

多様体上の確率微分方程式の定義する

diffeomorphism の flow の微分と変分.

京大理 渡辺信三

1. 序. V を C^∞ -manifold, $A_1, \dots, A_r, A_0$ を V 上の vector field, $w \in W_0^r := C([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^r) \cap \{w(0) = 0\}$ を Wiener space (W_0^r, P^W) (P^W は Wiener measure) 上の r -次元 Brown 運動の canonical な実現とする. このとき確率微分方程式

$$(1) \quad \begin{cases} dX_t = \sum_{i=1}^r A_i(X_t) \circ dw^i(t) + A_0(X_t) dt \\ X_0 = x \end{cases}$$

によ, て関数 $(t, x, w) \longmapsto X(t, x, w) \in V$ が定まる. これを $x \longmapsto [w \longmapsto [t \longmapsto X(t, x, w)]]$ とみなせば $[t \longmapsto X(t, x, w)]$ は一つの V 上の道 (path) で, したがって $[w \longmapsto [t \longmapsto X(t, x, w)]]$ は V 上の道の値をとる Wiener 空間_上 V の確率変数であり, それが各 $x \in V$ ごとに与えられていることになる. この確率変数の法則を P_x とおくと, $\{P_x\}$ は V 上の道全体の空間上の確率測度の系で, これが

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r A_i^2 + A_0$$

を生成作用素にもつ拡散過程を定義

することはよく知られている。事実、確率微分方程式(1)はこのような拡散過程を構成し研究する手段として主に考えられてきた。ところで上の写像をたとえば

$$\omega \mapsto [t \mapsto [x \mapsto X(t, x, \omega)]]$$

とみなすと $x \mapsto X(t, x, \omega)$ は V の (local な) diffeomorphism になっており、そのような diffeo. の one-parameter family (flow) が ランダムに与えられたものと考えることが出来る。このような見方は拡散過程と見るのよりより精密なものであり、vector field A_i の幾何とより密接に結びついている。(実際 $V = \mathbb{R}^n$, $n=r$ で $A_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1, 2, \dots, n$, $A_0 = 0$ ととった場合と,

$$A_i(x) = \sum_{k=1}^n a_i^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad A_0(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial a_i^k}{\partial x^j}(x) \cdot a_j^i(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

(但し $x \mapsto (a_i^k(x))$ は smooth な $O(n)$ -valued function)

ととった場合では、拡散過程としては同じ n 次元 Brown 運動であるが diffeo. の flow としては一般に異なる。) さらに t, x を固定して $\omega \mapsto X(t, x, \omega)$ を考えるとこれは

Wiener space 上の V 値の関数である。Wiener space 上の関数は Wiener 以来、Wiener functional あるいは Brownian functional として種々の立場から研究されてきた。確率微分方程式の解を Wiener functional と見なしてその解析を行うことは興味ある研究方向である。この報告では確率微分方

程式が定めるランダムな diffeo. の flow について、又それを Wiener functional と見てその解析について主として Malliavin とその周辺の研究をまとめてみたい。

2. diffeo. の flow と伊藤の公式.

$X(t, x, w)$ を 確率微分方程式 (1) の解とする. このとき V 上の smooth な関数 $f(x)$ に対し

$$\begin{aligned} (2) \quad f(X(t, x, w)) - f(x) &= \sum_{i=1}^r \int_0^t (A_i f)(X(s, x, w)) \circ dw^i(s) \\ &\quad + \int_0^t (A_0 f)(X(s, x, w)) ds \\ &= \sum_{i=1}^r \int_0^t (A_i f)(X(s, x, w)) dw^i(s) + \int_0^t (L f)(X(s, x, w)) ds \end{aligned}$$

がなりたつ. ここで $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r A_i^2 + A_0$. いうまでもなく (2) の後の式が semimartingale $t \mapsto f(X(t, x, w))$ の canonical 分解 (semimartingale 分解) を与える. ここで $X_t : x \mapsto X(t, x, w)$ は V の diffeo. でありその逆を X_t^{-1} とかくことにすると $\{\xi_t = X_t \circ X_s^{-1}(x)\}_{t \geq s}$ は次の確率微分方程式をみたす;

$$(3) \quad \begin{cases} d\xi_t = \sum_{i=1}^r A_i(\xi_t) \circ dw^i(t) + A_0(\xi_t) dt \\ \xi_s = x. \end{cases}$$

これより次の後向きの方程式のなりたつことがわかる;

4

f を smooth な関数 として

$$\begin{aligned}
 (4) \quad f(X_t \circ X_s^{-1}(x)) - f(x) &= \sum_{i=1}^r \int_s^t A_i [f(X_t \circ X_u^{-1}(x))] \circ d\tilde{w}_i(u) \\
 &\quad + \int_s^t A_0 [f(X_t \circ X_u^{-1}(x))] du \\
 &= \sum_{i=1}^r \int_s^t A_i [f(X_t \circ X_u^{-1}(x))] d\tilde{w}_i(u) + \int_s^t L [f(X_t \circ X_u^{-1}(x))] du
 \end{aligned}$$

尚, この式において積分は時間の向きを逆に, すなわち t から 0 へ積分するものとする. $X_t \circ X_u^{-1}$ が $\sigma(w(t) - w(\tau); u \leq \tau \leq t)$ -可測なので確率積分も well-defined である.

又 右辺の微分作用素は合成して得られた x の関数 $f(X_t \circ X_u^{-1}(x))$ に作用するものとする.

$u(t, x) = E^W [f(X(t, x, w))] \quad (E^W \text{ は Wiener 測度 } P^W \text{ による積分})$ は (4) より積分と微分の順序変更を行えば直ちに熱方程式

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = L u \\ u|_{t=0} = f \end{cases}$$

の解であることがわかる.

さて, (5) は u や f が関数, すなわち scalar field の場合であったが diffeo, X_t を用いて任意の tensor field へ拡張することが出来る. 一般に diffeo. $\varphi: V \rightarrow V$ が与えられたとき V 上の tensor field の間に写像 φ^* が導入さ

ける. すなわち $T(x) = (T_{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_p}^{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p}(x))$ とするとき

$$\varphi^* T(x) = (T_{k_1 \dots k_p}^{\ell_1 \dots \ell_p}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi^{\ell_1}}{\partial x^{\bar{j}_1}} \dots \frac{\partial \varphi^{\ell_p}}{\partial x^{\bar{j}_p}} \cdot [\frac{\partial \varphi}{\partial x}]^{-1 \bar{i}_1}_{e_1} \dots [\frac{\partial \varphi}{\partial x}]^{-1 \bar{i}_p}_{e_p})$$

で定義されるもので, 特に T が vector field A のとき

$$\varphi^*(A)(x) = (\varphi^{-1})_* (A(\varphi(x))), \quad (\varphi^{-1})_* \text{ の } * \text{ は } \varphi \text{ の differential}$$

であり, p -form α のときは $\varphi^*(\alpha)$ は φ の pull back

$$\varphi^*(\alpha)(X_1, \dots, X_p)_x = (\alpha)_{\varphi(x)}(\varphi_*(X_1), \dots, \varphi_*(X_p)) \quad \text{である.}$$

X を V 上の vector field, $\varphi_t = \exp tX$ ($:= X$ の flow) とする

$$\text{diffeo. の one-parameter group) とし } \mathcal{L}_X(T) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^*(T) - T}{t}$$

で tensor field T に対し, T の X による Lie derivative と言う.

例 1. a) $T = f$: scalar field $\Rightarrow \mathcal{L}_X(f) = X(f)$

b) $T = A$: vector field $\Rightarrow \mathcal{L}_X(A) = [X, A] (= XA - AX)$

c) $T = \alpha$: p -form のときは次の Cartan の公式が成り立つ.

$$\mathcal{L}_X(\alpha) = i(X)d\alpha + d[i(X)\alpha], \quad (i \text{ は interior product, } d \text{ は exterior derivative})$$

〔注〕簡単に differential form に関する演算を復習しておく.

$$\alpha = \sum_{\bar{i}_1 < \dots < \bar{i}_p} \alpha_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p} dx^{\bar{i}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\bar{i}_p} \in p\text{-form}, \quad \tilde{\alpha}_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p} \in$$

$\alpha_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p} (\bar{i}_1 < \dots < \bar{i}_p)$ の交代拡張とする.

exterior derivative, $d\alpha = \sum_{\bar{i}_1 < \dots < \bar{i}_p} \frac{\partial \alpha_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p}}{\partial x^{\bar{i}}} dx^{\bar{i}} \wedge dx^{\bar{i}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\bar{i}_p}$
($p+1$ -form)

interior product, $X = X^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \in$ vector field とし

$$i(X)\alpha = \sum_{\bar{i}_1 < \dots < \bar{i}_p} (X^{\bar{i}} \tilde{\alpha}_{\bar{i}, \bar{i}_1 \dots \bar{i}_{p-1}}) dx^{\bar{i}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\bar{i}_{p-1}} \quad (p-1\text{-form})$$

又 こゝでは α を p -次共変交代テンソルとみるときは

$$\frac{1}{p!} \tilde{\alpha}_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p} dx^{\bar{i}_1} \otimes \dots \otimes dx^{\bar{i}_p} \quad \text{とみる. 特に } X_m = X_m^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}, \quad m=1, 2, \dots, p$$

は vector field として $\alpha(X_1, \dots, X_p) = \frac{1}{p!} \tilde{\alpha}_{i_1 \dots i_p} X^{i_1} \dots X^{i_p}$ とする. (松島「多様体入門」では定数か零である, といふ) □

さて方程式 (2) 及び (4) は f が tensor field のときにもそのままだつた. ただし $f(X(t, x, w))$, $f(X_t \circ X_s^{-1}(x))$ は X_t による induced tensor field $X_t^*(f)$, $(X_t \circ X_s^{-1})^*(f)$ でおきかえ operator A_i , L は X_t による $\mathcal{L}_{A_i}$, $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \mathcal{L}_{A_i}^2 + \mathcal{L}_{A_0}$ でおきかえる. したがって tensor field $u(t, x) = E^W[X_t^*(f)]$ は 熱方程式 (5) (但し $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \mathcal{L}_{A_i}^2 + \mathcal{L}_{A_0}$) の解を与える.

以上のことは V の frame bundle $GL(M) \rightarrow V$ へ持ち上げて考えるとより明解になる. $GL(M) = \{r = (x, e) : x \in V, e = (e_1, \dots, e_m) \text{ は } T_x(V) \text{ の 1 つの base } \}$ とおく. local coordinate (x^i, e_j^i) (但し $e_j^i = e_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$) により $GL(M)$ は manifold となる. 任意の V 上の vector field X は $\tilde{X}f(r) = \frac{d}{dt} f(\exp tX \cdot x, (\exp tX)_* e) \big|_{t=0}$ により $GL(M)$ 上の vector field $\tilde{X}$ を induce する. 確率微分方程式 (1) に対応して $GL(M)$ 上の確率微分方程式

$$(6) \begin{cases} dr_t = \sum_{i=1}^r \tilde{A}_i(r_t) \circ dw^i(t) + \tilde{A}_0(r_t) dt \\ r_0 = r = (x, e) \end{cases}$$

を考える. この解を $r(t, r, w)$ とするとき, 定義よりすぐ,

わかるようにこれは $(X(t, x, w), (X_t)_* e = [(X_t)_* e_1, \dots, (X_t)_* e_n])$

で与えられるものである。特に $(X_t^* e)_j^i = \sum_k \frac{\partial X^i(t, x, w)}{\partial x^k} e_j^k$

で、方程式(6)は方程式(1)にその変分方程式を合せて考
えたものである。このような方程式は Gihman-Skorohod の

本などでもよく論ぜられてゐる。今 $T = (T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p}(x))$ を

tensor field とするとき $F_T(r)_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = T(x)_{e_1 \dots e_p}^{e_1 \dots e_p} e_{j_1}^{e_1} \dots e_{j_p}^{e_p}$

$f_{k_1}^{i_1} \dots f_{k_p}^{i_p}$ とおくとこれは局所座標のとり方に無関係に定

まりしたがって $GL(M)$ 上の関数の系 $F_T(r) = (F_T(r)_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p})$

が定義される。これを tensor field T の scalarization と

いう。今 V 上の diffeo. φ は $\tilde{\varphi}(r) = (\varphi(x), \varphi_*(e))$ によって

$GL(M)$ 上の diffeo. を induce し、すぐにわかるように

$$F_{\varphi^*(T)}(r) = F_T[\tilde{\varphi}(r)], \quad F_{\mathcal{L}_X T}(r) = (\tilde{X}F)(r)$$

がなりたつ。したがって上にのべた tensor field の方程式

(2)や(4)は、 $F_T(r_t)$ に関する対応する方程式に他ならない

、尚、方程式(6)をも、と一般にしてある(1-1) tensor に対

応する vertical な $GL(M)$ 上の vector field も加えて考へれば

は $L = \sum_{i=1}^n D_i^2 + D_0$: (D_i は tensor field 上の derivation)

の場合まで論ずることが出来ることが明小浩氏によつて注意

されてゐる(1980年春、数学会講演)。

例2. $A(x) = a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$: V 上の vector field, $F_A^i(r) = f_k^i a^k(x)$

とすると、

*) (f_k^i) は (e_k^i) の逆行列

$$(7) \quad F_A^i(r_t) - F_A^i(r) = \sum_{m=1}^n \int_0^t F_{[A_m, A]}^i(r_s) \circ dW^m(s) + \int_0^t F_{[A_0, A]}^i(r_s) ds$$

$i=1, 2, \dots, n$

3. Stochastic moving frame

M を n -次元 Riemann 多様体, $O(M) \subset GL(M)$ を 正交直交 frame bundle とする. $GL(M)$ 上の vector field L_m , $m=1, 2, \dots, n$ 但し $L_m = e_m^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ke}^i e_j^e e_m^k \frac{\partial}{\partial e_j^e}$ (Γ は Christoffel 記号) は submanifold $O(M)$ に X, T vector field として $O(M)$ 上の vector field と考えてよい. これは basic vector field の系という. manifold $O(M)$ の各 tangent space は $D(n) = \text{the Lie algebra of Euclid motion group}$ と同型である. $D(n)$ の元は (π^i, π_j^i) , $(\pi^i) \in \mathbb{R}^n$, (π_j^i) は skew-symmetric $n \times n$ matrix の形をしている. 今 $O(M)$ 上の $D(n)$ -valued 1-form $\pi = (\pi^i, \pi_j^i)$ を

$$\pi^i = f_j^i dx^j$$

$$\pi_j^i = f_p^i (de_j^p + \Gamma_{re}^p e_j^e dx^k)$$

で定める. これは connection form という. あきらかに

$$\pi^i(L_m) = \delta_m^i, \quad \pi_j^i(L_m) = 0, \quad i, j, m = 1, 2, \dots, n$$

がなりたつ. connection form に対する基本関係式は次の 構造方程式 (structure eq.) である:

X, Y を任意の $O(M)$ 上の vector field とし

$$\begin{cases} (d\pi^i)(X, Y) = -\frac{1}{2} [\pi_{\delta}^i(X) \pi_{\delta}^j(Y) - \pi_{\delta}^j(Y) \pi_{\delta}^i(X)] \\ d\pi_{\delta}^i(X, Y) = -\frac{1}{2} [\pi_{\delta}^i(X) \pi_{\delta}^j(Y) - \pi_{\delta}^j(Y) \pi_{\delta}^i(X)] \\ \quad + \bar{R}^i_{jkl} \pi^k(X) \pi^l(Y) \end{cases}$$

($\bar{R}$ は Riemann curvature tensor の scalarization)

これは 次のようにもあらわされる:

$$\begin{cases} d\pi^i = -\pi_j^i \wedge \pi^j \\ d\pi_j^i = -\pi_{\delta}^i \wedge \pi_{\delta}^j + 2 \sum_{k < l} \bar{R}^i_{jkl} \pi^k \wedge \pi^l \end{cases}$$

さて §1 の話で $V = O(M)$, $r = n (= \dim M)$,

$A_i = L_i$, $i=1, 2, \dots, n$, $A_0 = 0$ とした場合, する

めち確率微分方程式

$$(8) \begin{cases} dr_t = \sum_{i=1}^n L_i(r_t) \circ dw^i(t) \\ r_0 = r \end{cases}$$

を考え, これによ, て定まる $O(M)$ 上の diffeo. の flow

$\tau_t = (r(t, r; w))$ を M 上の stochastic moving frame と
 いう. 直観的にいうと $\tau_t = (\underbrace{x_t}_{\text{とて}}, \underbrace{e_t}_{x_t \text{ の}})$ (無限小運動は frame
 e_t で定まる Euclid 空間 $T_{x_t}(M)$ での Wiener process $(w^i(t))$
 で与えられるが frame e_t の運動は x_t によ, ての平行

移動 (接続) で与えられるのである。あるいは (8) を次の形に書くことが出来る、

$$(8)' \quad \begin{cases} \pi^i(dr_t) = dW^i(t) \\ \pi^j(dr_t) = 0 \\ r_0 = r \end{cases}$$

これは M 上の運動 x_t を Euclid 空間に展開 (develop) したものが n 次元の Wiener process ($W^i(t)$) であるということに他ならない。stochastic moving frame は伊藤清氏によ、て始めて考えられた M 上の Brown 運動の curve によった平行移動を実現するものとして Eells, Elworthy や Malliarin によ、て導入され M 上の stochastic differential geometry を考察する際の基礎となるものである。 T_t は $\frac{1}{2} \Delta_0(M)$ ($\Delta_0(M) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i^2$: Bochner の horizontal Laplacian) を生成作用素にもつ $O(M)$ 上の拡散過程で π の $M \wedge$ の射影 $x_t = p(r_t)$ は $\frac{1}{2} \Delta$ (Δ は Laplace-Beltrami) を生成作用素にもつ M 上の拡散過程 (すなわち M 上の Brown 運動) になる。 T を M 上の tensor field とし F_T を π の scalarization とするとき

$$u(t, r) = E^{\overline{W}}[F^T(r(t, r; w))]]$$

はある (一意的に定まる) M 上の tensor field $v(t, x)$ の scalari-

ization とする: $u(t, r) = F^{v(t, \cdot)}$, ことがわかる. さらに

$\Delta_{O(M)}(F^T) = F^T \Delta T$: ここで $\Delta T = g^{ij} \nabla_i \nabla_j T$ (∇_i は共変微分) は tensor field に作用する Laplace-Beltrami の作用素である. したがって $v(t, r)$ は熱方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta v \\ v|_{t=0} = T \end{cases}$$

の解を与えることがわかる. さらに p-form の場合には

Feynman-Kac 型の重みをつけて平均すれば Δ の代わりに Hodge-de Rham-Kodaira の Laplacian $-(d\delta + \delta d)$ に対応する熱方程式の解が得られる.

さて $O(M)$ 上の diffeo. の flow r_t の differential $(r_t)_* = T_r(O(M)) \rightarrow T_{r_t(r)}(O(M))$ の表現をもとめよう. とこで $T_r(O(M))$ と $D(n)$ は対応. $v \in T_r(O(M)) \rightarrow \pi_r(v) = (\pi^i(v)_r, \pi^j(v)_r)$ により同型で. この同型のもとで $(r_t)_*$ を $D(n)$ 上の isomorphism とみてそれを J_t とおこう. $J_t(r) = \pi_{r_t(r)} \circ (r_t)_* \circ \pi_r^{-1}$. このとき

定理 行列 $J_t(r) \in \text{End}(D(n))$ は次の確率微分方程式の解として与えられる: $z \in D(n)$ を任意に固定して

$$Z(t) = J_t(r) z \quad \text{とおくとき} \quad (Z(t) = (z^i(t), z^j(t)) \in D(n))$$

$$(9) \begin{cases} dZ^i(t) = \frac{1}{2} Z_j^i(t) \circ dw^j(t) \\ dZ_j^i(t) = \bar{R}^i_{jke}(\Gamma(t)) Z^k(t) \circ dw^e(t) \\ Z(0) = Z \end{cases}$$

証明 $v = \pi_r^{-1}(Z) \in T_r(O(M))$ とおく、すると

$$\begin{aligned} Z(t) &= \pi_{\Gamma_t(r)}((\Gamma_t)^*(v)) \\ &= \Gamma_t^*(\pi)_r(v) \quad (\Gamma_t^*(\pi) \text{ は form } \pi \text{ の } \Gamma_t \text{ による pull back}) \end{aligned}$$

§2の結果より $O(M)$ 上の form に作用する Lie derivative $\mathcal{L}_{L_m}$ を $\mathcal{L}_m$ と略記して

$$dZ(t) = \sum_{m=1}^n \Gamma_t^*(\mathcal{L}_m \pi)_r(v) \circ dw^m(t)$$

Cartan の公式より

$$\mathcal{L}_m \pi = i(L_m) d\pi + d i(L_m) \pi$$

である、故に

$$(\Gamma_t^*)(\mathcal{L}_m \pi)_r(v) = (\Gamma_t^* d\pi)((L_m)_r, v) + \Gamma_t^* d[\pi(L_m)] \underset{=0}{=} .$$

したがって

$$dZ(t) = (d\pi)(d\Gamma(t), \Gamma_t^* v)$$

構造方程式と (8)' より

$$\begin{aligned} dZ^i(t) &= (d\pi^i)(d\Gamma(t), \Gamma_t^* v) \\ &= \frac{1}{2} \pi_j^i(\Gamma_t^* v) \cdot \pi^j(d\Gamma_t) = \frac{1}{2} Z_j^i(t) \circ dw^j(t) \end{aligned}$$

$$dZ_j^i(t) = \bar{R}_{jke}^i Z^k(t) \circ dW^k(t) \quad \text{q. e. d.}$$

一般に matrix-valued non-anticipative process

$E_m(t)$, $C(t)$ が与えられたとき, matrix-valued 確率微分方程式

$$\begin{cases} dg(t) = E_m(t) g(t) \circ dW^m(t) + C(t) g(t) dt \\ g(0) = I \end{cases}$$

の解を $\exp \left\{ * \int_0^t (E_m(s) \circ dW^m(s) + C(s) ds) \right\}$ とあらわす (McKean の stochastic multiplicative integral).

一般の初期値 $g(0)$ の解は $g(t) = \exp \left\{ * \int_0^t (E_m(s) \circ dW^m(s) + C(s) ds) \right\} g(0)$ とあらわされる. X にて特に $D(n)$ の

線型変換全体 $\text{End } D(n)$ を行列の集合ともみる (2

$u_m(t) \in \text{End } D(n)$ を

$$\begin{cases} (u_m(t) z)^i = \frac{1}{2} z_j^i \\ (u_m(t) z)^j = \bar{R}_{jme}^i(r(t), r) z^e \end{cases}$$

で定めると

$$\begin{aligned} (10) \quad J_t(r) &= \exp \left\{ * \int_0^t u_m(s) \circ dW^m(s) \right\} \\ &= \exp \left\{ * \int_0^t (u_m(s) dW^m(s) + \frac{1}{2} M(s) ds) \right\} \end{aligned}$$

ここで $M(s) \in \text{End } D(n)$ は

$$(11) \begin{cases} (M(s)Z)^i = \frac{1}{4} \bar{R}^i_e(r(s, r)) Z^e \\ (M(s)Z)^i_j = \bar{R}^i_{j m e; m}(r(s, r)) Z^e + \frac{1}{2} \bar{R}^i_{j k e}(r(s, r)) Z^e_k \end{cases}$$

($\underline{m}, \underline{k}$ は k に m を加えて k を意味する)

($\bar{R}^i_{j k e; m}$ は $\nabla_m R^i_{j k e}$ の scalarization)

なお $\text{trace } u_m(t) = 0$ であるから $\det J_t(r) = 1$ a.s. なることがわかる. ($d[\det J_t(r)] = \det J_t(r) \times \text{trace } u_m(t) \cdot dw^m(t)$ に注意すればよい).

次に Vauthier^[3] による p -form に関する homotopy formula をもためておこう. α を M 上の p -form とし projection $p: O(M) \rightarrow M$ による α の pull back を $\alpha^* := p^*(\alpha)$ とする. このとき

$$(12) \quad \tau_t^*(\alpha^*) - \alpha^* = dG(t, \alpha) + G(t, d\alpha)$$

ここで一般に $G(t, \beta)$ は M 上の q -form β に対し次式で定まる $O(M)$ 上の $(q-1)$ -form をあらわす:

$$(13) \quad G(t, \beta) = \sum_I \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \int_0^t F_I^\beta(r_s) \tau_s^*(\Omega^{I \setminus \{i_k\}}) dw^{i_k}(s) \\ - \frac{1}{2} \int_0^t \tau_s^*(\delta\beta)^* ds + \frac{1}{2} \sum_I \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \int_0^t F_I^\beta(r_s) \\ \times \tau_s^*(\mathcal{L}_{i_k} \Omega^{I \setminus \{i_k\}}) ds$$

そこで $\Omega^I = \pi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \pi^{i_g}$, $I = (i_1, i_2, \dots, i_g)$, $i_1 < \cdots < i_g$

$$F_I^\beta(r) := \tilde{\beta}_{j_1 \dots j_g} e_{i_1}^{j_1} \cdots e_{i_g}^{j_g}, \quad r = (x_i^j e_j^i),$$

(したがって $\beta = \sum_I F_I^\beta(r) \Omega^I$ とある)

又 δ は d の dual 作用素.

証明 Itô の公式 と Cartan の公式 (cf. §2) より

$$\begin{aligned} \Gamma_t^*(\alpha^*) - \alpha^* &= d \int_0^t \Gamma_s^* [\{i(L_m)\alpha\}^*] \circ dW^m(s) \\ &\quad + \int_0^t \Gamma_s^* [\{i(L_m)d\alpha\}^*] \circ dW^m(s) \\ &= dG(t, \alpha) + G(t, d\alpha) \end{aligned}$$

そこで $G(t, \beta) = \int_0^t \Gamma_s^* [\{i(L_m)\beta\}^*] \circ dW^m(s)$ とある.

$$\begin{aligned} \beta^* &= \sum_I F_I^\beta \Omega^I \text{ より } \{i(L_m)\beta\}^* = \sum_I F_I^\beta i(L_m)\Omega^I \\ &= \sum_I \sum_{k=1}^g (-1)^{k-1} F_I^\beta(r) \cdot \delta_m^{i_k} \Omega^{I \setminus \{i_k\}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故に } G(t, \beta) &= \sum_I \sum_{k=1}^g (-1)^{k-1} \int_0^t F_I^\beta(r_s) \Gamma_s^*(\Omega^{I \setminus \{i_k\}}) \circ dW^k(s) \\ &= \sum_I \sum_{k=1}^g (-1)^{k-1} \int_0^t F_I^\beta(r_s) \Gamma_s^*(\Omega^{I \setminus \{i_k\}}) dW^k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_I \sum_{k=1}^g (-1)^{k-1} \int_0^t \Gamma_s^*(\mathcal{L}_{i_k} F_I^\beta \cdot \Omega^{I \setminus \{i_k\}}) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{そこで } \mathcal{L}_{i_k}(F_I^\beta \cdot \Omega^{I \setminus \{i_k\}}) &= (L_{i_k} F_I^\beta) \Omega^{I \setminus \{i_k\}} \\ &\quad + F_I^\beta \mathcal{L}_{i_k} \Omega^{I \setminus \{i_k\}} \text{ であり, 故に} \end{aligned}$$

$$\sum_I \sum_{k=1}^g (-1)^{k-1} (L_{i_k} F_I^\beta) \Omega^{I \setminus \{i_k\}} = \sum_{I'} \sum_{m=1}^n L_m F_{(m, I')}^\beta \Omega^{I'}$$

$$= - \sum_{I'} F_{I'}^{\delta\beta} \Omega^{I'} = -\delta\beta, \quad I' = (i_1, i_2, \dots, i_{p-1}) \\ i_1 < i_2 < \dots < i_{p-1}$$

に注意すればよい.

Corollary (Eells, Malliavin)^{[1], [2]}

α が harmonic 1-form, i.e. 1-form α $d\alpha=0, \delta\alpha=0$

のとき α の t に対応し

$$\alpha^* = E[r_t^*(\alpha^*)]$$

がなりたつ.

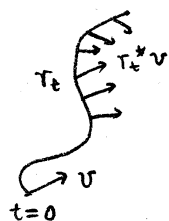
さて $v \in T_r(O(M))$ をいっしょに固定するとき

$(T_t)_* v \in T_{r_t}(O(M)), 0 \leq t < \infty$, は curve $r_t = r(t, r, w)$,

$0 \leq t < \infty$ に沿った vector field をあたえる. これは古典的な

Jacobi field に対応するもので Malliavin はこれを

Stochastic Jacobi field と呼んでゐる.^[2] この概念を理解



するために古典的な Jacobi field を復習する.

今 $r \in O(M)$ と $(c^1, c^2, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^n$ を固定

すると, 微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dr_t}{dt} = L_m(r_t) c^m \\ r_0 = r = (x, e) \end{cases}$$

によつて $O(M)$ 上の curve $r_t = r_t(r)$ がえられる. r の M

上の射影 $\alpha_t = p(r_t)$ は $\alpha_0 = x, \dot{\alpha}_0 = c^m e_m$ であるよ

うな geodesic に他ならない. $(r_t)_*(v)$ は r_t に沿

— 16 — $v \in T_r(O(M))$ をいっしょに

た vector field で $J_t^v = P_*[(r_t)_* v]$ は geodesic α_t に沿った vector field である。これを Jacobi-field とする。

J_t^v は $v = (v^i, v_j^i)$ に linear に depend するが、

$$J_t^v = J_t^{v'} \iff v^i = v'^i \quad C^j v_j^i = C^j v_j'^i$$

は容易にわかるので (r_t を固定したとき) Jacobi field は $2n$ 次元の vector space をなす。 $r_t = (\alpha_t, e_i(t))$ とするとき、 $J_t^v = f^i(t) e_i(t)$, ここで $f^i(t) = \pi_{r_t}^i(r_t^*(v))$, 故に構成方程式より

$$\begin{cases} \frac{df^i}{dt} = \frac{1}{2} z_j^i(t) C^j \\ \frac{dz_j^i}{dt} = \bar{R}_{jke}^i f^e C^k \end{cases}$$

すなわち $\frac{d^2 f^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \bar{R}_{jke}^i C^j C^k f^e$, $f^i(0) = v^i$, $f^i(0) = \frac{1}{2} v_j^i C^j$ となり f^i は Jacobi の方程式を満たすことがわかる。

stochastic な Jacobi-field は $(C^1, \dots, C^n) \in n$ 次元の white noise $(dw^1(t), \dots, dw^n(t))$ で置きかえたものといえる。上でも述べた方程式 (9) が Jacobi の方程式に対応する。とらえて古典的な Jacobi field は 測地線の変分としても知られるものであった。stochastic な場合には Wiener process $w(t)$ に関して変分をとることに対応する、それを次節でやる。

4. Stochastic calculus of variation

上の stochastic moving frame $r(t, r; w)$ は w の関数とみると Wiener 過程の可測関数, すなわち汎関数である. W_0^n は Frechet 空間であるからその上の関数に対しては汎関数微分 (Frechet 微分) が定義される. 形式的に計算すると

$$(14) \quad \left. \frac{\partial r(t, r, w + \varepsilon \cdot \delta w)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_0^t Dr(s, r, w)_m (\delta w)^m(s) ds,$$

ここで $Dr(s, r, w)_m \in Tr(t)(O(M))$, $m=1, 2, \dots, n$ は

$$Dr(s, r, w)_m = (r_t)_* (r_s)_*^{-1} (L_m)_{r(s)} \quad \text{によって}$$

与えられることがわかる. したがって $Dr(s, r, w)_m$ はすべて stochastic Jacobi field である. ここで

$r(t)$ は W_0^n 上の関数としては Wiener 測度に関して可測な関数であり, 測度の違いを無視して一意的に定まる. もちろん ^{一般には} W_0^n の位相に関して連続なものではない. このよう

な Wiener process の汎関数, すなわち Wiener functional の微分をどのように定義するのがよいかについては色々な研究がある. Malliavin や Stroock^[4] は W_0^n 上の Ornstein-Uhlenbeck 過程を用いた確率解析を用いてこれを論じたし, 重川は Frechet-derivative の $L^p(P^n)$ -norm に基づく closed extension としてこの問題を論じた. 以下で簡単にこの両者の立場を概

観する。

W_0^r 上の Ornstein - Uhlenbeck 過程とは W_0^r -値拡散過程

w_t であって次のマルチンゲール問題の解として特性づけ

られるものである: $\{P_w\}_{w \in W_0^r}$ は $\Omega(W_0^r) = C([0, \infty) \rightarrow W_0^r)$
 $t \mapsto \tilde{w}_t = (w_t(s))$

上の Borel 確率測度の系であって (i) $P_w\{w_0 = w\} = 1$

(ii) $\forall \varphi \in C_0^\infty(R^1)$, $\forall f \in C_0^\infty([0, \infty) \rightarrow R^1)$ $i = [0, \infty)$ 上の compact
 R^1 -値 なる台をもつ C^∞ -関数全体 に対し

$$w_t(f) = - \int_0^t f'(s) \cdot w_s(s) ds \quad \text{とおくとき}$$

$$\varphi(e^{\frac{t}{2}} w_t(f)) - \frac{\|f\|^2}{2} \int_0^t e^s \varphi''(e^{\frac{s}{2}} w_s(f)) ds$$

が P_w -martingale. $(\|f\|^2 = \int_0^\infty |f(s)|^2 ds)$

このような拡散過程は容易に構成できる: 実際 $\overline{W}(u, v)$

を $[0, \infty) \times [0, \infty)$ 上の $dsdt$ を variance-measure にもつ

(平均0の) Gaussian random measure とし, χ の T-直積を

$W(s, t)$ とあらわす. $w \in W_0^r$ に対して

$$\xi_t(s) = e^{-\frac{t}{2}} \left[w(s) + \int_0^t \int_0^s e^{\frac{u}{2}} W(du, dv) \right]$$

は連続な変形をもちしたが, $t \mapsto [s \mapsto \xi_t(s)]$ は

$\Omega(W_0^r)$ -値の確率変数を定める. この法則を P_w とすれ

ばよい. 今 P^W を W_0^r 上の Wiener 測度とし

$$P = \int_{W_0^r} P_w(\cdot) P^W(dw)$$

とおくとき P は $\Omega(W_0^r)$ 上の shift invariant で reversible

な確率測度 (すなわち P^W は $\{P_w\}$ の invariant measure かつ $\{P_w\}$ は P^W に關し対称) である. 各 $1 \leq p \leq \infty$ に対し

$$D_p(\bar{L}) = \{ \Phi \in L^p(P^W); \exists \Psi \in L^p(P^W) \}$$

$(\Phi(w_t) - \int_0^t \Psi(w_s) ds, P)$ が martingale }

このとき Ψ は Φ から一意的に定まりこれを $\Psi = \bar{L}\Phi$ とあらわす. 特に $p=2$ のときは Ornstein-Uhlenbeck 過程の定める $L^2(P^W)$ -semigroup の生成作用素と一致する.

又 $g \in C_0^\infty(R^m)$, $f_1, f_2, \dots, f_m \in C_0^\infty([0, \infty) \rightarrow R^r)$,

$$\Phi(w) = g(w(f_1), w(f_2), \dots, w(f_m)) \text{ のとき}$$

は $\Phi \in D_p(\bar{L})$ であり $\bar{L}\Phi = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^m (f_i, f_j) (\partial_i \partial_j g)(w(f_1), w(f_2), \dots, w(f_m)) - \sum_{i=1}^m w(f_i) \partial_i g(w(f_1), w(f_2), \dots, w(f_m)) \right\}$ である. $\bar{L}$ は Ornstein-Uhlenbeck 作用素という.

$p=2$ のときはこれはいわゆる無限次元 Laplacian と一致する: $L^2(W_0^r, P^W) = \bigoplus_0^\infty \mathcal{H}_n$ は Wiener-Itô 分解とする

$$\frac{\Psi}{\Phi} = \sum_n \Phi_n$$

とき $D_2(\bar{L}) = \{ \Phi; \sum n^2 \|\Phi_n\|_{L^2(P^W)} < \infty \}$

$$\text{かつ } \bar{L}\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty n \Phi_n.$$

今 $\Phi, \Psi \in D_2(\bar{L})$ とすると $\Phi \cdot \Psi \in D_1(\bar{L})$ であること

$$*) (f_i, f_j) = \int_0^\infty f_i(s) f_j(s) ds$$

とが容易にわかる。よって

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \bar{\Gamma}(\Phi \cdot \Psi) - \Phi \bar{\Gamma} \Psi - \Psi \bar{\Gamma} \Phi$$

によ、 $\langle \Phi, \Psi \rangle \in L^1(P^W)$ を定義する。今 $\Phi \in D_2(\bar{\Gamma})$

に対し 2乗可積分マルチンゲール $(\Phi(w_t) - \int_0^t \bar{\Gamma} \Phi(w_s) ds, \mathbb{P})$

を $M_\Phi(t)$ であらわすと 実は $\langle M_\Phi, M_\Psi \rangle_t = \int_0^t \langle \Phi, \Psi \rangle(w_s) ds$

, $\Phi, \Psi \in D_2(\bar{\Gamma})$ となることが示される。そうするとあと

は通常の確率解析の枠組にの、て例えば次のようなことが

示される (Itô の公式) : $\infty \geq p \geq 1$ に対し

$$K_p = \{ \Phi \in D_{2p}(\bar{\Gamma}) : \langle \Phi, \Phi \rangle \in L^p(P^W) \}$$

$$\|\Phi\|_{K_p} = E^{P^W} [|\Phi|^2 p + |\bar{\Gamma} \Phi|^2 p + \langle \Phi, \Phi \rangle p]^{\frac{1}{2}}$$

とすると K_p は Banach space で $K_\delta \subset K_p$ $\delta \geq p$

かつ $K_1 = D_2(\bar{\Gamma})$. 今 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m) \in (K_1)^m$

$$\varphi \in C^2(R^m) \text{ で } \sup_{x \in R^m} \left[\frac{|\varphi(x)|}{1+|x|^2} + \frac{\sum_{i=1}^m |\partial_i \varphi(x)|}{1+|x|} + \right.$$

$$\left. \sum_{i,j=1}^m |\partial_i \partial_j \varphi(x)| \right] < \infty \text{ とするとき } \varphi \circ \Phi \in D_1 \text{ かつ}$$

$$\bar{\Gamma}(\varphi \circ \Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m \langle \Phi_k, \Phi_l \rangle \partial_k \partial_l \varphi \circ \Phi$$

$$+ \sum_{k=1}^m \bar{\Gamma} \Phi_k \cdot \partial_k \varphi \circ \Phi.$$

さらに $\Phi \in (K_2)^m$ のとき 同様の Φ に対し $\varphi \circ \Phi \in K_1$

$$\text{で } \langle \varphi \circ \Phi, \Psi \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \Phi_k, \Psi \rangle \partial_k \varphi \circ \Phi, \quad \forall \Psi \in K_1$$

がなりたつ。

一方重川は "smooth" な W_0^r との関数から出発し、
 γ の Frechet derivative のある L^p -norm による closed
 extension をとることにより上のような微分の定義をおこな
 (cf. [1])
 った。上の $D_p(\bar{L})$ は重川の $H(p; p)$ に対応している。
 又 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ は $(D\Phi, D\Psi)_H$ に対応している。尚 Malliavin
 はこれを $\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi$ と表わしている。しかし Stroock や
 Malliavin の定義では $\nabla\Phi$ や $D\Phi$ そのものの定義はない。
 ここでたとえば (14) のような関係式を得たい場合 $\nabla\Phi$
 や $D\Phi$ に対応する概念が必要である。

上で概観してきた Wiener functional の微分の概念は確
 率微分方程式の解に適用され有効に应用されている。特に拡
 散過程の推移確率密度の存在とその滑らかさについて新しい
 確率論的方法が得られた。実際 Malliavin は微分作用素

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r A_i^2 \quad (A_1, \dots, A_r \text{ は vector field}) \text{ に対応する}$$

hypoellipticity problem をこの方法で論じ Hörmander の結果
 をさらに精密にした。^([1]) $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r A_i^2 + A_0$ の形の作用素のとき

にはこの立場からはまだ問題がのこっている。しかしいずれ
 にせよ Stroock のいうとおり、たとえ strictly elliptic の場
 合でさえ、従来解析的方法によつてのみ論じられてきた熱方
 程式の regularity problem に確率論的方法が可能になつたこ
 とは画期的というべきではなからうか。

文献

- [1] N. Ikeda, S. Watanabe : Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Kodansha (近刊)
- [2] P. Malliavin = Stochastic Jacobi fields.
- [3] J. Vauthier = Homotopie stochastique dans le complexe de de Rham. Obstruction à des formules de la moyenne pour des formes harmoniques.
- [4] D. W. Stroock : The Malliavin Calculus and its Application to Second order Parabolic Differential Equations.