

熱方程式の解の分解定理に付随する Bergman 空間

名古屋大学大学院多元数理研究科 中川 勇人 Hayato Nakagawa

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

名城大学理工学部 伊藤 健太郎 Kentaro Itoh

Department of Mathematics, Meijo University

1 背景

調和関数において、以下のような分解定理が知られている ([ABR, Theorem 9.6 and Theorem 9.7]). この章では $n = 2, 3, \dots$ とする.

定理 1.1. Ω を $\mathbb{R}^n$ の空でない開部分集合, K を Ω のコンパクトな部分集合とする. 関数 u が $\Omega \setminus K$ において調和であるならば, 以下を満たす関数 v, w がただ一つ存在する: $u = v + w$ であり v, w がそれぞれ Ω および $\mathbb{R}^n \setminus K$ 上調和であり, かつ w が $\lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) = 0$ ($n = 3, 4, \dots$) または $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (w(x) - b \log |x|) = 0$ ($n = 2, b$ は定数) を満たす.

$D \subset \mathbb{R}^n$ として $L^p(D)$ ($1 \leq p < \infty$) に属する D 上の実調和関数全体を Bergman 空間と呼び $b^p(D)$ で表す. Bergman 空間については同様の分解定理が必ずしも成立しない. そこで Memić は Bergman 空間に属し分解定理が成立する調和関数の空間を定義して, その性質を調べた ([M]). すなわち, Ω を $\mathbb{R}^n$ の空でない開部分集合, K を Ω のコンパクトな部分集合として, $u = v + w$ と分解できる関数 $v \in b^p(\Omega), w \in b^p(\mathbb{R}^n \setminus K)$ がただ一つ存在する関数 $u \in b^p(\Omega \setminus K)$ 全体を $A^p(\Omega \setminus K)$ で定義する. $u \in A^p(\Omega \setminus K)$ に対して, 定義のとおり $u = v + w$ と分解したとき $\lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) = 0$ は自動的に成立する ([M, Lemma 2]). この関数空間について,

$$\|u\|_{A^p(\Omega \setminus K)}^p = \|v\|_{b^p(\Omega)}^p + \|w\|_{b^p(\mathbb{R}^n \setminus K)}^p$$

とノルムが定義され Banach 空間になることが示されている ([M, Theorem 3]). 他にも, 例えば以下のような結果が得られている ([M, Theorem 5]).

定理 1.2. $A^p(\Omega \setminus K) = V \oplus W$. ここで, $V = b^p(\Omega) \mid_{\Omega \setminus K}$, $W = b^p(\mathbb{R}^n \setminus K) \mid_{\Omega \setminus K}$ である.

Memić はさらに熱方程式についてどうなるかという問題提起をしている. 実際に, 熱方程式の解全体の関数空間においても以下の分解定理が成立する ([W, Theorem 2]).

定理 1.3. $a > 0$ として $X = \mathbb{R}^n \times (0, a)$ とする. E を X の開部分集合, K を E のコンパクトな部分集合, L を熱作用素とする. 関数 u が $E \setminus K$ において $Lu = 0$ であるならば, 以下の (a) から (e) を満たす E および $X \setminus K$ 上の関数 v, w がただ一つ存在する:

- (a) $u = v + w$,
- (b) E 上で $Lv = 0$,
- (c) $X \setminus K$ 上で $Lw = 0$,
- (d) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x, t) = 0$,
- (e) $\mathbb{R}^n \times (0, k)$ 上で $w = 0$, ここで $k = \inf\{t \mid K \cap (\mathbb{R}^n \times \{t\}) \neq \emptyset\} (> 0)$ とする.

2 章では準備として平均値の定理およびその逆を紹介する ([D]). 3 章では Bergman 空間に属し分解定理が成立する熱方程式の解全体の空間 $\mathcal{A}^p$ を定義して, その性質を調べる.

2 平均値の定理

まず積分核 $K_n(x, t)$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$) を定義する. $n = 1$ のとき, $x \in \mathbb{R}, t < 0$ に対し,

$$K_1(x, t) := \begin{cases} -\frac{1}{2t} f_1\left(\frac{x}{\sqrt{-t}}\right) & (t \leq -x^2) \\ f_2\left(\frac{t}{x^2}\right) \frac{1}{x^2} & (t > -x^2) \end{cases}$$

とする. ここで,

$$W(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

$$f_1(x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{W(4j+x, 1) - W(4j-2-x, 1)\} \quad (-1 < x < 1)$$

$$f_2(t) := -\frac{1}{t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (4j+1)W(4j+1, -t) \quad (-1 < t < 0)$$

とする. $n = 2, 3, \dots$ のときは,

$$K_n(x, t) = \prod_{i=1}^n K_1(x_i, t)$$

とする. $K_n(x, t) > 0$ である. また, $K_n(x, t)$ は有界, すなわち x, t によらないある定数 M が存在して $K_n(x, t) < M$ となる

$\mathbb{R}^{n+1}$ 上の領域 D の点 (x, t) において,

$$R_r(x, t) := \{(y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid i = 1, 2, \dots, n, |y_i - x_i| < r, t - r^2 < s < t\}$$

とする. 熱方程式の解に関して以下の平均値の定理が成立する ([D]).

定理 2.1. u が D において熱方程式の解であるとき, $\overline{R_r(x, t)} \subset D$ であれば,

$$u(x, t) = \frac{1}{2^n r^{n+2}} \iint_{R_r(x, t)} K_n(y - x, s - t) u(y, s) dy ds.$$

また, この定理の逆も成立する.

定理 2.2. u が D において連続であるとき, $\overline{R_r(x, t)} \subset D$ である任意の (x, t) に対して,

$$u(x, t) = \frac{1}{2^n r^{n+2}} \iint_{R_r(x, t)} K_n(y - x, s - t) u(y, s) dy ds$$

が成立するとき, u は熱方程式の解である.

3 関数空間の定義と得られた結果

この章では開領域 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, D 上の熱方程式の解空間に属する $L^p(D)$ 関数全体を改めて Bergman 空間 $b^p(D)$ とする.

$b^p(D)$ ($1 \leq p < \infty$) は D 上での L^p ノルムについて Banach 空間になる. これを見るためには完備性, すなわち $b^p(D)$ の Cauchy 列 $\{u_m\}$ の収束先が $b^p(D)$ に入ることを示せばよい. $u_m \in L^p(D)$ より $\{u_m\}$ は $L^p(D)$ で Cauchy 列である. 平均値の定理より, $(x, t) \in D$ に対して $\overline{R_r(x, t)} \subset D$ である任意の r について,

$$u_m(x, t) = \frac{1}{2^n r^{n+2}} \iint_{R_r(x, t)} u_m(y, s) K_n(y - x, s - t) dy ds$$

が成立する. よって, $1 < p < \infty$ として

$$\begin{aligned} & |u_m(x, t) - u_{m'}(x, t)| \\ & \leq 2^{-n} r^{-(n+2)} \iint_{R_r(x, t)} |u_m(y, s) - u_{m'}(y, s)| K_n(y - x, s - t) dy ds \\ & \leq 2^{-n} M r^{-(n+2)} \left(\iint_{R_r(x, t)} |u_m(y, s) - u_{m'}(y, s)|^p dy ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_{R_r(x, t)} dy ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = 2^{-n} M r^{-(n+2)(1-\frac{1}{q})} \left(\iint_{R_r(x, t)} |u_m(y, s) - u_{m'}(y, s)|^p dy ds \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq 2^{-n} M r^{-\frac{n+2}{p}} \|u_m - u_{m'}\|_{L^p(D)}.$$

ここで, q は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすものとする. なお, $p = 1$ のときは $q = \infty$ とすること
で $|u_m(x, t) - u_{m'}(x, t)| \leq 2^{-n} M r^{-(n+2)} \|u_m - u_{m'}\|_{L^1(D)}$ が得られる. これより $\{u_m\}$
は D 上で広義一様収束することがわかり, その収束先を u とすると $u \in L^p(D)$ であり,
かつ定理 2.2 より熱方程式の解になることもわかる. ゆえに $u \in b^p(D)$ である.

$a > 0$ として $X = \mathbb{R}^n \times (0, a)$ とする. E を X の開部分集合, K を E のコンパクトな
部分集合で $k := \inf\{t \mid K \cap (\mathbb{R}^n \times \{t\}) \neq \emptyset\} > 0$ となるようにとる.

命題 3.1. $w \in b^p(X \setminus K)$ であり, $0 < t < k$ において $w(x, t) = 0$ であるとする. このと
き, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x, t) = 0$.

証明 w を $\widetilde{w}(x, t) := \begin{cases} w(x, t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$ として $\mathbb{R}^n \times (-\infty, a) \setminus K$ 上の関数 $\widetilde{w}$ に拡張す
ると, 全体でも熱方程式を満たす解となる. 平均値の定理より, $(x, t) \in X \setminus K$ に対して
 $r(x, t) = \sup\{r \mid \overline{R_r(x, t)} \cap K = \emptyset\}$ として, 任意の $r < r(x, t)$ について,

$$\widetilde{w}(x, t) = \frac{1}{2^n r^{n+2}} \iint_{R_r(x, t)} \widetilde{w}(y, s) K_n(y - x, s - t) dy ds$$

が成立する. 先ほどの $b^p(D)$ の完備性の証明と同様にして,

$$|\widetilde{w}(x, t)| \leq 2^{-n} M r^{-\frac{n+2}{p}} \|\widetilde{w}\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times (-\infty, a) \setminus K)}$$

が成立する. $|x| \rightarrow \infty$ で $r(x, t) \rightarrow \infty$, すなわち r はいくらでも大きく取れる. よって,
 $\widetilde{w} \rightarrow 0$ が示された. □

$\mathcal{A}^p(E \setminus K)$ ($1 \leq p < \infty$) を以下を満たす $E \setminus K$ 上の関数 u 全体とする:

$u = v + w$, $E \setminus K$ 上で $Lu = 0$, $v \in b^p(E)$, $w \in b^p(X \setminus K)$, $w(x, t) = 0$ ($t < k$).

命題 3.1 より, この定義によって定理 1.3 の (d) に対応するものが自動的に成立すること
がわかる. この関数空間について以下の結果が得られた.

命題 3.2. ノルムを

$$\|u\|_{\mathcal{A}^p(E \setminus K)}^p = \|v\|_{b^p(E)}^p + \|w\|_{b^p(X \setminus K)}^p$$

で定めると, $\mathcal{A}^p(E \setminus K)$ はこのノルムに関して Banach 空間になる.

証明 $u \in \mathcal{A}^p(E \setminus K)$ に収束する Cauchy 列 $\{u_m\} \subset \mathcal{A}^p(E \setminus K)$ をとる. 定義と同様に
 $u_m = v_m + w_m$ と分解する. $\{v_m\}, \{w_m\}$ がそれぞれ $b^p(E), b^p(X \setminus K)$ の Cauchy 列に
なることは明らかであり, その収束先をそれぞれ $v \in b^p(E), w \in b^p(X \setminus K)$ とする.

$u_m \in L^p(E \setminus K)$ より $\{u_m\}$ は $L^p(E \setminus K)$ で Cauchy 列である. $b^p(D)$ の完備性の証明
と同様に, $\{u_m\}$ が広義一様収束し, その収束先を u とすると, u は熱方程式の解となる.
 $t \leq k$ において $w_m(x, t) = 0$ であるから $w(x, t) = 0$ である.

$E \setminus K$ 上で $u' := v + w$ とすると $u' \in \mathcal{A}^p(E \setminus K)$ であり,

$$\|u_m - u'\|_{\mathcal{A}^p(E \setminus K)}^p = \|v_m - v\|_{b^p(E)}^p + \|w_m - w\|_{b^p(X \setminus K)}^p$$

であるが, $m \rightarrow \infty$ とすることで右辺は 0 になる. ゆえに, $u = u' \in \mathcal{A}^p(E \setminus K)$ であり, 示される. $\square$

$$b_0^p(X \setminus K) := \{w \in b^p(X \setminus K) \mid w(x, t) = 0 \ (t < k)\}$$

とすると, $b_0^p(X \setminus K)$ も Banach 空間である. $b^p(E) \mid_{E \setminus K}$ および $b_0^p(X \setminus K) \mid_{E \setminus K}$ が $\mathcal{A}^p(E \setminus K)$ の部分空間であることは定義より明らかだが, さらに次の命題も成立する.

命題 3.3. $b^p(E) \mid_{E \setminus K}, b_0^p(X \setminus K) \mid_{E \setminus K}$ は $\mathcal{A}^p(E \setminus K)$ の閉部分空間である.

$p = 2$ のとき, すなわち $\mathcal{A}^2(E \setminus K)$ は以下を内積として Hilbert 空間である:

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathcal{A}^2(E \setminus K)} &:= \langle v_1, v_2 \rangle_{b^2(E)} + \langle w_1, w_2 \rangle_{b^2(X \setminus K)} \\ (u_1, u_2 \in \mathcal{A}^2(E \setminus K), u_1 &= v_1 + w_1, u_2 = v_2 + w_2) \end{aligned}$$

$b^p(D)$ の完備性の証明と同様に, $(x, t) \in D$ について $|u(x, t)| \leq 2^{-n} M r^{-\frac{n+1}{2}} \|u\|_{L^2(D)}$ が成立するため, 写像 $u \mapsto u(x, t)$ ($(x, t) \in E \setminus K$) は $\mathcal{A}^2(E \setminus K)$ において有界かつ線形である. よって, 再生核 $S_{E \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot) \in \mathcal{A}^2(E \setminus K)$ が存在する. すなわち, $u \in \mathcal{A}^2(E \setminus K)$ に対して $u(x, t) = \langle u, S_{E \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot) \rangle_{\mathcal{A}^2(E \setminus K)}$ を満たす. $b^2(E), b^2(X \setminus K)$ も再生核 Hilbert 空間で, その再生核をそれぞれ $R_E(x, t, \cdot, \cdot), R_{X \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot)$ とする.

命題 3.4. $E \setminus K$ において $S_{E \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot) = R_E(x, t, \cdot, \cdot) + R_{X \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot)$ が成立する.

証明 $S_{E \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot) \in \mathcal{A}^2(E \setminus K)$ より, $S_{E \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot) = V_E(x, t, \cdot, \cdot) + W_{X \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot)$ と $V_E(x, t, \cdot, \cdot) \in b^2(E), W_{X \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot) \in b^2(X \setminus K)$ に一意に分解できる.

$u \in \mathcal{A}^2(E \setminus K)$ ($u = v + w$) に対して,

$$u(x, t) = \iint_E v(y, s) V_E(x, t, y, s) dy ds + \iint_{X \setminus K} w(y, s) W_{X \setminus K}(x, t, y, s) dy ds$$

が成立する. $R_E(x, t, \cdot, \cdot) = V_E(x, t, \cdot, \cdot)$ および $R_{X \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot) = W_{X \setminus K}(x, t, \cdot, \cdot)$ とすればよい. $\square$

参考文献

[ABR] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, 1992.

- [D] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag, 2001.
- [M] A. Memić, *A reproducing kernel for a Hilbert space related to harmonic Bergman space on a domain outside compact set*, Turkish J. of Math., Vol. **38** (2014), 311–317.
- [W] N. A. Watson, *A decomposition theorem for solutions of parabolic equations*, Annal. Academiæ Scientiarum Fennicæ Math., **23** (2000), 151–160.