

フィッシャーの情報量と正規分布

統計研

清水良一

1. $f(x)$ は連続な導関数をもつ密度関数で、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき、 $xf(x) \rightarrow 0$ と満にすとする。また平均 0、分散 σ^2 とし、location family $\Lambda = \{f(x-\theta)\}$ と考える。 Λ に関するフィッシャーの情報量 $I(\Lambda)$ は、

$$\begin{aligned} I &= I(\Lambda) = E \left(\frac{\partial \log f(X-\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x)^2}{f(x)} dx \end{aligned}$$

で与えられ、 θ に無関係である。

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma^2 f'(x) + xf(x))^2}{\sigma^2 f(x)} dx$$

とおくと、ふういに

$$J = \sigma^2 I(\Lambda) - 1 \geq 0$$

が得られる。等号がなりたつのは、すなわち、 $I(\Lambda)$ が最小になるのは、明らかに $f(x)$ が $N(0, \sigma^2)$ のときである

この性質、すなわち、フィッシャー情報量が最小になるという正規分布の特徴的な性質は、次の意味で安定である：
フィッシャー情報量が小さければ、 f の分布は $N(0, \sigma^2)$ に近い。

定理 f は上に述べた条件とみなすとする。 次の不等式が成り立つ。

$$\sup_x |f(x) - \phi(x)| \leq 1.7 \sqrt{J},$$

$$\sup_x |F(x) - \Phi(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \phi(x)| dx \leq 3.2 \sqrt{J}.$$

$F(x)$ は f の分布関数、 $\phi(x)$, $\Phi(x)$ はそれぞれ $N(0, 1)$ の密度関数、分布関数である。

2. f は前節の条件とみなすとする。 F からの大きさ n の標本の *normalized sum* の密度関数を $f_n(x)$ とする。

$$f_n(x) = \sqrt{n} f^{*n}(\sqrt{n}x). \quad \text{location family}$$

$\Lambda_n = \{f_n(x - \theta)\}$ のフィッシャー情報量 I_n は、

$$I_n = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f^{*n'}(x))^2}{f^{*n}(x)} dx$$

で与えられ、

$$n I_n \leq m I_m + (n-m) I_{n-m}, \quad n > m.$$

$$\sigma^{-2} \leq I_{n,m} \leq I_n.$$

と満足する. とくに.

$$a_p = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{p,n} \geq \sigma^{-2}, \quad p=1, 2, \dots$$

が存在する.

3. $Y_1, \dots, Y_n$ が平均 0, 分散 $\sigma^2 (=1)$ の分布 G からの標本とする. $Z_1, \dots, Z_n$ と Y とは独立に $N(0, 1)$ からの標本として,

$$X_j = (Y_j + Z_j) / \sqrt{2}, \quad j=1, \dots, n$$

とおく. $Y_1, \dots, Y_n$ の normalized sum の分布を G_n

とすると, $X_1, \dots, X_n$ の normalized sum の密度,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{2}x-y)^2/2} dG_n(y)$$

をもつ.

$$f_n^{(2)}(x) / f_n(x) \quad \text{が可積分関数} \quad g(x) = \min(4, 4/x^2)$$

より大きくなりないうこと, および, location family について十分統計量が, 標本平均なら, その family は正規である

ことを使って, $a_p = 1, \quad p=2, 3, \dots$ が得られる.

また, こゝから

$$\lim I_n = 1,$$

すなわち、 f_n が、あるいはその分布が $N(0,1)$ に近づく
 ことができる。これから $G_n \Rightarrow \Phi$ 、すなわち、最
 も単純な場合の中心極限定理が導かれる。