

Kac-Moody group

(Kac-Peterson の仕事の紹介)

名大・理 田中洋平 (Yôhei Tannaka)

Complex semi-simple Lie algebra 字は、対応する Cartan matrix を用いて、生成元と関係式で表示される。又字に対応する simply connected な Lie 群 G は線型代数群の構造をもつ。一方 Cartan matrix の条件を少しゆるめて得られる Lie 環が Kac-Moody Lie 環である。

Kac と Peterson ([6], [7]) は Kac-Moody algebra に対応する "代数" 群を定義して、有限次元の場合と類似ないくつかの結果を出した。

ここでは Kac-Moody group の定義, flag variety, 共役性, Peter-Weyl 型の定理について述べる。

§7. Kac-Moody Lie algebra と Kac-Moody group

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ (I は有限集合, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$) が (広義の)

Cartan matrix であるとは次の条件 (b)-(3)

$$(1) a_{ii} = 2 \quad (\forall i \in I) \quad (2) i \neq j \text{ の時 } a_{ij} \leq 0$$

$$(3) a_{ij} \neq 0 \text{ なら } a_{ji} \neq 0$$

を満たす時にいう。更に *symmetrizable* であるとは

$$(4) \text{ non-degenerate な対角行列 } D \text{ で } DA = S \text{ が}$$

対称行列にできるようなものがある。

の成立する時とする。

有限次元 *semi-simple Lie algebra* から決まる本来の Cartan matrix は上の意味での *symmetrizable* な Cartan matrix であり、条件 (4) の S が *positive definite* にとれるものとして特徴付けられる。ここではその様な A を *finite type* と呼ぶ。

Definition of Kac-Moody algebra

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$: Cartan matrix に対して以下の生成系と基本関係式で定義される Lie algebra を A に対応する Kac-Moody Lie algebra とし $\mathfrak{g}(A)$ と書く。

生成元 : $\{ h_i, e_i, f_i \mid i \in I \}$

$$\text{基本関係式: } \begin{cases} [h_i, h_j] = 0, [h_i, e_j] = a_{ij} e_j, [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \\ (\text{ad } e_i)^{-a_{ij}+1}(f_j) = 0, \text{ad}(f_i)^{-a_{ij}+1}(e_j) = 0 \\ \quad (i \neq j) \quad \quad \quad (i \neq j) \end{cases}$$

各 $i \in I$ に対して $\mathfrak{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}f_i$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ に同型な $\mathfrak{g}(A)$ の subalgebra である。 A が decomposable な時、即ちある置換行列 P があって

$$PAP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

となれば $\mathfrak{g}(A) \cong \mathfrak{g}(B) \oplus \mathfrak{g}(C)$ である。以後 A は symmetrizable で indecomposable とする。

$\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ を I 上 index された集合とし、

$$Q = \mathbb{Z}\Pi = \left\{ \sum_{i \in I} n_i \alpha_i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\} \text{ とおく。}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ は $\deg e_i = \alpha_i, \deg f_i = -\alpha_i, \deg h_i = 0$ により Q -graded になる。

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} = \sum_{i \in I} \mathbb{C}h_i$ で、各 $\mathfrak{g}_{\alpha}$ は $\text{ad } f$ -同時固有空間になる。

$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in Q \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0\}$ を root 系と呼ぶ、

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_- \text{ (disj.)} \text{ 且 } \Delta_+ = \Delta \cap \left\{ \sum n_i \alpha_i \mid n_i \geq 0 \right\}, \Delta_- = -\Delta_+$$

$r_i \in GL(f) \quad (i \in I)$ を

$$r_i(h_j) = h_j - a_{ji} h_i \quad (j \in I) \text{ と定義する。}$$

$W = \langle r_i \mid i \in I \rangle$ を Weyl group と呼ぶ、

$(W, \{r_i \mid i \in I\})$ は Coxeter 系になる。 W は Q にも作用する。

$$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij} \alpha_i \quad (j \in I)$$

$\Delta^R \stackrel{\text{def}}{=} W(\Pi)$ の π を real root

$\Delta^I \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \setminus \Delta^R$ の π を imaginary root と呼ぶ。

$\alpha \in \Delta^R$ に対して $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ である。

$\mathfrak{g}$ -module (π, V) が integrable であるとは、
任意の $e \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta^R$ に対して $\pi(e)$ が locally nilpotent である時にいう。

(この条件は $\alpha \in \Pi$ に対して成り立っては十分である。)

Definition of Kac-Moody group

G^* : 加法群 $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta^R$) の free group

$i_\alpha: \mathfrak{g}_\alpha \rightarrow G^*$ を canonical inclusion とする。

(π, V) : integrable $\mathfrak{g}$ -module に対して

$$G^* \xrightarrow{\pi^*} GL(V) \quad \Sigma$$

$$\pi^* (i_\alpha(e)) = \exp(\pi(e)) \quad (e \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Delta^R)$$

で定める。

$$G^* \supset N^* = \bigcap_{\substack{(\pi, V) \\ \text{integrable} \\ \text{module}}} \text{Ker}(\pi^*)$$

$$G = G(A) \stackrel{\text{def}}{=} G^* / N^*$$

を A に対応する Kac-Moody group と呼ぶ。

$\eta: G^* \rightarrow G$ を canonical projection とする。 $e \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して ($\alpha \in \Delta^R$)

$$\alpha_\alpha(e) \stackrel{\text{def}}{=} \eta(i_\alpha(e)), \quad U_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_\alpha(\mathfrak{g}_\alpha) \text{ とおく。}$$

U_α は additive な G の 1-parameter subgroup である。

G は U_α ($\alpha \in \pm \Pi$) で生成され, $[G, G] = G$ となる。

$$U_\pm \stackrel{\text{def.}}{=} \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Delta^\pm \rangle \quad (\text{複号同順})$$

とおく。 ところで $\Delta_\pm^R = \Delta^R \cap \Delta_\pm$

例 1) finite type

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$: 有限次元 $\Leftrightarrow A$: finite type

有限次元の complex simple lie algebra は全てこの様にして得られる。 $\mathfrak{f}$ は Cartan subalgebra である。

Δ は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ に関する本来の意味でのルート系と同一視できる。 $\Delta^R = \Delta$ となる。 (π, V) を integrable $\mathfrak{g}$ -加群とすれば $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) の作用は locally finite.

従って V は有限次既約表現の和になる。 $\mathfrak{g}$ に対応する simply connected な simple lie group $\tilde{G}$ は 各 $\alpha \in \Delta$ に対応する additive な 1-parameter subgroup Y_α で生成される。 Kac-Moody lie group G の 1-parameter subgr.

U_α, U_β の commutator relation は 対応する Y_α, Y_β と同じになる。 これより G は $\tilde{G}$ に同型である事が示される。

(cf. [13]) U_- は U_+ に共役で、 U_+ は maximal な unipotent subgroup である。

例 2) affine type

A が affine type とは次が成り立つ時で、 $\mathfrak{g}(A)$ を affine lie alg. と呼ぶ。

(4) 条件 (4) の D が singular な positive semi-definite matrix になるように D をとる事ができる。

extended Cartan matrix $A = \tilde{X}_e$ は affine type である。
 即ち $\Delta^{(0)}$ を type X_e の root 系, $\Pi^{(0)} = \{\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_\ell^{(0)}\}$ を $\Delta^{(0)}$ の simple root 系, $\phi = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i^{(0)}$ を highest root $\alpha_0^{(0)} = -\phi$ とおいて

$$a_{ij} = \frac{2 \langle \alpha_i^{(0)}, \alpha_j^{(0)} \rangle}{\langle \alpha_i^{(0)}, \alpha_i^{(0)} \rangle} \quad (i, j = 0, 1, \dots, \ell)$$

で与えられる。 $X_e^{(1)}$ 型と呼ぶ。この時 $\mathfrak{g}(A)$ は次の様な realization を持つ。

$\mathfrak{g}^{(0)}$ を type X_e の simple Lie algebra とする。

$$\mathfrak{g}(A) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}^{(0)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$$

$\mathbb{C}$ は $\mathfrak{g}(A)$ の center と

$$[X \otimes t^m, Y \otimes t^n] = m \delta_{m, -n} \langle X, Y \rangle \mathbb{C} + [X, Y] \otimes t^{m+n}$$

($X, Y \in \mathfrak{g}^{(0)}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $\langle, \rangle$ は $\mathfrak{g}^{(0)}$ の Killing form)

$$\mathfrak{f} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{C} + \mathfrak{f}^{(0)} \otimes 1 \quad (\mathfrak{f}^{(0)} \text{ は } \mathfrak{g}^{(0)} \text{ の Cartan subalgebra})$$

$\alpha_i^{(0)}$ を α_i ($i=1, \dots, \ell$) と同一視することにより,

$$\Pi^{(0)} \subset \Pi, \quad \Delta^{(0)} \subset \Delta \quad \text{となる。}$$

$\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i = \alpha_0 + \phi$ は imaginary root と

$$\Delta^I = \mathbb{Z} \delta \setminus \{0\}$$

$$\mathfrak{g}_{n\delta} = \mathfrak{f}^{(0)} \otimes t^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

$$\Delta^R = \Delta^{(0)} + \mathbb{Z} \delta$$

$$\mathfrak{g}_{\alpha+n\delta} = \mathfrak{g}_{\alpha}^{(0)} \otimes t^n \quad (\alpha \in \Delta^{(0)}, n \in \mathbb{Z})$$

$\underline{G}$ を $\mathfrak{g}^{(0)}$ に対応する simply conn. to simple algebraic group scheme

$\underline{U}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta^{(0)}$) を α に対応する $\underline{G}$ の unipotent subgroup scheme

$\underline{U}_\pm$ を $\Delta_\pm$ に対応した unipotent subgroup scheme とする.

$\mathfrak{g}^{(0)}$ の有限次表現 $(\pi^{(0)}, V)$ は $\mathfrak{g}^{(0)} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の表現 $(\pi, V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}])$ を定め、これは integrable な $\mathfrak{g}$ -module である。これより、Kac-Moody group $G = G(A)$ から $\underline{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ への homomorphism ϕ で

$$\phi(U_{\alpha+n\delta}) = \{ u_\alpha(\alpha t^n) \in \underline{U}_\alpha(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \mid \alpha \in \mathbb{C} \} \\ (\alpha \in \Delta^{(0)}, n \in \mathbb{Z})$$

となるものが存在する。 ϕ は全射で、 $\text{Ker } \phi \cong \mathbb{C}^*$ は G の center である事が示される。この ϕ によって

$$U_+ \cong \{ g(t) \in \underline{G}(\mathbb{C}[t]) \mid g(0) \in \underline{U}_+(\mathbb{C}) \}$$

$$U_- \cong \{ g(t^{-1}) \in \underline{G}(\mathbb{C}[t^{-1}]) \mid g(0) \in \underline{U}_-(\mathbb{C}) \}$$

となる。例えば $A_{\ell}^{(1)}$ 型の場合

$$\underline{G} = SL_{\ell+1} \quad \underline{U}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \underline{U}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$G \cap U_+ = \begin{pmatrix} 1+t\mathbb{C}[t] & & \mathbb{C}[t] \\ & \ddots & \\ t\mathbb{C}[t] & & 1+t\mathbb{C}[t] \end{pmatrix}$$

$$U_- = \begin{pmatrix} 1+t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] & & t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] \\ & \ddots & \\ \mathbb{C}[t^{-1}] & & 1+t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] \end{pmatrix}$$

§2. flag variety, 共役性

2.1. $\forall i \in I$ に対し, $PL(2, \mathbb{C}) \cong G_i \subset G$ より $\phi_i : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow G$ が定まる。

$$\begin{cases} \phi_i \left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \chi_{\alpha_i}(ae_i) \\ \phi_i \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \right) = \chi_{-\alpha_i}(af_i) \end{cases} \quad a \in \mathbb{C} \text{ とする.}$$

$$G_i \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im } \phi_i, \quad H_i \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^* \right\} \right)$$

$$N_i \stackrel{\text{def}}{=} N_{G_i}(H_i), \quad H \stackrel{\text{def}}{=} \langle H_i \rangle, \quad N' \stackrel{\text{def}}{=} \langle N_i \rangle \text{ とする.}$$

H は $U_{\pm}$ を normalize する. $B_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \langle H, U_{\pm} \rangle = H \cdot U_{\pm}$ とおく.

$$\begin{array}{ccc} W & \rightarrow & N/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ r_i & \mapsto & N'_i/H \end{array} \quad \text{は同型写像になる.}$$

Th. 1 (1) (G, B_+, N', S) は Tits system である.(2) $I \setminus X$ に対応する parabolic subgroup を P_x , W の部分群 W_x とすると,

$$G = \bigcup_{\substack{w \in W/W_x \\ (\text{disjoint})}} B_+ w P_x \quad (\text{Bruhat 分解})$$

$$G = \bigcup_{w \in W/W_x} B_- w P_x \quad (\text{Birkhoff 分解})$$

注) Th 1(1) から Marston ([9]), Moody-Tee ([11]), Morita ([12]) の結果が導かれる.

有限型の場合 Bruhat 分解と Birkhoff 分解は同値なもの. W の最長元 w_0 による left translation で一方から他方が出る,

$P_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda \in \mathfrak{f}^* \mid 0 \leq \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \quad \forall h_i \}$ とおく.

$\Lambda \in P_+$ に対して 次の様な integrable $\mathfrak{g}$ -module $(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ が同型を除いて unique に存在する.

(cf. Lepowsky [8], Kac [5], etc.)

$0 \neq \exists v_\Lambda \in L(\Lambda)$ があって 次の性質を満たす.

$$\begin{cases} L(\Lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) v_\Lambda \\ \pi_\Lambda(h) v_\Lambda = \Lambda(h) v_\Lambda \\ \pi_\Lambda(\mathfrak{g}_\alpha) v_\Lambda = 0 \quad (\forall \alpha \in \Delta_+) \end{cases}$$

$(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ は irreducible である. $\mathfrak{f}$ の作用に関して

$L(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{f}^*} L(\Lambda)_\lambda$ と weight 空間分解ができる. Λ は $L(\Lambda)$ の highest weight になる.
 $\lambda \in W(\Lambda)$ なら $L(\Lambda)_\lambda$ は 1次元になる.

$\Lambda \in P_+$ を固定する.

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} G \cdot [v_\Lambda] \subset P(L(\Lambda)) (= L(\Lambda) \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*)$$

を flag variety と呼ぶ.

$\lambda \in W(\Lambda)$ に対し

$$Y_\pm(\lambda) = U_\pm \cdot [v_\lambda] \subset Y \quad \text{とおく.}$$

$$(\neq v_\lambda \in L(\Lambda)_\lambda)$$

$$P(L(\Lambda)) = \bigcup_{\substack{0 \neq U \subset L(\Lambda) \\ \text{有限次元}}} P(U)$$

により, $P(U)$ の Zariski (或いは通常の) topology から $P(L(\Lambda))$ の位相を定める.

$X = \{i \in I \mid \Lambda(h_i) = 0\}$ とすれば $W(\Lambda)$ と W/W_X は bijective に対応する.

$$\begin{array}{ccc} W(\Lambda) & \longleftrightarrow & W/W_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ w(\Lambda) & \longleftrightarrow & wW_X \end{array}$$

$W(\Lambda)$ 上の order を対応する W/W_X 上の Bruhat order により定める.

Th. 2 (i) $V = \bigcup_{\substack{\lambda \in W(\Lambda) \\ (\text{diag})}} V_+(\lambda) \quad (\text{Bruhat 分解})$

$$= \bigcup_{\substack{\lambda \in W(\Lambda) \\ (\text{diag})}} V_-(\lambda) \quad (\text{Birkhoff 分解})$$

$$(ii) \quad \overline{V_+(\lambda)} = \bigcup_{\lambda \leq \mu} V_+(\mu)$$

$$\overline{V_-(\lambda)} = \bigcup_{\mu \geq \lambda} V_-(\mu)$$

$V \ni [v_\Lambda]$ の stabilizer は Parabolic subgroup P_X に等しいので Th 2 の (i) はそれぞれ G の Bruhat 分解, Birkhoff 分解に対応している. 各 $V_+(\lambda)$ は有限次元, $V_-(\lambda)$ は finite codimension である. 通常の位相から誘導された位相に関して Bruhat 分解は V の cell 分割を与える. 従って V の Poincaré 級数は Coxeter system (W, S) の言葉で表わす事ができる.

2.2. $\mathfrak{g}_{\pm} = \mathfrak{f} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta_{\pm}} \mathfrak{g}_{\alpha}$ とおく。 $\mathfrak{g}$ が finite type の時 $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}_{\pm}$ はそれぞれ Cartan subalgebra, Borel subalgebra であり, その $\text{Ad}(G)$ 共役類は, 各々 maximal adg-diagonalizable abelian subalgebra, maximal solvable algebra として特徴付けられた。一般の Kac-Moody Lie algebra でも同様の特徵付けがある。

Th. 3 $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{f}$ が maximal adg-diagonalizable abelian subalgebra なら $\mathfrak{f}$ は $\text{Ad}(G)$ の元によって $\mathfrak{f}$ にうつされる。(この $\mathfrak{f}$ を Cartan subalgebra と呼ぶ。)

Cor. $\mathfrak{g}(A_1) \cong \mathfrak{g}(A_2)$ なら A_1 と A_2 は "同じ"。
即ち A_1 と A_2 の size は等しく, ある置換行列 P があって
 $A_2 = PA_1 P^{-1}$.

$\mathfrak{g}$ の subalgebra $\mathcal{O}$ が completely solvable subalg. とは $\text{ad } \mathcal{O}$ -stable な subspace の列
 $\dots \mathcal{O}_{-2} \supset \mathcal{O}_{-1} \supset \mathcal{O}_0 = \mathcal{O} \supset \mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2 \supset \dots$ で $\mathfrak{g} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_i$
 $\dim \mathcal{O}_i / \mathcal{O}_{i+1} = 1$ ($\forall i \in \mathbb{Z}$) となるものがとれる時とする。
maximal completely solvable subalgebra を Borel subalg. と呼ぶ。 $\mathfrak{g}_{\pm}$ は Borel subalg. である。

Th. 4 completely solvable algebra はある Borel alg. に含まれる。 Borel subalgebra は $\mathfrak{B}_+$ か $\mathfrak{B}_-$ に $\text{Ad}(G)$ -共役である。(注: $\dim \mathfrak{g} = \infty$ の時 $\mathfrak{B}_+$ と $\mathfrak{B}_-$ は $\text{Ad}(G)$ -共役ではない)

§ 3. regular functions, Peter-Weyl 型の定理

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を Kac-Moody Lie algebra. G を対応する Kac-Moody Lie group とする. $\mathfrak{g}$ の involutive な automorphism ω を

$\omega(e_i) = -f_i, \omega(f_i) = -e_i, \omega(h_i) = -h_i$ で定義する. ω は G の automorphism を引き起すがこれも同じ ω であらわす. $(\pi_\lambda, L(\lambda))$ ($\lambda \in P_+$) に対して,

$\pi_\lambda^* = \pi_\lambda \circ \omega$ も integrable $\mathfrak{g}$ -module になる. π_λ^* の表現空間を $L^*(\lambda)$ と表わし, $\pi_\lambda(L(\lambda))$ に対応する元を π_λ^* と書く. $L^*(\lambda) \times L(\lambda)$ 上に G -invariant な bilinear form $\langle, \rangle$ で, $\langle \pi_\lambda^*, \pi_\lambda \rangle = 1$ となるものが存在して unique である. $\langle, \rangle$ は non-degenerate であり $L^*(\lambda) \subset (L(\lambda))^*$ とみなせる.

real root の列 $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ (重複も許す) に対して 写像 $\chi_{\bar{\beta}}$ を

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{\beta}} : \mathfrak{g}_{\beta_1} \times \dots \times \mathfrak{g}_{\beta_k} &\longrightarrow G \\ (e_1, \dots, e_k) &\longmapsto \chi_{\beta_1}(e_1) \dots \chi_{\beta_k}(e_k) \end{aligned}$$

と定める. G 上の $\mathbb{C}$ -valued function f が weakly-regular であるとは, 任意の $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ ($\beta_i \in \Delta^R$) に対して $f \circ \chi_{\bar{\beta}}$ が $\mathfrak{g}_{\beta_1} \times \dots \times \mathfrak{g}_{\beta_k}$ 上の polynomial function になる事をいう. weakly-regular

な function 全体のなす algebra を $\mathbb{C}[G]$ w.r. と書く。
 V が integrable $\mathfrak{g}$ -module の時. $v^* \in V^*$, $v \in V$
 に対して $f_{v^*, v}(g) = \langle v^*, g(v) \rangle$ は weakly-regular function である。

$U_{\pm}$ の subgroup $U'_{\pm}$ が large subgroup であるとは 有限個の G の元 $g_1, \dots, g_m$ があって $\bigcap_{i=1}^m U_{\pm} g_i^{-1} U_{\pm} \subset U'_{\pm}$ となる時にいう。 $f(g) \in \mathbb{C}[G]$ w.r. が (strongly-) regular であるとは. ある large subgroup $U'_{\pm} \subset U_{\pm}$ があって

$f(U_{\pm} g U_{\pm}) = f(g)$ ($\forall U_{\pm} \in U'_{\pm}$, $\forall g \in G$)
 が成り立つ時にいう。 regular function 全体は $\mathbb{C}[G]$ w.r. の subalgebra を成す。これを $\mathbb{C}[G]$ で表わす。
 $\mathbb{C}[G]$ は G の元による left multiplication & right multiplication に関して閉じている。 $\psi \in L(\Lambda)$
 $\psi^* \in L^*(\Lambda) \subset (L(\Lambda))^*$ をとてくると $f_{\psi^*, \psi}(g)$ は regular function になる。

$$\underline{\text{Th. 5}} \quad \bigoplus_{\Lambda \in P_+} L^*(\Lambda) \otimes L(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{C}[G]$$

$\downarrow$ $\psi^* \otimes \psi$ $\longmapsto f_{\psi^*, \psi}(g)$

は $G \times G$ -module isomorphism である。

つまり、 $\mathbb{C}[G]$ の元は $L(\Lambda)$ の "matrix element" で張られるものとして特徴付けられる。

G が finite type の時 $U_{\pm} H U_{\pm} \subset G$ が Zariski

dense である事より $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ は G の座標環に等しくなる。 $\{e\}$ は large subgroup なので $\mathbb{C}[G]_{w.r.} = \mathbb{C}[G]$ 。
 $L(\Lambda)$ ($\Lambda \in P_+$) は有限次元であるから $L^*(\Lambda) = L(\Lambda)^*$ 。
 Th.5 は この場合 対称性-duality (或いは Peter-Weyl の定理の algebraic version) に他ならない。

affine type $X_e^{(1)}$ の場合, G の有理表現

$$\pi: G \longrightarrow GL_N$$

より定まる G の表現 $(G/\text{center} \cong G(\mathbb{C}[t, t^{-1}]))$

$$\pi^G: G \longrightarrow GL_N(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$$

$$\pi(g) = \left(\sum_k a_{ij}^{(k)}(g) t^k \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

とすれば $a_{ij}^{(k)}(g)$ は weakly regular function である。
 $a_{ij}^{(k)}(cg) = a_{ij}^{(k)}(g)$ (ここで c は G の center) となる。ところが Th.5 から $f(cg) = f(g)$ ($\forall c \in \text{center } G$) となるような regular function は constant しかない。従って $\mathbb{C}[G]_{w.r.} \neq \mathbb{C}[G]$ 。

一般に $\dim G = \infty$ の場合は $\mathbb{C}[G]_{w.r.} \neq \mathbb{C}[G]$ である。 (ad, G) の matrix coefficient は regular function にならない。

$\mathbb{C}[G]^{U+} = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gu) = f(g), \forall g \in G, u \in U\}$ は left-multiplication により, G -module になる。

$\Lambda \in P_+$ に対して $\theta_\Lambda = f_{\psi_\Lambda^*}, \psi_\Lambda$

$$S_\Lambda = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gb) = \theta_\Lambda(b)f(g) \quad \forall g \in G, \forall b \in B_+\}$$

とおく。 S_Λ は $\mathbb{C}[G]^{\cup+}$ の G -submodule になる。

Th. 6 (1) $\mathbb{C}[G]^{\cup+} = \bigoplus_{\Lambda \in P_+} S_\Lambda$

(2)
$$\begin{array}{ccc} L^*(\Lambda) & \longrightarrow & S_\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi^* & \longmapsto & f_{\psi^*, \psi} \end{array} \quad \text{は同型写像.}$$

G が有限次元の場合 Th. 6 (2) は Borel-Weil の定理である。

§ 4. 結 論

$\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k) \ (\beta_i \in \Delta^R)$ に対し $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ の ideal $I_{\bar{\beta}}$ を $I_{\bar{\beta}} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{C}[G]_{w.r.} \mid f \circ \chi_{\bar{\beta}} \equiv 0 \text{ on } \mathfrak{g}_{\beta_1} \times \dots \times \mathfrak{g}_{\beta_k}\}$ とし、 $\{I_{\bar{\beta}}\}$ により $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ を topological alg. とする。

G の点と $\text{Specm } \mathbb{C}[G]_{w.r.} = \{\text{closed \& codim 1 ideal}\}$ は自然な対応により bijective に対応する。逆元 $i: G \rightarrow G$

かけ算 $m: G \times G \rightarrow G$ より誘導される, $i^*: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]_{w.r.}$ と

$m^*: \mathbb{C}[G]_{w.r.} \rightarrow \mathbb{C}[G]_{w.r.} \hat{\otimes} \mathbb{C}[G]_{w.r.}$ により G

の群構造は決定される。 $\mathbb{C}[G]$ では G が無限次元の時

よくわからない (e.g. $i^*(\mathbb{C}[G]) \not\subset \mathbb{C}[G]$). 一方 $G \times G$ -module

として $\mathbb{C}[G]_{w.r.}$ はよくわからない。(integrable も保証されない)

Hopf alg. str. を持ち、しかも $G \times G$ -module としての構造がわかるような うまい $\mathbb{C}[G]$ mod. の closed subalg. がみつかると望ましい。

Garland ([2]) は affine type の場合に対応する "analytic" な群を構成した。無限次元の場合、応用の為には Kac-Moody group では小さいのかも知れない。(cf. [1])

文献

- [1] Date - Jimbo - Kashiwara - Miwa : Transformation groups for soliton equations, RIMS preprints
- [2] Garland : The arithmetic theory of loop groups, Publ. Math. I.H.E.S. vol 52
- [3] 岩堀 - 横沼 : Kac-Moody Lie 環と Macdonald 恒等式, 『数学』 vol 33
- [4] Kac : Simple irreducible Lie algebras with finite growth, Math. USSR-Izvestiya vol 32 (1987)
- [5] — : Infinite dimensional Lie algebras, Dedekind η -function, classical Möbius function and the very strange formula, Adv. Math. 30

- [6] Kac-Peterson : Infinite flagvarieties and
conjugacy theorems , Proc. Nat. Acad. Sci. USA 80 (1983)
- [7] Kac-Peterson : Regular functions on certain infinite
dimensional groups , to appear in "Arithmetic and
Geometry" , Birkhäuser , Boston
- [8] Lepowsky : Lectures on Kac-Moody Lie algebras ,
Univ. Paris VI
- [9] Marcuson : Tits' systems in generalized
non-adjoint Chevalley groups , J. Alg. 34
- [10] Moody : Lie algebras associated with
generalized Cartan matrices , Bull. A.M.S. 73
- [11] Moody-Teo : Tits' systems with crystallo-
graphic Weyl groups , J. Alg. 21 (1972)
- [12] Morita : Tits' systems in Chevalley groups
over Laurent polynomial rings , Tsukuba J. Math. 3
- [13] Steinberg : Lectures on Chevalley groups ,
Yale Univ.