各 PDF は縦軸に沿って -1 ずつずらした。なお, 間欠性指数には速度構造関数のスケーリング指数の解析で得られた $\mu = 0.28$ を採用し, それより必要なパラメータ $q = 0.471$, $\alpha_0 = 1.162$, $X = 0.334$ を求めた。

図 20 の解析により得られた, n の r/η 依存性を図 21 に載せた。その 8 点を最小二乗法で解析することにより, 実線で示した直線

$$n = -1.019 \times \log_2(r/\eta) + 0.901 \times \log_2 Re \quad (6.1)$$

が抽出された [9]。なお, 図中の破線は, 間欠性を考慮しない場合の n - r/η 依存性

$$n = -\log_2 r/\eta + (3/4) \log_2 Re. \quad (6.2)$$

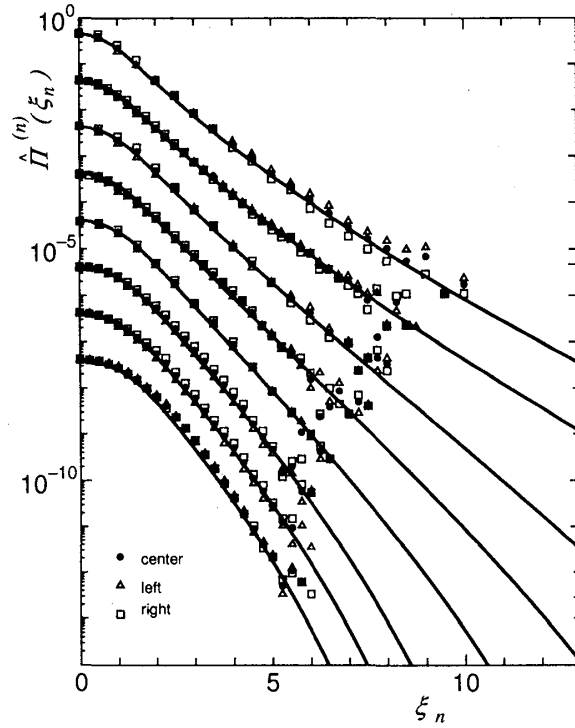


図 20: Experimentally measured PDF of the velocity fluctuations by Lewis and Swinney for $R_\lambda = 262$ ($Re = 540\,000$) are compared with the present theoretical results $\hat{\Pi}^{(n)}(\xi_n)$. Open triangles are the experimental data points on the left hand side of the PDF taken from Lewis and Swinney, whereas open squares are those on the right hand side. Closed circles are the symmetrized points obtained by taking averages of the left and the right hand experimental data. For the experimental data, the distances $r/\eta = \ell_n/\eta$ are, from top to bottom: 11.6, 23.1, 46.2, 92.5, 208, 399, 830 and 1440. Solid lines represent the curves given by the present theory with $q = 0.471$. For the theoretical curves, the number of steps in the cascade n are, from top to bottom: 14, 13, 11, 10, 9.0, 8.0, 7.5, 7.0. For better visibility, each PDF is shifted by -1 unit along the vertical axis.

である。(6.1) より, $\ell_0 \approx 877 \text{ cm}$ を得るが, これはエネルギー注入長 ℓ_{in} より大きな値である。マルチフラクタル深度数 n とエネルギー・カスケード・ステップ数 $\bar{n}$ は (4.6) で関連している。

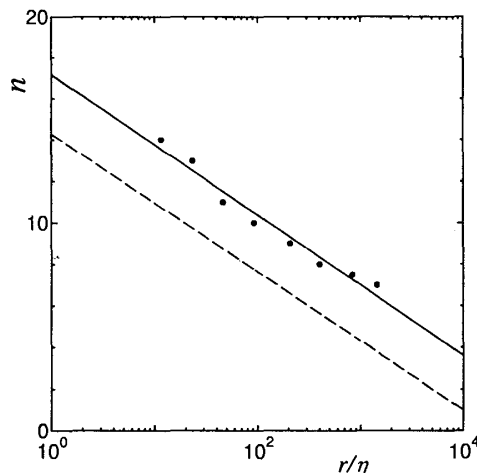


図 21: Dependence of n on r/η , extracted from 図 20, is given by circles, which can be fitted by solid line (6.1). The dashed line put for reference represents (6.2) which is derived in the absence of intermittency.

6.2.2 Bodenschatz らの実験

Bodenschatz らの実験 [39, 40] は, 乱流中に流し込んだ試験粒子の直接追跡により加速度を測定した画期的なものである。この実験は, マルティフラクタル解析の基礎を成している特異点の実空間分布を直接捕らえたものと解釈できる。なお, Bodenschatz らは, エネルギー注入スケール $\ell_{\text{in}} = 0.071 \text{ m}$, Kolmogorov スケール $\eta = 30.3 \mu\text{m}$ を公式 (4.1) に代入し, $\text{Re} = 31\,400$ としている。

図 22 に, Bodenschatz らが $R_\lambda = 690$ の実験で得た流体粒子加速度 PDF (白四角と白丸) と理論 PDF 曲線 (実線) を, 対数と線形の両スケールで載せた [14, 16]。ただし, 白四角は実験で得られた PDF 左半分のデータ, 白丸はその右半分のデータである。実験で得られた流体粒子加速度 PDF が, 左右対称であることが見て取れる。理論 PDF 曲線 (5.33), (5.37) を用いる際, マルティフラクタル深度は $n = 17.1$ とした。これは $n = \log_2(\ell_0/\ell_n)$ に実験値 $\ell_0 = \ell_{\text{in}}$ と, 測定における空間分解能 $\ell_n = 0.5 \mu\text{m}$ を代入して得たものである。理論的な解析により間欠性指数の値として $\mu = 0.240$ を抽出し, これより, 裾部分の決定に必要な他のパラメータの値が $q = 0.391$, $\alpha_0 = 1.14$, $X = 0.285$ と求められた。中心部を決めるのに必要なパラメータは $q' = 1.45$ である。

ところで, μ (あるいは, n) の値を抽出する際, 主に裾部分だけで決まり中心部の影響をほとんど受けない流体粒子加速度 PDF の尖度 (flatness) [14]

$$F_a^{(n)} \equiv \frac{\langle a_n^4 \rangle}{\langle a_n^2 \rangle^2} = \langle \omega_n^4 \rangle = \frac{2\tilde{\gamma}_4^{(n)} + (1 - 2\tilde{\gamma}_0^{(n)}) a_8 \delta_n^{\zeta_8}}{\left[2\tilde{\gamma}_2^{(n)} + (1 - 2\tilde{\gamma}_0^{(n)}) a_4 \delta_n^{\zeta_4}\right]^2} \quad (6.3)$$

$$\approx \frac{a_8}{(1 - 2\tilde{\gamma}_0^{(n)}) a_4^2} \delta_n^{\zeta_8 - 2\zeta_4}. \quad (6.4)$$

は, 有効な指標となる [43]。なお, 近似式 (6.4) を得るにあたり, (6.3) の最後の公式中の分母と分子にある

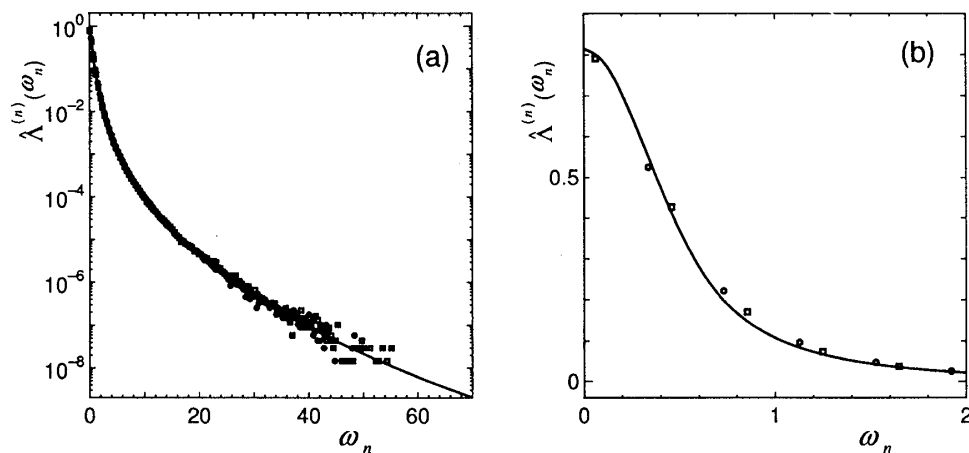


図 22: Comparison between the experimentally measured PDF of *fluid particle accelerations* by Bodenschatz et al. at $R_\lambda = 690$ ($\text{Re} = 31\,400$) and the present theoretical PDF $\hat{\lambda}^{(n)}(\omega_n)$ are plotted on (a) log and (b) linear scales. Open squares are the experimental data points on the left hand side of the PDF, whereas open circles are those on the right hand side. Solid lines represent the curves given by the present theory with $\mu = 0.240$ ($q = 0.391$), $(n, q') = (17.1, 1.45)$, $\omega_n^* = 0.605$ ($\alpha^* = 1.01$), and $\omega_n^{\max} = 2040$.

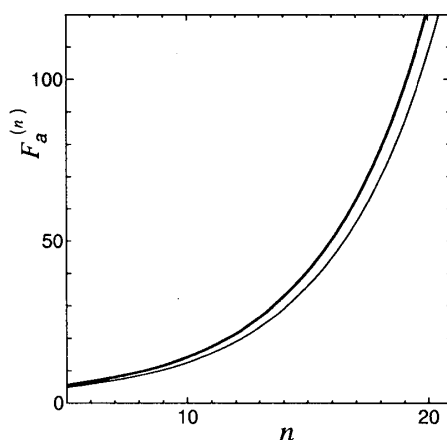


図 23: Dependence of the flatness on the multifractal step n . The thin and thick lines represent, respectively, the dependence for the parameters used in the study of the experiment by Bodenschatz et al. (図 22), and of the DNS by Gotoh et al. (図 27 below).

第1項が、第2項に比べて通常2桁から3桁数値が小さいことを用いた。Bodenschatz ら [39, 40] の実験における尖度は、 $F_a^{(n)} = 56.9$ となる。これは、文献 [39, 40] に報告されている値 $\sim 55 \pm 4$ と同程度である。

参考のため、図 23 に、尖度の n 依存性を載せておく。Bodenschatz らの実験解析に関わるパラメータでは、近似式 [14]

$$F_a^{(n)} = -6.872 + 5.216n - 9.969 \times 10^{-1}n^2 + 1.075 \times 10^{-1}n^3 - 5.296 \times 10^{-3}n^4 + 1.241 \times 10^{-4}n^5, \quad (6.5)$$

が得られた。図には、後藤らの DNS の解析に関わる場合の近似式 [14]

$$F_a^{(n)} = -7.592 + 5.831n - 1.114n^2 + 1.203 \times 10^{-1}n^3 - 5.925 \times 10^{-3}n^4 + 1.389 \times 10^{-4}n^5. \quad (6.6)$$

も載せてある。 μ の値が同一にも拘らず（以下の図 27 参照）両者の曲線に多少のずれがあるのは、 q' の値が異なるためである。

尖度に関連する量である加速度の 4 次モーメントの被積分関数 $\omega_n^4 \hat{\lambda}^{(n)}(\omega_n)$ を、図 24(a) に載せて置く [14]。

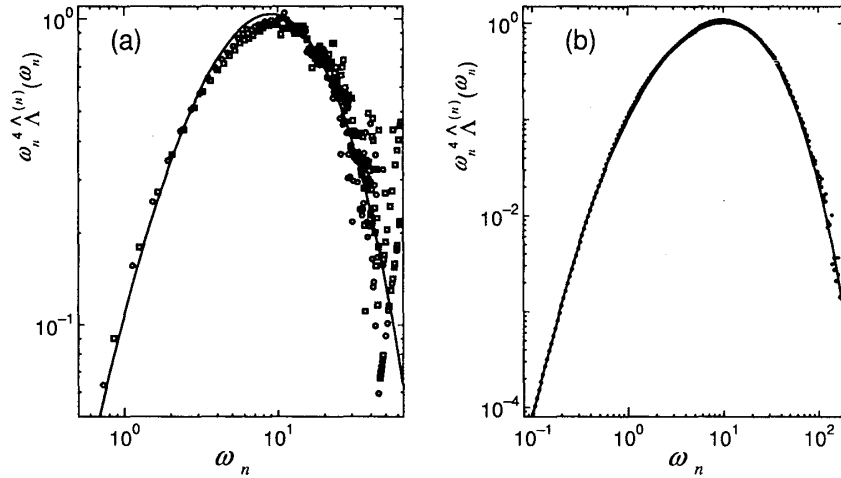


図 24: Comparison of the theoretical curves (solid lines) for the integrand $\omega_n^4 \hat{\lambda}^{(n)}(\omega_n)$ of the flatness $F_a^{(n)}$ with the corresponding (a) experimental quantity by Bodenschatz et al. (open squares for the data on the left hand side, and open circles on the right hand side), and (b) DNS quantity by Gotoh et al. (closed circles both for the data on the left and right hand) in loglog scale. The parameters in the theoretical PDF's for (a) and (b) are the same as those given in 図 22 and 図 27, respectively.

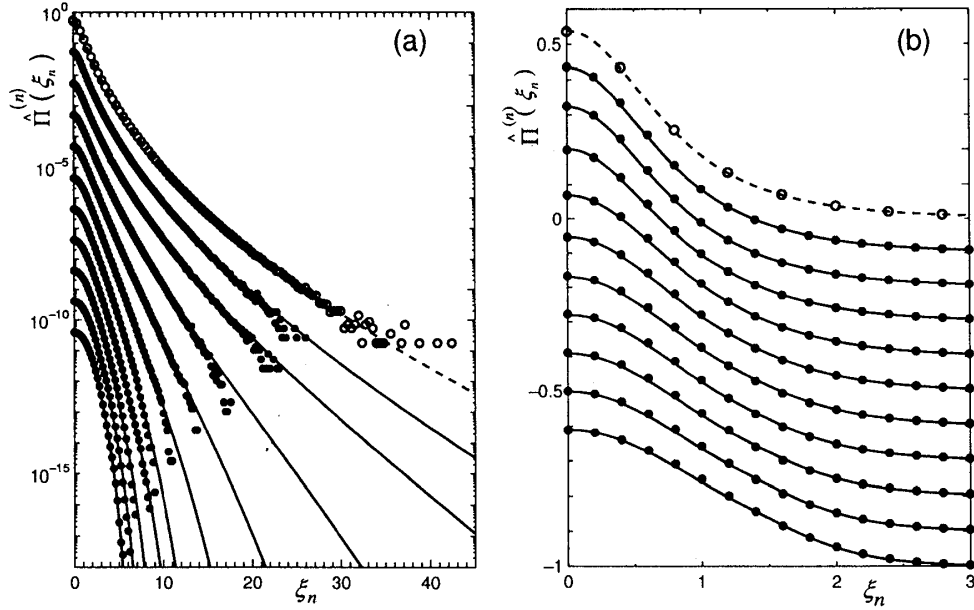


図 25: Analyses of the PDF's of *velocity fluctuations* (closed circles) and of *velocity derivatives* (open circles) measured in the DNS by Gotoh et al. at $R_\lambda = 380$ by the present theoretical PDF's $\hat{\Pi}^{(n)}(\xi_n)$ for *velocity fluctuations* (solid lines) and for *velocity derivatives* (dashed line) are plotted on (a) log and (b) linear scales. The DNS data points are symmetrized by taking averages of the left and the right hand sides data. The measuring distances, $r/\eta = \ell_n/\eta$, for the PDF of velocity fluctuations are, from the second top to bottom: 2.38, 4.76, 9.52, 19.0, 38.1, 76.2, 152, 305, 609, 1220. For the theoretical PDF's of velocity fluctuations, $\mu = 0.240$ ($q = 0.391$), from the second top to bottom: $(n, \bar{n}, q') = (20.7, 14.6, 1.60)$, $(19.2, 13.1, 1.60)$, $(16.2, 10.1, 1.58)$, $(13.6, 7.54, 1.50)$, $(11.5, 5.44, 1.45)$, $(9.80, 3.74, 1.40)$, $(9.00, 2.94, 1.35)$, $(7.90, 1.84, 1.30)$, $(7.00, 0.94, 1.25)$, $(6.10, 0.04, 1.20)$, $\xi_n^* = 1.10 \sim 1.43$ ($\alpha^* = 1.07$), and $\xi_n^{\max} = 204 \sim 6.63$. For the theoretical PDF of velocity derivatives, $(n, \bar{n}, q') = (22.4, 16.3, 1.55)$, $\xi_n^* = 1.06$ ($\alpha^* = 1.07$), and $\xi_n^{\max} = 302$. For better visibility, each PDF is shifted by -1 unit along the vertical axis.

6.2.3 後藤らの DNS

図 25 に、後藤ら [41] の DNS により $R_\lambda = 380$ で求められた速度揺らぎ PDF (黒丸) と速度導関数 PDF (白丸) を、対数と線形の両スケールで載せた [14, 16]。ただし、データ点は、PDF の左右を平均したものを記している。理論 PDF の表式 (5.33), (5.37) を用いる際、速度構造関数のスケーリング指数関数 ζ_m の測定結果を解析して得た値、 $\mu = 0.240$ を採用した。それより、 $q = 0.391$, $\alpha_0 = 1.14$, $X = 0.285$ が決まる。Kolmogorov スケールは、 $\eta \approx 0.258 \times 10^{-2}$ と報告されている [41]。この DNS におけるエネルギー注入スケールは、周期的境界条件を持つ格子における最長の長さ $\ell_{in}/\eta = \pi/\eta \approx 1220$ 程度と見積もるのが適切であろう [44]。実験データにおける距離 $r/\eta = \ell_n/\eta$ の値は、上から下へ、2.38, 4.76, 9.52, 19.0, 38.1, 76.2, 152, 305, 609, 1220 である [16]。速度揺らぎ PDF の理論曲線 (実線) に必要なパラメータは、上から下へ、 $(n, \bar{n}, q') = (20.7, 14.6, 1.60)$, $(19.2, 13.1, 1.60)$, $(16.2, 10.1, 1.58)$, $(13.6, 7.54, 1.50)$, $(11.5, 5.44, 1.45)$, $(9.80, 3.74, 1.40)$, $(9.00, 2.94, 1.35)$, $(7.90, 1.84, 1.30)$, $(7.00, 0.94, 1.25)$, $(6.10, 0.04, 1.20)$ である [16]。一方、速度導関数 PDF の理論曲線 (破線) に必要なパラメータは、 $(n, \bar{n}, q') = (22.4, 16.3, 1.55)$ である [16]。見易くするために、各 PDF は縦軸に沿って -1 ずつずらした。

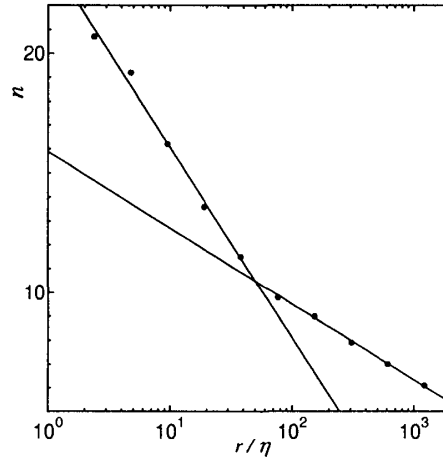


図 26: Dependence of n on r/η extracted from 図 25 for velocity fluctuations. The crossover occurs at $\ell_c^L/\eta = 48.26$.

速度揺らぎ PDF の解析より n の r/η 依存性：

$$\begin{aligned} n &= -0.989 \times \log_2(r/\eta) + 16.1 \quad (\text{for } \ell_c \leq r) \\ n &= -2.40 \times \log_2(r/\eta) + 24.0 \quad (\text{for } r < \ell_c) \end{aligned} \quad (6.7)$$

を抽出した (図 26) [16]。この結果から、慣性領域が、特徴的長さ $\ell_c/\eta = 48.7$ で分割される 2 つの領域に分けられることが分かる。この特徴的長さは、系の Taylor ミクロ長 $\lambda/\eta = 38.3$ に近い値である。表式 (6.7) 上は、各々の渦がカスケードステップ毎に 2 個に分かれるエネルギー・カスケード・モデルの描像と一致している。しかし、 $r < \ell_c$ に対応する式 (6.7) 下は、各渦がカスケード・ステップ毎に実質的には $\delta = 1.33 \approx 4/3$ 個に分かれることを表している [11]。これは、渦の構造の違いによるもので、DNS による渦の可視化により確認できる。実際、直径が Taylor ミクロ長 λ より大きい渦はどちらかと言えば丸みを帯びた形をしており、 λ より小さい渦は引き伸ばされた形となっていることが報告されている [45]。なお、(6.7) を (4.6) に代入すると DNS におけるエネルギー・カスケード・モデルのステップ数 $\bar{n}$ が求められる。(6.7) に $n = 0$ を代入して得られる長さ $\ell_0/\eta \approx 63\,000$ は、 ℓ_{in}/η より遥かに大きいスケールとなっている。

速度導関数 PDF [41] の解析から得られた $n = 22.4$ ($\bar{n} = 16.3$) に対応する長さ $r = \ell_n$ は、(6.7) を用いて $r/\eta = 1.61$ となる。この長さは、速度導関数を求めるために処理する DNS データのうちの実質的な最短の長さを見積もっていると考えられる。この長さが DNS 格子のメッシュの大きさ $\Delta r/\eta = 2\pi/(1024 \times \eta) \approx 2.38$ [41] と同程度であることは注目に値する。

図 27 に、同じ DNS で得られた流体粒子加速度 PDF [41] を対数と線形の両スケールで載せた [14, 16]。 $\mu = 0.240$ より、裾部分を決定するパラメータの値 $q = 0.391$, $\alpha_0 = 1.138$, $X = 0.285$ が得られる。尖度の解析より (図 23 および図 24(b) 参照), $n = 17.5$ ($\bar{n} = 11.4$) を得た。この値を (6.7) に代入すると、対応する特徴的長さ $r/\eta = 6.61$ [14] が得られる。この値は、DNS データを処理して加速度を抽出する際の実質的な最小分解能と解釈できるだろう。なお、後藤らのこの DNS での尖度は、 $F_a^{(n)} = 70.0$ である。

図 28 には、中心部 PDF の形状を決める q' の r/η 依存性を載せた [16]。速度揺らぎ PDF の解析で得られたデータは黒丸、速度導関数 PDF からのデータは白丸、流体粒子加速度 PDF からのものを白三角で示してある。これより、経験式

$$q' = -0.05 \times \log_2(r/\eta) + 1.71 \quad (6.8)$$

を抽出した [16]。この依存性は、各測定量の標準偏差より小さい物理量が従う何らかのダイナミクスが抽

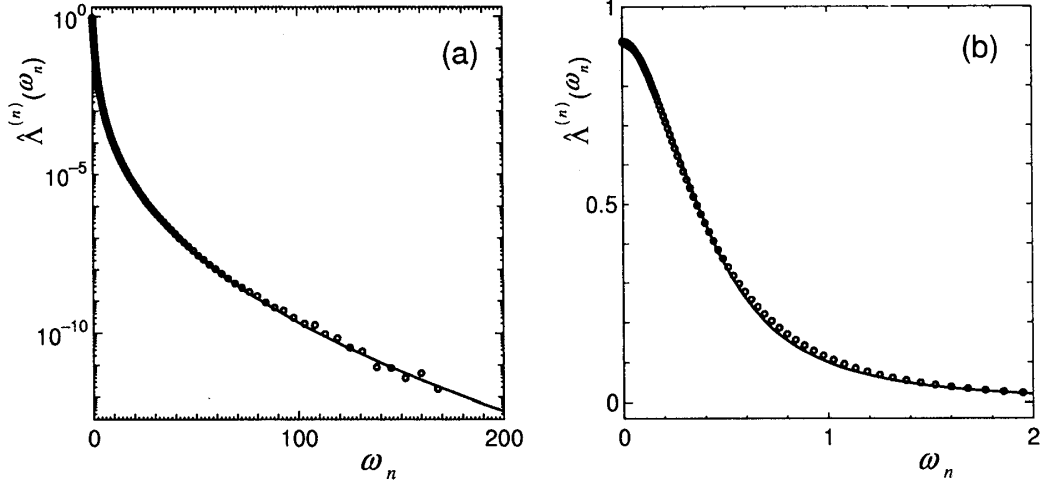


図 27: Comparison between the PDF of *fluid particle accelerations* measured in the DNS by Gotoh et al. at $R_\lambda = 380$ and the present theoretical PDF $\hat{\lambda}^{(n)}(\omega_n)$ are plotted on (a) log and (b) linear scales. Closed circles are the DNS data points both on the left and right hand sides of the PDF. Solid lines represent the curves given by the present theory with $\mu = 0.240$ ($q = 0.391$), $(n, \bar{n}, q') = (17.5, 11.4, 1.70)$, $\omega_n^* = 0.622$ ($\alpha^* = 1.01$), and $\omega_n^{\max} = 2530$.

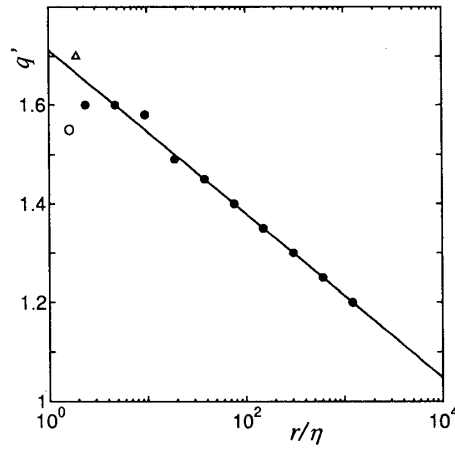


図 28: Dependence of q' on the distance r/η extracted from the analyses of the PDF's for velocity fluctuations (closed circles), for velocity derivatives (open circle) and for fluid particle accelerations (open triangle). The line represents $q' = -0.05 \log_2(r/\eta) + 1.71$.

出できることを予感させる。

7 まとめ

乱流実験で測定された各種の確率密度関数 (PDF) が、マルティフラクタル解析で得られた PDF の理論表式 (5.33), (5.37) により高精度で再現できることが分かった。その解析から乱流中の流れを司るメカニズムに 2 つの異なる要素が存在することが明らかになった。ひとつは PDF の裾部分を司るもの、もうひとつは PDF の中心部を司るものである。裾部分の形状は、乱流中の流れが呈する間欠性の原因となる大域的な構造の反映である。この構造は、特異性が実空間をマルティフラクタルに分布していることの現れである。ここで言う特異性とは、高 Reynolds 数で Navier-Stokes 方程式が持つ尺度変換不変性に起因するものを指している。PDF の特異な形状 (5.33) は、「実空間のある点で、尺度変換に現れる実パラメータ α を $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ の範囲に見つける確率がパラメータ q の Tsallis 型分布関数で与えられる」という仮定によるものである。観測量と α との関係は、尺度変換により知ることができる。パラメータ q は観測 2 点間の距離などには依存することのない量で、その値は系が与えられる（あるいは、間欠性指数が与えられる）と決まるものと考えられる。一方、中心部の形状は、尺度不変性を破る「ずれ」を反映したものである。この「ずれ」の原因は、流体中の散逸構造や測定誤差などに起因するものと考えられる。中心部 PDF の形状に関しては、「観測量そのものを変数とした、パラメータ q' の Tsallis 型分布関数で与えられる」と仮定した。このパラメータ q' は流れ場の局所的な構造で決定されるとものと予想され、その値は観測 2 点間の距離によって異なるであろう。ここで言う流れ場の局所的な構造とは、乱流中の渦自身のうねりや振動、渦間の相互作用などを指している。以上の点は、マルティフラクタル解析による結果を振り返ってみると、より鮮明になる。まず、熱揺らぎや測定誤差の PDF への寄与は、領域 $\xi_n \leq \xi_n^*$ に限られることが分かる。速度揺らぎ PDF の場合、Lweis と Swinney の実験 [38] では $\xi_n^* = 1.10 \sim 1.32$ ($\alpha^* = 1.08$)、後藤らのもの [41] では $\xi_n^* = 1.10 \sim 1.43$ ($\alpha^* = 1.07$) である。後藤らの速度導関数 PDF [41] では $\xi_n^* = 1.06$ ($\alpha^* = 1.07$) である。Bodenschatz らの流体粒子加速度 [39, 40] の場合 $\xi_n^* = 0.605$ ($\alpha^* = 1.01$) であり、後藤らの流体粒子加速度 [41] に対しては $\xi_n^* = 0.622$ ($\alpha^* = 1.01$) である。Re $\gg 1$ における Navier-Stokes 方程式のスケール不変性に起因する特異性指数 α をマルティフラクタル分布すると仮定したことが、間欠性に関わる大偏差 $\xi_n \geq \xi_n^*$ に現れている。いずれにしても、 q によりコントロールされる PDF の裾部分と q' によりコントロールされる中心部を司る異なるダイナミックスを見出すことは、興味深い今後の問題である。

エネルギー注入スケール ℓ_{in} と「系の大きさ」 ℓ_0 を現時点でのマルティフラクタル解析に組み込む余地はない。前者はエネルギー・カスケード・モデルにおけるステップ数 $\bar{n}$ を決めるのに必要である。実験装置の構造から ℓ_{in} が与えられさえすれば、 $\bar{n}$ とマルティフラクタルステップ n との関係は (4.6) で決まる。マルティフラクタル解析の主な部分はスケール不変性に基づいており、したがって考えている系の大きさを無限であると仮定していることに相当する。その意味で、「系の大きさ」 ℓ_0 は物理的意味を持たないと考えられる。実際、Lewis と Swinney の実験による速度揺らぎ PDF を解析して導かれた表式 (6.1) より $\ell_0 \approx 877$ cm が得られる。この値は実験装置の最大の大きさサイズ $\ell_{in} \approx 119.32$ cm と比べ大きい。後藤らの DNS による速度揺らぎ PDF に対して、実験式 (6.7) 上から $\ell_0/\eta \approx 63000$ が得られる。これは DNS 格子の最大の大きさ $\ell_{in}/\eta \approx 1220$ よりもかなり大きい。他方、Bodenschatz の実験の解析では、 ℓ_0 として積分長 7.1 cm を用いて得られているが、これは $\ell_0 = \ell_{in}$ を意味する。一方、マルティフラクタル解析により得られる PDF は、測定される 2 点間距離や、測定の空間分解能、DNS のメッシュ・サイズといった n が大きい方の特徴的長さに敏感である。特に、後者の 2 つの量は、マルティフラクタル解析で正しく再現できるようである。実験装置の特徴的長さの情報をマルティフラクタル解析にどのように組み込むかは、今後の重要な問題のひとつである。エネルギー注入項を含む Navier-Stokes 方程式から議論をはじめ、マルティフラクタル解析の背景となるダイナミックスの理論的基盤が明らかになった暁には、このことも判明するであろう。

マルティフラクタル解析の成功により乱流の統計的側面が高精度で調べられるようになったので、特異性

の原因やそれがマルチフラクタル分布する理由を探る糸口ができたと言えよう。そのための最も有力な系は、超流動 ^4He や超流動 ^3He 中に発生する渦糸タングル (vortex tangle) であろう。渦糸タングルの渦度は量子化されており、超低温下では (2 流体モデルの意味での) 超流動成分と常流動成分の相互作用が無視できるからである [46]。もし、乱流の特異性の原因が渦の内部核にあるとすると、乱流のマルチフラクタル性は通常流体乱流中の渦が有する渦度の分布と関連していると考えても良からう。この場合、渦糸タングルにおける特異性の分布はユニフラクタル (uni-fractal) となり、間欠性が観測されないことになる。一方、もし、特異性の原因が渦の再結合にあるとすると、乱流のマルチフラクタル性は渦の再結合点の実空間中の分布が関与していると考えられよう。この場合は、渦糸タングルにおける特異性の分布もマルチフラクタルとなり、間欠性を呈するであろう。すでに、 $T \sim 70 \text{ mK}$ 以下の温度で、超流動 ^4He 中の渦が温度に依存しない奇妙な緩和をすることが報告されている [47]。さらに、渦糸モデルでの、摩擦のない超流動 ^4He 中タングルのシミュレーションで、 $K41$ エネルギー・スペクトルが観測されている [48]。マルチフラクタル解析で現れたパラメータ q' に関連するタングルの局所的ダイナミックスの解析が進めば、超流動成分と常流動成分の間に働く相互摩擦 (mutual friction) の原因を探る手掛かりも得られるのではないかと期待できる。

2 乗と 4 乗項を持つ 2 次元的なポテンシャル中を高速回転している Bose-Einstein 凝縮相のシミュレーションで、円形の渦格子構造が見出されている [49]。この配置でタングルが発生する可能性を探るのも興味深い問題である。もし実現するのであれば、通常流体での Taylor-Couette 乱流の量子版ということになるだろう。

渦糸タングルは、quLSI (quantum LSI) が実現した暁には重要な定常状態の相となるであろう。quLSI は、例えば、膨大な数の磁束 qubit の超伝導ループ [50] から構成されることになるだろう。量子コンピュータの稼動中にはそのループを流れる電流の向きが高速で変化するため、磁束 qubit の寄せ集めが量子化された磁束のタングル相を生み出すと考えられるからである。タングル相の出現が、果たして量子絡み合い状態 (quantum entangled state) を維持するのに有利であるのか否かを調べるのも、今後の興味深い問題である。

マルチフラクタル解析の予備的な応用をいくつか述べて、この講義ノートを締め括りとしたい。大規模生物圏環境 (Large Scale Biosphere-Atmosphere; LBA) 実験がアマゾン熱帯雨林で行われている。その一環として、雨季の林冠 (canopy) 上下での乱流が気象や生態系へ与える影響を探るために速度揺らぎ PDF が観測された [51, 52]。その PDF をマルチフラクタル解析で得られた PDF にて吟味することが始められている (図 29 および図 30 参照)。経済物理学 (econophysics) における株価変動時系列 $Y(t)$ の解析で得られた価格変動 $Z(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$ に対する定常 PDF $P(Z)$ の、マルチフラクタル解析による予備的な調査も進めている。図 31 には、 $Z(t)$ を $\Delta t = 1$ 分として解析した定常 PDF $P(Z)$ を、ボラティリティー (標準偏差) σ で規格化した変数 Z/σ の関数として記してある [53]。黒丸は Standard & Poor's 500 (S&P 500) 指数から抽出された価格変動の PDF、実線はマルチフラクタル解析で得られた速度揺らぎ PDF (パラメータは、 $\mu = 0.28$, $q = 0.47$, $n = 42$, $q' = 1.7$)、破線は Lévy 安定分布、点線は Gauss 分布である。大偏差統計 [54] とマルチフラクタル解析との関連を調べることも、今後の興味深い重要な問題である。

この講義で触れなかった乱流に関する話題は、例えば、日本人による参考書 [56]-[62] 等を参照されることをお勧めする。

謝辞

この場をお借りして、共同研究者の有光直子博士に謝意を表したい。

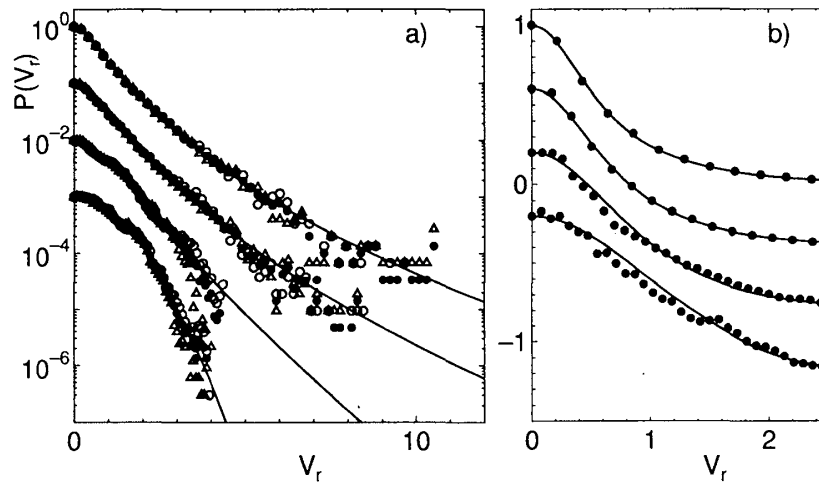


図 29: PDF's of velocity fluctuations of canopy turbulence measured by Ramos et al. above an Amazon forest at the height 66 m of micrometeorological tower are analyzed, preliminarily, with the present theoretical PDF's $\hat{\Pi}^{(n)}(\xi_n)$ (solid lines), and are plotted on (a) log and (b) linear scales. The observed data points are symmetrized (closed circle) by taking averages of the left (open triangle) and the right (open circle) hand sides data. The measuring distances, $r = \ell_n$, for the PDF of velocity fluctuations are, from top to bottom: 0.0101, 0.101, 1.01, 10.1 m. For the theoretical PDF's of velocity fluctuations, $\mu = 0.28$ ($q = 0.47$), from top to bottom: $(n, q') = (24.0, 1.80), (20.0, 1.70), (13.0, 1.50), (6.0, 1.20)$. For better visibility, each PDF is shifted by -1 unit along the vertical axis.

A 一般化されたエントロピーに基づく解析

マルチフラクタル深度の各ステップは互いに独立であると仮定して, n 番目の深度における分布関数

$$P^{(n)}(\alpha) \propto [P^{(1)}(\alpha)]^n \quad (\text{A.1})$$

を導出する。 $P^{(1)}(\alpha)$ を決定するにあたって, 確率の保存:

$$\int d\alpha P(\alpha) = 1 \quad (\text{A.2})$$

と「 q 分散」 σ_q^2 を一定とする条件:

$$\sigma_q^2 = \langle (\alpha - \alpha_0)^2 \rangle_q = \frac{\int d\alpha P(\alpha)^q (\alpha - \alpha_0)^2}{\int d\alpha P(\alpha)^q} \quad (\text{A.3})$$

の2つの制限の下に, 一般化されたエントロピー (Rényi エントロピー [17] あるいは Tsallis-Havrda-Charvat (THC) エントロピー [18, 2]) の極大をとる。なお, $q \rightarrow 1$ では, 一般化されたエントロピーは Boltzmann-Gibbs エントロピーになる。

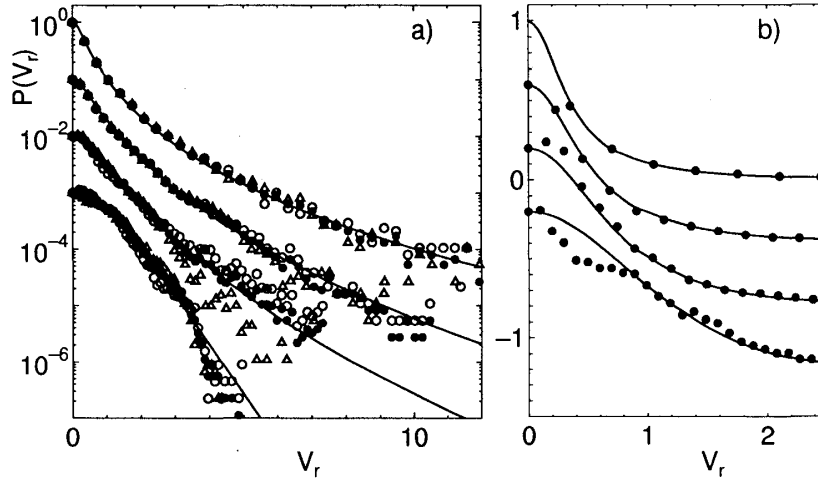


図 30: PDF's of velocity fluctuations of canopy turbulence measured by Ramos et al. within an Amazon forest at the height 21 m of micrometeorological tower are analyzed, preliminarily, with the present theoretical PDF's $\hat{\Pi}^{(n)}(\xi_n)$ (solid lines), and are plotted on (a) log and (b) linear scales. The observed data points are symmetrized (closed circle) by taking averages of the left (open triangle) and the right (open circle) hand sides data. The measuring distances, $r = \ell_n$, for the PDF of velocity fluctuations are, from top to bottom: 0.0065, 0.065, 0.65, 6.5 m. For the theoretical PDF's of velocity fluctuations, $\mu = 0.17$ ($q = 0.19$), from top to bottom: $(n, q') = (75.0, 1.95)$, $(45.0, 1.90)$, $(35.0, 1.60)$, $(15.0, 1.30)$. For better visibility, each PDF is shifted by -1 unit along the vertical axis.

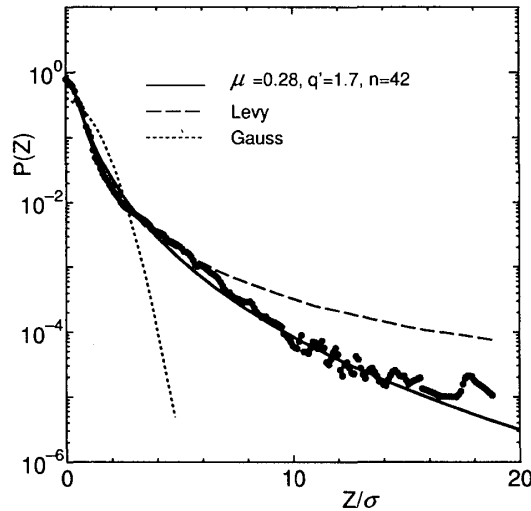


図 31: Analysis of the PDF $P(Z)$ of index changes extracted from S&P 500 (closed circle) by the PDF $\hat{\Pi}^{(n)}(\xi_n)$ for velocity fluctuations (solid line) derived by multifractal analysis with the parameters $\mu = 0.28, q = 0.47, n = 42$ and $q' = 1.7$. The index change Z is scaled by the volatility σ . The original data points are symmetrized by taking averages of the left and the right hand sides data. The Lévy stable distribution (dashed line) and the Gaussian distribution (dotted line) are also shown as references.

A.1 Rényi エントロピー

(A.2) と (A.3) の条件の下で, Rényi エントロピー [17]:

$$S_q^R[P(\alpha)] = (1-q)^{-1} \ln \int d\alpha P(\alpha)^q \quad (\text{A.4})$$

の極大を取ると, 確率密度関数

$$P_T^{(1)}(\alpha)d\alpha = \bar{Z}_q^{-1} [1 - (1-q)\bar{\beta}((\alpha - \alpha_0)^2 - \sigma_q^2)]^{1/(1-q)} d\alpha \quad (\text{A.5})$$

$$= Z_q^{-1} [1 - (1-q)\beta((\alpha - \alpha_0)^2)]^{1/(1-q)} d\alpha \quad (\text{A.6})$$

が得られる。 $\bar{Z}_q$ と Z_q は分配関数である。また, $\bar{\beta}$ は Lagrange 定数, $\beta = \bar{\beta}[1 + (1-q)\bar{\beta}\sigma_q^2]^{-2}$ である。ここで

$$\int d\alpha [P_T^{(1)}(\alpha)]^q = \bar{Z}_q^{1-q} \quad (\text{A.7})$$

と $Z_q^{1-q} = \bar{Z}_q^{1-q}[1 + (1-q)\bar{\beta}\sigma_q^2]^{-1}$ を用いると, $\beta/Z_q^{1-q} = \bar{\beta}/\bar{Z}_q^{1-q}$ の関係が得られる。確率密度関数 (5.11) は, $2X/\ln 2 = 1/\beta$ と置くことにより与えられる。この定常分布のとき $\sigma_q^2 = 2X/[(3-q)\ln 2]$ となる。

以上より, Rényi エントロピーは

$$S_q^R = \ln \bar{Z}_q \quad (\text{A.8})$$

となり, Lagrange 定数 $\bar{\beta}$ は

$$\partial S_q^R / \partial \sigma_q^2 = \bar{\beta} \quad (\text{A.9})$$

により与えられる。これより, (A.8) は, Boltzmann の関係の一種であるといえる。ただし, $\bar{Z}_q$ を配位数と考えている。また, (A.9) は, ミクロカノニカル・アンサンブルの枠内で, 温度の定義であると言える。

$\hat{Z}_q = \bar{Z}_q e^{-\bar{\beta}\sigma_q^2}$ を用いて $F_q^R = -(\ln \hat{Z}_q)/\bar{\beta}$ とすると, $F_q^R = \sigma_q^2 - \bar{\beta}^{-1} S_q^R$ の関係が得られる。ただし, $\sigma_q^2 = \partial(\bar{\beta} F_q^R)/\partial \bar{\beta}$, $S_q^R = -\partial F_q^R/\partial \bar{\beta}^{-1}$ である。これらの関係より, 通常の熱力学と同様の Legendre 変換が得られる。 $q \rightarrow 1$ の極限で, これらの関係は Boltzmann-Gibbs 統計や熱力学のものと一致する。

A.2 THC エントロピー

(A.2) と (A.3) の制限の下に, Tsallis-Havrda-Charvat (THC) エントロピー [18, 2]:

$$S_q^{\text{HCT}}[P(\alpha)] = (1-q)^{-1} \left(\int d\alpha P(\alpha)^q - 1 \right) \quad (\text{A.10})$$

の極大を取ると, 分布関数

$$P_T^{(1)}(\alpha)d\alpha = \bar{Z}_q^{-1} \left[1 - (1-q)\bar{\beta} \frac{(\alpha - \alpha_0)^2 - \sigma_q^2}{\bar{Z}_q^{1-q}} \right]^{1/(1-q)} d\alpha \quad (\text{A.11})$$

$$= Z_q^{-1} \left[1 - (1-q)\beta \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{Z_q^{1-q}} \right]^{1/(1-q)} d\alpha \quad (\text{A.12})$$

が得られる。ただし, $\bar{Z}_q$ と Z_q は分配関数である。また, $\bar{\beta}$ は Lagrange 定数であり, $\beta = \bar{\beta}[1 + (1-q)\bar{\beta}\sigma_q^2/\bar{Z}_q^{1-q}]^{-2}$ である。ここで

$$\int d\alpha [P_T^{(1)}(\alpha)]^q = \bar{Z}_q^{1-q} \quad (\text{A.13})$$

と $Z_q^{1-q} = \bar{Z}_q^{1-q}[1+(1-q)\bar{\beta}\sigma_q^2/\bar{Z}_q^{1-q}]^{-1}$ を用いると, $\beta/Z_q^{2(1-q)} = \bar{\beta}/\bar{Z}_q^{2(1-q)}$ の関係が得られる。 $2X/\ln 2 = Z_q^{1-q}/\beta$ とおくと, 分布関数 (5.11) が得られる。この定常分布のとき $\sigma_q^2 = 2X/[(3-q)\ln 2]$ となる。

THC エントロピーは

$$S_q^{\text{HCT}} = (\bar{Z}_q^{1-q} - 1)/(1-q) \quad (\text{A.14})$$

となり, Lagrange 定数 $\bar{\beta}$ は $\partial S_q^{\text{HCT}}/\partial \sigma_q^2 = \bar{\beta}$ により与えられる。関係

$$\bar{Z}_q^{1-q} = \bar{Z}_q^{1-q} - (1-q)\bar{\beta}\sigma_q^2 = Z_q^{1-q} \frac{[1 - 2(1-q)\beta\sigma_q^2/Z_q^{1-q}]}{[1 - (1-q)\beta\sigma_q^2/Z_q^{1-q}]^2} \quad (\text{A.15})$$

を用いて, $F_q^{\text{HCT}} = -(\bar{Z}_q^{1-q} - 1)/\bar{\beta}(1-q)$ とすると, $F_q^{\text{HCT}} = \sigma_q^2 - \bar{\beta}^{-1}S_q^{\text{HCT}}$ の関係が得られる。ただし, $\sigma_q^2 = \partial(\bar{\beta}F_q^{\text{HCT}})/\partial \bar{\beta}$, $S_q^{\text{HCT}} = -\partial F_q^{\text{HCT}}/\partial \bar{\beta}^{-1}$ である。これらの関係より, 通常の熱力学と同様の Legendre 変換が得られる。 $q \rightarrow 1$ の極限で, これらの関係は, Boltzmann-Gibbs 統計や熱力学のものと一致する。

B マルティフラクタル性とエントロピー指数

渦を, それと同じ大きさの「クラスター」とみなそう。サイズの同じクラスターは, それを構成する「粒子数密度」に応じて, α で特徴付けられるグループに分類される [4]。パラメータ α は, 尺度変換 (2.13) で導入された指数である。カスケードの現れる領域では, その尺度変換に対して系の基礎方程式は不変である。クラスターを構成する全「粒子数」 B_n は,

$$B_n = \delta_n^{-1} \int d\alpha P(\alpha) B_n(\alpha) \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。係数 δ_n^{-1} はサイズ ℓ_0 の領域におけるサイズ ℓ_n の箱の数である。 $B_n(\alpha) = \delta_n^\alpha B_n$ は α クラスターに含まれる「粒子数」であり, $P(\alpha)$ はここでの議論にふさわしい分布関数を表す。(B.1) は $\tau(1) = 0$ と同等である。

$B_n(\alpha) = (\ell_n/\ell_n(\alpha))^\alpha$ により α クラスター中の「粒子」間平均距離 $\ell_n(\alpha)$ を導入すると,

$$\frac{1}{B_n} = \left(\frac{\ell_n(\alpha)}{\ell_0} \right)^\alpha \quad (\text{B.2})$$

が得られる。これは $\ell_n(\alpha)^\alpha$ の大きさの箱にそれぞれ 1 個の「粒子」が含まれていることを示している。さらに, $f(\alpha) = 0$ の解 $\alpha_\pm$ ($\alpha_- < \alpha_+$) を用いると, 平均距離の最大値 $\ell_n(\alpha_-)$ と最小値 $\ell_n(\alpha_+)$ との関係

$$\frac{\ell_n(\alpha_+)}{\ell_n(\alpha_-)} = B_n^{1/\alpha_- - 1/\alpha_+} \quad (\text{B.3})$$

が得られる。

他方, α は B_n に依らないと仮定すると, (B.2) の B_n に関する微分から

$$\frac{d}{dB_n} \left(\frac{\ell_0}{\ell_n(\alpha)} \right) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\ell_0}{\ell_n(\alpha)} \right)^{1-\alpha} \quad (\text{B.4})$$

が得られる。全粒子数 B_n の増分をその連続極限をとって時間の増分とみなすと, (B.4) は平均距離 $\ell_n(\alpha)$ の「時間発展」を記述する式とみなせる。これは系の背景をなすダイナミックスを反映した式のはずであるから, 「2点に関する $\ell_0/\ell_n(\alpha)$ の「時間」依存性は, α で色分けされた如何なるクラスターにおいても共

通である」と仮定するのが妥当であろう。この仮定の下に、 $\ell_0/\ell_n(\alpha) = \ell_0/\ell(B_n)$, $\alpha = 1 - q$ とおくと「時間」発展方程式 (B.4) は

$$\frac{d}{dB_n} \left(\frac{\ell_0}{\ell(B_n)} \right) = \frac{1}{1-q} \left(\frac{\ell_0}{\ell(B_n)} \right)^q \quad (\text{B.5})$$

となる。この式の解は、 $\Delta B = B_- - B_+ \gg 1$ に対して

$$\frac{\ell(B_+)}{\ell(B_-)} = \left[1 + \left(\frac{\ell(B_+)}{\ell_0} \right)^{1-q} \Delta B \right]^{1/(1-q)} \sim \frac{\ell(B_+)}{\ell_0} \Delta B^{1/(1-q)} \quad (\text{B.6})$$

を与える。

ある「時刻」 B_n における距離の比 (B.3) を、異なる時刻 $B_{\pm}$ 間の距離の比 (B.6) と同一視すると、スケーリング関係 (5.21) が得られる。ただし、 $\ell(B_+) \sim \ell_0$ を考慮に入れた。ここで、 $f(\alpha_{\pm}) = 0$ であることを改めて述べておく。このスケーリング関係は混合性の現れである。(5.21) が文献 [37, 36] で導入されているスケーリング関係の一般化であることに注意されたい。今の場合、マルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ は負となる場合も含んでいる [35]。

粒子数密度が同一のクラスターは、それに特有なフラクタル次元 $f(\alpha)$ で空間を占めている。 α で色分けされているすべてのクラスター（あるいは渦）の集まりを対象とするので、系はマルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ で記述されるマルチフラクタル構造を呈すると考えられる。

C log-normal モデル再考

C.1 p モデルとの関係

p モデルにおいて、(4.37) に現れる $f(\alpha)$ を $(\alpha - \alpha_0)$ の 2 次まで、したがって、 $f(\xi) = f(\alpha(\xi))$ を

$$f(\xi) = D_0 + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\sigma_n^2} \quad (\text{C.1})$$

で近似すると、

$$P_G^{(n)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_n^2}} \exp \left[-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\sigma_n^2} \right], \quad (\text{C.2})$$

$$\sigma_n^2 = -\mu \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^{-2} = -n^{-1} \left(\ln \frac{p}{1-p} \right)^{-2} \ln[4p(1-p)] \quad (\text{C.3})$$

となり、log-normal モデル [19, 20, 21] を再現することが分かる [27]。ただし、(C.3) は、 σ_n を $\xi = \xi_1 = p$ にて特定して得られる。なお、この点は

$$\left. \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = 1, \quad \alpha_1 = \alpha(\xi_1), \quad (\text{C.4})$$

$f(\xi_1) = \alpha_1 = D_{\bar{q}=1}$ を満たす点である。また、(4.17) に現れる $\bar{\alpha}$ が、 $\bar{\alpha} = \alpha_0 = -\log_2 \sqrt{p(1-p)}$ を満たしていることも分かる。

図 32 に $p = 0.694$ の場合の $P_G^{(n)}(\xi)$ を描いた [4]。 $P_B^{(n)}(\xi)$ は、二項式乗法過程における分布関数 (3.64) である。図中の $P_T^{(n)}(\xi)$ は、Tsallis 分布関数

$$P_T^{(n)}(\xi) = Z_{n,T}^{-1} \left[1 - \left(\frac{1-q}{n} \right) \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\sigma_n^2} \right]^{n/(1-q)}, \quad (\text{C.5})$$

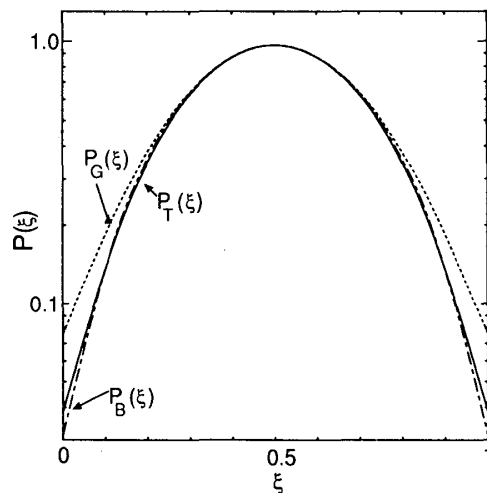


図 32: The probability density functions of the dissipation of turbulent kinetic energy as a function of the dimensionless quantity ξ , i.e. the label of eddies, for $n = 5$. $P_B(\xi) \equiv P_B^{(n)}(\xi)$ is the one based on the binomial multiplicative process, $P_T(\xi) \equiv P_T^{(n)}(\xi)$ on Tsallis statistics, and $P_G(\xi) \equiv P_G^{(n)}(\xi)$ on the Gaussian approximation. They are normalized by the peak height, and have, respectively, the smallest, middle and the largest values at the origin ($\xi = 0$). Parameters are $q = 0.237$ and $p = 0.694$. $P_B(\xi)$ and $P_T(\xi)$ intersect each other near $\xi = 0.05$ and $\xi = 0.95$.

である。 q の値は

$$q = 1 - \frac{1 + \mu + \log_2(1 + (1 - 2^{-\mu})^{1/2}) \cdot \log_2(1 - (1 - 2^{-\mu})^{1/2})}{\log_2(1 + (1 - 2^{-\mu})^{1/2}) - \log_2(1 - (1 - 2^{-\mu})^{1/2})}. \quad (C.6)$$

により、間欠性指数と関連づけられている [4]。(C.6) と

$$\mu = -2 \frac{dD_{\bar{q}}}{d\bar{q}} \Big|_{\bar{q}=0} = 2(\alpha_0 - D_0) = -\log_2[p(1-p)] - 2 \quad (C.7)$$

に観測値 $\mu = 0.235$ [27, 55] を代入して得た値が $q = 0.237$ と $p = 0.694$ である。

C.2 マルティフラクタル解析との関係

「確率の保存」(A.2) と「分散:

$$\sigma_{BG}^2 = \langle (\alpha - \alpha_0)^2 \rangle = \int d\alpha P(\alpha) (\alpha - \alpha_0)^2 \quad (C.8)$$

を一定にする」という 2 つの条件の下で、Boltzmann-Gibbs エントロピー

$$S_{BG}[P(\alpha)] = - \int d\alpha P(\alpha) \ln P(\alpha) \quad (C.9)$$

の極大を取ると、Boltzmann-Gibbs 型の分布関数

$$P_{BG}(\alpha) = \frac{1}{2\pi\sigma_{BG}^2} \exp \left[-\frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2\sigma_{BG}^2} \right] \quad (C.10)$$

が得られる。(5.13) より対応するマルチフラクタル・スペクトルは,

$$f_{\text{BG}}(\alpha) = 1 + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2\sigma_{\text{BG}}^2 \ln \delta_n} \quad (\text{C.11})$$

となる。パラメータは $\alpha_0 = \langle \alpha \rangle_{\text{BG}} = 1 + \mu/2$, $\sigma_{\text{BG}}^2 = -\mu/\ln \delta_n$ で与えられ,

$$f_{\text{BG}}(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2\mu} \quad (\text{C.12})$$

となる。これは文献 [27] に与えられているものと同じ表式である。

参考文献

- [1] A.N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 301-305 (1941). Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **31**, 538-540 (1941).
- [2] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *J. Stat. Phys.* **52**, 479-487 (1988).
- [3] C. Tsallis, Nonextensive statistics: Theoretical, experimental and computational evidences and connections, *Braz. J. Phys.* **29**, 1-35 (1999); On the related recent progresses see at <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>.
- [4] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Analysis of Fully Developed Turbulence in terms of Tsallis Statistics, *Phys. Rev. E* **61**, 3237-3240 (2000).
- [5] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Tsallis statistics and fully developed turbulence, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, L235-L241 (2000) [CORRIGENDUM: **34**, 673-674 (2001)].
- [6] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Tsallis statistics and turbulence, *Chaos, Solitons and Fractals* **13**, 479-489 (2002).
- [7] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Analysis of fully developed turbulence by a generalized statistics, *Prog. Theor. Phys.* **105**, 355-360 (2001).
- [8] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Analysis of turbulence by statistics based on generalized entropies, *Physica A* **295**, 177-194 (2001).
- [9] N. Arimitsu and T. Arimitsu, Multifractal analysis of turbulence by using statistics based on non-extensive Tsallis' or extensive Rényi's entropy, *J. Korean Phys. Soc.* **40**, 1032-1036 (2002).
- [10] T. Arimitsu and N. Arimitsu, PDF of velocity fluctuation in turbulence by a statistics based on generalized entropy, *Physica A* **305**, 218-226 (2002).
- [11] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Analysis of velocity fluctuation in turbulence based on generalized statistics, *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, 2237-2246 (2002).
- [12] N. Arimitsu and T. Arimitsu, Analysis of velocity derivatives in turbulence based on generalized statistics, *Europhys. Lett.* **60**, 60-65 (2002).

- [13] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Analysis of accelerations in turbulence based on generalized statistics, *Condensed Matt. Physics* (2003) in press [cond-mat/0203240 (2002)].
- [14] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Multifractal analysis of fluid particle accelerations in turbulence, cond-mat/0210274 (2002).
- [15] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Multifractal analysis of various probability density functions in turbulence, cond-mat/0301516 (2003).
- [16] T. Arimitsu and N. Arimitsu, Multifractal analysis of various PDF in turbulence based on generalized statistics: A way to tangles in superfluid He, cond-mat/0306042 (2003).
- [17] A. Rényi, On measures of entropy and information, *Proc. 4th Berkeley Symp. Maths. Stat. Prob.* **1**, 547 (1961).
- [18] J.H. Havrda and F. Charvat, Quantification methods of classification processes: Concepts of structural α entropy, *Kybernetika* **3**, 30-35 (1967).
- [19] A.M. Oboukhov, Some specific features of atmospheric turbulence, *J. Fluid Mech.* **13**, 77-81 (1962).
- [20] A.N. Kolmogorov, A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **13**, 82-85 (1962).
- [21] A.M. Yaglom, The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulent characteristics in the inertial interval, *Sov. Phys. Dokl.* **11**, 26-29 (1966).
- [22] L.F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1922).
- [23] U. Frisch, *Turbulence — The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).
- [24] U. Frisch, P-L. Sulem and M. Nelkin, A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.*, **87**, pp. 719-736 (1978).
- [25] S.G. Saddoughi and S.V. Veeravalli, Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **268**, 333-372 (1994).
- [26] U. Frisch and G. Parisi, On the singularity structure of fully developed turbulence, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics in Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, ed. by M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (North-Holland, New York, 1985) 84.
- [27] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, The multifractal spectrum of the dissipation field in turbulent flows, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **2**, 49-76 (1987).
- [28] G.K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953).
- [29] W. Heisenberg, Zur statistischen Theorie der Turbulenz, *Zeit. Phys.* **124**, 628-657 (1948).
- [30] W. Heisenberg, On the theory of statistical and isotropic turbulence, *Proc. R. Soc.* **A195**, 402-406 (1948).
- [31] J. Feder, *Fractals* (Plenum Press, New York and London, 1988).

- [32] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, pp. 1424-1427 (1987).
- [33] Z-S. She and E. Leveque, Universal scaling laws in fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336-339 (1994).
- [34] Z-S. She and E. Waymire, Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 262-265 (1995).
- [35] A.B. Chhabra and K.R. Sreenivasan, Negative dimensions: Theory, computation, and experiment, *Phys. Rev. A* **43**, 1114-1117 (1991).
- [36] U.M.S. Costa, M.L. Lyra, A.R. Plastino and C. Tsallis, Power-law sensitivity to initial conditions within a logisticlike family of maps: Fractality and nonextensivity, *Phys. Rev. E* **56**, 245-250 (1997).
- [37] M.L. Lyra and C. Tsallis, Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53-56 (1998).
- [38] G.S. Lewis and H.L. Swinney, Velocity structure functions, scaling, and transitions in high-Reynolds-number Couette-Taylor flow, *Phys. Rev. E* **59**, 5457-5467 (1999).
- [39] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander and E. Bodenschatz, Fluid particle accelerations in fully developed turbulence, *Nature* **409**, 1017-1019 (2001).
- [40] G. A. Voth, A. La Porta, A. M. Crawford, J. Alexander and E. Bodenschatz, Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence, *J. Fluid Mech.* **469**, 121-160 (2002).
- [41] T. Gotoh, D. Fukayama and T. Nakano, Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high resolution DNS, *Phys. Fluids* **14**, 1065-1081 (2002).
- [42] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, The multifractal nature of turbulent energy dissipation, *J. Fluid Mech.* **224**, 429-484 (1991).
- [43] A. M. Crawford, N. Mordant and E. Bodenschatz, Comment on "Dynamical foundations of nonextensive statistical mechanics", (2002) physics/0212080.
- [44] Communications with Prof. R.H. Kraichnan and Prof. T. Gotoh.
- [45] Private communication with Prof. M. Tanahashi at Tokyo Institute of Technology.
- [46] R. P. Feynman, "Application of quantum mechanics to liquid helium" in *Progress in Low Temperature Physics*, ed. by C. J. Gorter, North Holland, Amsterdam, 1955, p17.
- [47] S.I. Davis, P.C. Hendry and P.V.E. McClintock, Decay of quantized vorticity in superfluid ^4He at mK temperatures, *Physica B* **280**, 43-44 (2000).
- [48] T. Araki, M. Tsubota and S.K. Nemirovskii, Energy spectrum of superfluid turbulence with no normal-fluid component, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 145301 (2002).
- [49] K. Kasamatsu, M. Tsubota and M. Ueda, Giant hole and circular superflow in a fast rotating Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A* **66**, 053606 (2002).
- [50] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans and J.E. Mooij, Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit, *Science* **299**, 1869-1871 (2003).

- [51] M.J.A. Bolzan, F.M. Ramos, L.D.A. Sá, C.R. Neto and R.R. Rosa, Analysis of fine-scale canopy turbulence within and above an Amazon forest using Tsallis' generalized thermostatics, *J. Geophys. Res.* **107**, doi:10.1029/2001JD000378 (2002).
- [52] F.M. Ramos, M.J.A. Bolzan, L.D.A. Sá and R.R. Rosa, Atmospheric turbulence within and above an Amazon forest, preprint (2003).
- [53] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, Scaling behavior in the dynamics of an economic index, *Nature* **376**, 46-49 (1995).
- [54] T. Watanabe, Y. Nakayama and H. Fujisaka, Large deviation statistics of the energy-flux fluctuation in the shell model of turbulence, *Phys. Rev. E* **61**, R1024-R1027 (2000).
- [55] F. Anselmetti, Y. Cagne, E. J. Hopfinger and R. A. Antonia, High-order velocity structure functions in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.* **140**, 63-89 (1984).
- [56] 巽 友正, 乱流 (槇書店, 1962).
- [57] 巽 友正, パラドックスとしての流体 (培風館, 1996).
- [58] 木田重雄, いまさら流体力学? (丸善, 1994).
- [59] 木田重雄, 柳瀬眞一郎, 乱流力学 (朝倉書店, 1999).
- [60] 後藤俊幸, 乱流理論の基礎 (朝倉書店, 1998).
- [61] 神部 勉, フィリップ ドレイジン, 流体力学 安定性と乱流 (東京大学出版会, 1998).
- [62] 吉澤 徹, 流体力学 (東京大学出版会, 2001).