

楕円曲線上のある Hamilton 力学系について

佐々木良勝 (東京大学数理科学研究科)

1 Introduction

射影直線 $\mathbb{CP}^1$ 上の 2 階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形 (ホロノミック変形) とパンルヴェ方程式についての一連の研究に引き続き, 岡本和夫氏は 1987 年の論文 [Okamoto 1987] において, 楕円曲線 E 上の 2 階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形が従うハミルトン力学系を示した. まず, 本稿の出発点となる上記論文の諸結果を以下に述べる.

記号

- Ω を $\text{Im} \frac{\omega_3}{\omega_1} > 0$ なる 2 複素数 $2\omega_1, 2\omega_3$ により生成される格子とする.
- $\wp(x)$ を基本周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ をもつワイエルシュトラスの楕円関数とする.
- $\zeta(x)$ をワイエルシュトラスのゼータ関数とする.
- 楕円曲線 E をトーラス $\mathbb{C}/\Omega$ と同一視することにより, E 上定義された線形常微分方程式を 2 重周期関数係数の方程式として表現する.
- 2 変数関数 $Z(u, v)$ を次のように定める:

$$Z(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(u - v) - \zeta(u) + \zeta(v) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) + \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}.$$

1.1 E 上フックス型・合流型方程式

次の E 上線形微分方程式を考える:

- フックス型 on E :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p(x; t) y$$

$$\begin{aligned} p(x; t) = & \nu + a_0 \wp(x) + a_1 \wp(x - t) + \frac{3}{4} \wp(x - \lambda_1) + \frac{3}{4} \wp(x - \lambda_2) \\ & + HZ(x; t) - \mu_1 Z(x; \lambda_1) - \mu_2 Z(x; \lambda_2). \end{aligned}$$

この方程式は次のリーマン図式をもつ：

$$\left[\begin{array}{ccc} x \equiv 0 & x \equiv t & x \equiv \lambda_k \quad (k=1,2) \quad \text{mod.}\Omega \\ \frac{1}{2}(1+c_0) & \frac{1}{2}(1+c_1) & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(1-c_0) & \frac{1}{2}(1-c_1) & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

ただし $a_i = \frac{1}{4}(c_i^2 - 1)$.

• 合流型 on E :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = q(x; t)y$$

$$\begin{aligned} q(x; t) = & \rho + a^2 t^2 \wp(x)^2 + bt\wp'(x-t) + \frac{3}{4}\wp(x-\lambda_1) + \frac{3}{4}\wp(x-\lambda_2) \\ & + K\wp(x) - \mu_1 Z(x; \lambda_1) - \mu_2 Z(x; \lambda_2). \end{aligned}$$

この方程式は次の(一般化された)リーマン図式をもつ：

$$\left[\begin{array}{ccc} x \equiv 0 & x \equiv \lambda_k \quad (k=1,2) \quad \text{mod.}\Omega \\ \overbrace{at \quad 1 + \frac{b}{a}} & \frac{3}{2} \\ -at \quad 1 - \frac{b}{a} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

上記において、特異点の合流“ $t \rightarrow 0$ ”により、フックス型の方程式は合流型の方程式に移行する。

1.2 ホロノミック変形・ハミルトン系

モノドロミー保存変形により、上記 E 上フックス型方程式より次のような独立変数 1・自由度 2 のハミルトン系を得る：

• フックス型 eq. のハミルトン系 (@1)：

$$D\lambda_k = \frac{\partial H}{\partial \mu_k}, \quad D\mu_k = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_k} \quad (D = \frac{d}{dt} \quad ; k=1,2)$$

$$H = M\{(\mu_1^2 - \mu_2^2) + (\mu_1 + \mu_2)N - P\}$$

where

$$M = \{\zeta(\lambda_1 - t) - \zeta(\lambda_2 - t) - \zeta(\lambda_1) + \zeta(\lambda_2)\}^{-1}$$

$$N = Z(\lambda_1; \lambda_2) = \zeta(\lambda_1 - \lambda_2) - \zeta(\lambda_1) + \zeta(\lambda_2)$$

$$P = a_0\{\wp(\lambda_1) - \wp(\lambda_2)\} + a_1\{\wp(\lambda_1 - t) - \wp(\lambda_2 - t)\}.$$

- 合流型 eq. のハミルトン系 (@2) :

$$D\lambda_k = \frac{\partial K}{\partial \mu_k}, \quad D\mu_k = -\frac{\partial K}{\partial \lambda_k} \quad (D = t \frac{d}{dt} ; k = 1, 2)$$

$$K = \overline{M}\{(\mu_1^2 - \mu_2^2) + (\mu_1 + \mu_2)N - \overline{P}\}$$

where

$$\overline{M} = \{\wp(\lambda_1) - \wp(\lambda_2)\}^{-1}$$

$$N = Z(\lambda_1; \lambda_2) \quad (\text{as above})$$

$$\overline{P} = a^2 t^2 \{\wp(\lambda_1)^2 - \wp(\lambda_2)^2\} + bt\{\wp'(\lambda_1) - \wp'(\lambda_2)\}.$$

証明は [Okamoto 1987] を参照されたい. 自由度 1 の場合は see [Kawai 1995].

なお CP^1 上では 1 階微分の項を持つ線形方程式のモノドロミー保存変形と, 1 階微分の項が消えるように標準形にした方程式 (SL-type) のモノドロミー保存変形とは同値であったが, トーラス上ではこの事実は成り立たない. (PSL(2, C) については [Iwasaki 1991] を参照のこと.)

2 特殊解の積分

ハミルトン系 (@1) において $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $a_0 = a_1 = 0$ とおくと,

$$\frac{d\mu_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_k} \quad (k = 1, 2)$$

の方は $0 = 0$ と自明な式となり,

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu_k} \quad (k = 1, 2)$$

の方は

$$(@3): \quad \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\lambda_2}{dt} = MN$$

と1本の式に落ちるが、互いに矛盾する式は出てこない。したがって(@3)の解は(@1)の解において $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $a_0 = a_1 = 0$ とした式を満たす。この意味で(@1)は、 $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $a_0 = a_1 = 0$ なる特殊解をもつ、と言える。

以下、本節においてはハミルトン系(@1),(@2)および、それらにおいてトーラスの周期を無限大に飛ばした場合の極限の系(極限を明示した上で、これらもハミルトン系(@1),(@2)と呼ぶことにする。)の特殊解の積分を求める。なお、本稿を通じ、積分とは各解に沿って一定値をとる関数の謂いである。

まず取り扱う極限についてはっきりさせておこう。考えているトーラスそのものの場合を出発点として 0)elliptic case と呼ぶことにする。基本周期のうち $2\omega_1$ をfixして $2\omega_3 \rightarrow \infty$ とした場合を i)trigonometric case と呼ぶ。 $2\omega_1 \rightarrow \infty, 2\omega_3 \rightarrow \infty$ とした場合を ii)rational case と呼ぶ。まとめると次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 0)\text{elliptic case :} & 2\omega_1:\text{fixed} & 2\omega_3:\text{fixed} \\ i)\text{trigonometric case:} & 2\omega_1:\text{fixed} & 2\omega_3 \rightarrow \infty \\ ii)\text{rational case :} & 2\omega_1 \rightarrow \infty & 2\omega_3 \rightarrow \infty. \end{array}$$

2.1 ハミルトン系の特解の積分

● フックス型のハミルトン系(@1)の特解の積分

定理 フックス型のハミルトン系(@1)は、 $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $a_0 = a_1 = 0$ なる特殊解をもつ。これらは各々の場合において以下のような積分をもつ。 $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, c, \gamma, \delta:\text{const.}; \text{これらは moduli に依存する。})$

0)elliptic case :

$$e^{\kappa_0 t} \frac{\vartheta_0(x-c)\vartheta_0(y-c)}{\vartheta_0(x+c)\vartheta_0(y+c)} = \text{const.} \quad \left(x = \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right), y = t - \frac{1}{2\omega_1} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)\right)$$

i)trigonometric case:

$$e^{\kappa_1 t} \frac{(X-\gamma)(Y-\gamma)}{(X-\delta)(Y-\delta)} = \text{const.} \quad (X = e^{kx}, Y = e^{ky}; k = \frac{\pi i}{\omega_1})$$

ii)rational case :

$$e^{\kappa_2 t} \frac{(x-c)(y-c)}{(x+c)(y+c)} = \text{const.}$$

● 合流型のハミルトン系(@2)の特解の積分

定理 合流型のハミルトン系 (@2) は, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $a = b = 0$ なる特殊解をもつ. これらは各々の場合において以下のような積分をもつ. ($\bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_1, c_j, u, v, \bar{a}$:const.; これらは moduli に依存する.)

0)elliptic case :

$$t^{\bar{\kappa}_0} \frac{\sigma(x-u)\sigma(x+u)}{\sigma(x-v)\sigma(x+v)} = \text{const.} \quad (x = \frac{1}{2\omega_1}(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}))$$

i)trigonometric case:

$$t^{\bar{\kappa}_1} \frac{X - C^{-1}}{X - C} \exp \left\{ \frac{c_1}{X - C^{-1}} + \frac{c_2}{X - C} + \frac{1}{2} \frac{c_3}{(X - C^{-1})^2} + \frac{1}{2} \frac{c_4}{(X - C)^2} \right\} = \text{const.}$$

ii)rational case :

$$t \frac{(y - \bar{a})(y + \bar{a})}{(y - i\sqrt{3}\bar{a})(y + i\sqrt{3}\bar{a})} = \text{const.}$$

2.2 求積計算のアウトライン

• Outline

0)elliptic case:

ハミルトン系 (@1) および (@2) は次のように変形できる:

$$(@1) \xrightarrow[\substack{\mu_1 = \mu_2 = 0 \\ a_0 = a_1 = 0}}{\quad} \frac{dx}{Z(x)} + \frac{dy}{Z(y)} = 0 \quad (x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, y = t - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2})$$

$$(@2) \xrightarrow[\substack{\mu_1 = \mu_2 = 0 \\ a = b = 0}}{\quad} \frac{dt}{t} + \frac{\bar{M}dx}{Z(x)} = 0 \quad (x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \bar{M} \text{ は } x \text{ の関数})$$

where

$$Z(x) \stackrel{\text{def}}{=} Z(x - c; x + c) \quad (c = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} : \text{const.}).$$

あとは(@1)は第3種楕円積分の公式をつかって積分できる. [竹内 1936], [安藤 1970] を参照されたい. (@2) はもっと簡単に積分できる.

i)trigonometric case, ii)rational case では, 次の退化公式を用いる.

• Formulae

$$\left. \begin{array}{l} \rho(z) = \rho(z; \omega_1, \omega_3) \\ \downarrow \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} \rightarrow \infty \\ \rho_{tri}(z) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi z}{2\omega_1})} - \frac{1}{3} \right\} \\ \downarrow \omega_1, \omega_3 \rightarrow \infty \\ \rho_{rat}(z) = \frac{1}{z^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} Z(u; v) = \zeta(u - v) - \zeta(u) + \zeta(v) \\ \downarrow \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} \rightarrow \infty \\ Z_{tri}(u; v) = \frac{\frac{\pi}{2\omega_1}}{\tan \frac{\pi(u-v)}{2\omega_1}} - \frac{\frac{\pi}{2\omega_1}}{\tan \frac{\pi u}{2\omega_1}} + \frac{\frac{\pi}{2\omega_1}}{\tan \frac{\pi v}{2\omega_1}} \\ \downarrow \omega_1, \omega_3 \rightarrow \infty \\ Z_{rat}(u; v) = \frac{1}{u-v} - \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \end{array}$$

3 rational case の積分

周期を2つとも無限大に飛ばしてトーラスを退化させると、ハミルトニアン $H, K/t$ も有理関数となる。このとき双有理な変換によって、この系の積分を求めることが出来てしまう。すなわち ii) rational case では (@1), (@2) とともに積分が得られる。以下に示す通りこの積分は正準変数の有理関数であって、さらに正準変換を繰り返すと多項式形の積分にまで変形できる。

3.1 rational case の有理関数形積分

補題 ハミルトン系

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

において、ハミルトニアンが時間だけの関数 $f(t)$ と、時間を陽に含まない関数 $g(\vec{q}, \vec{p})$ とに因数分解できる、すなわち

$$H = f(t)g(\vec{q}, \vec{p})$$

と書けるならば、関数

$$f(t)^{-1}H = g(\vec{q}, \vec{p})$$

は当該ハミルトン系の積分である。(ただし $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ と略記した.)

なぜなら

$$\frac{\partial g(\vec{q}, \vec{p})}{\partial t} = 0$$

および解析力学でよく使う式

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{d\{f(t)^{-1}H\}}{dt} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial\{f(t)^{-1}H\}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\{f(t)^{-1}H\}}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial\{f(t)^{-1}H\}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{f(t)} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial g(\vec{q}, \vec{p})}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるからである。(補題の証明終わり.)

よって t の関数を H, K から括り出すことが出来れば、残りの $(t$ を陽に含まない) 因子は積分になっている。

rational case のハミルトン系 (@1), (@2) に以下のような正準変換：

$$\lambda_1 = t\lambda_3, \lambda_2 = t\lambda_4, \mu_1 = \frac{\mu_3}{t}, \mu_2 = \frac{\mu_4}{t}$$

を行うことで得られるハミルトニアンを H_1, K_1 と書くと

$$H_1 = H - \frac{\mu_3\lambda_3 + \mu_4\lambda_4}{t}$$

$$K_1 = \frac{K}{t} - \frac{\mu_3\lambda_3 + \mu_4\lambda_4}{t}$$

であるが、このとき上記補題により次のことがいえる。

定理 ハミルトン系 (@1) から、上記の正準変換で得られるハミルトニアンを H_1 とするとき、関数 tH_1 は当該ハミルトン系の積分である。

定理 (K.Okamoto) ハミルトン系 (@2) から、上記の正準変換で得られるハミルトニアンを K_1 とするとき、関数 tK_1 は当該ハミルトン系の積分である。

3.2 rational case の多項式形積分

定理 正準変換により、積分 tH_1 は次の多項式形の積分 tH_2 に変換される：

$$\begin{aligned} tH_2 = & x(x-y)\{(1+y-4x)\xi - 2y\eta\}\xi \\ & + 2\alpha x\{(1-2x)\xi - y\eta\} \\ & + 2\beta y\{(3x-y-1)\xi + y\eta\} \\ & + x\xi - y\eta. \end{aligned}$$

合流型に関しては岡本氏により以下の結果が得られている。

定理 (K.Okamoto) 正準変換により、積分 tK_1 は次の多項式形の積分 tK_2 に変換される：

$$\begin{aligned} tK_2 = & x^2\{(1-4x)\xi - 2y\eta\}\xi \\ & + \{\beta x(1-2x) - \alpha y(1-3x)\}\xi \\ & - (\beta x - \alpha y)y\eta \\ & + x\xi - y\eta. \end{aligned}$$

また積分のレベルでの退化については

定理 (K.Okamoto) 上記 2 つの積分は次のように退化する:

$$\begin{aligned}
 tH_2 &\longrightarrow tK_2 \\
 y &:= \epsilon y \\
 \eta &:= \epsilon^{-1} \eta \\
 2\beta &:= \epsilon^{-1} \alpha \\
 2\alpha &:= \beta \\
 \epsilon &\rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

記号の意味は明らかであろう. 証明は省略する.

4 発展方程式形の表示と対称性

本節では系 (@1) の構造が見やすくなるように, 新たな記号を導入して若干の整理を行う.

記号 便宜のため従前のものも含めて掲げる.

$$x := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, y := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - t, s := \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$$

$$v := H = M\{(\mu_1^2 - \mu_2^2) + (\mu_1 + \mu_2)N - P\}$$

$$u := G = M\{(\mu_1^2 - \mu_2^2) + (\mu_1 + \mu_2)L - P\}$$

$$N = Z(\lambda_1; \lambda_2) = Z(x + s; x - s)$$

$$L := Z(\lambda_1 - t; \lambda_2 - t) = Z(y + s; y - s)$$

$$M^{-1} = N - L$$

$$P = a_0 Q + a_1 R$$

$$Q := \wp(\lambda_1) - \wp(\lambda_2) = \wp(x + s) - \wp(x - s) = \dot{N}$$

$$R := \wp(\lambda_1 - t) - \wp(\lambda_2 - t) = \wp(y + s) - \wp(y - s) = \dot{L}$$

$$:= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$Z(\lambda, \mu) = \zeta(\lambda - \mu) - \zeta(\lambda) + \zeta(\mu)$$

ちなみにこのとき

$$H - G = v - u = \mu_1 + \mu_2$$

である.

命題 ハミルトン系 (@ 1) は発展方程式系 (@ 4):

$$\frac{dx}{ds} = \frac{vM^{-1} + P}{(v-u)^2}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{uM^{-1} + P}{(v-u)^2}$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{vR - a_1\dot{R}}{v-u}$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{uQ + a_0\dot{Q}}{v-u}$$

に変形できる.

証明は [Sasaki 1999] を見られたい. この変換は正準変換ではないのだが, 次のような構造をもつ. 容易に確かめられるので証明は略す.

命題

$$J_1 = \frac{vN - a_0\dot{N}}{v-u} - \frac{vL - a_1\dot{L}}{v-u}$$

$$J_2 = \frac{uN - a_0\dot{N}}{u-v} - \frac{uL - a_1\dot{L}}{u-v}$$

とおくと, 上記の発展方程式系 (@ 4) は

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial J_1}{\partial u}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\partial J_2}{\partial v}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial J_1}{\partial y}, \quad \frac{du}{ds} = \frac{\partial J_2}{\partial x}$$

となる.

注意 このとき

$$J_1 + J_2 = N - L = M^{-1}.$$

また u と v, N と L を入れ換えると J_1 と J_2 が入れ換わる.

参考文献

- [安藤 1970] 安藤四郎, 楯円積分・楯円関数入門, 日新出版 (1970).
- [Iwasaki 1991] K. Iwasaki, *Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on a Riemann surface*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 38(1991), 431-531.
- [Kawai 1995] S. Kawai, *Thesis*, the Univ. of Tokyo (1995).

- [Okamoto 1987] K. Okamoto , *The Hamiltonian structure derived from the holonomic deformation of the linear ordinary differential equations on an elliptic curve* , Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo 37(1987),1-11.
- [Sasaki 1999] Y. Sasaki , *Master's thesis* , the Univ. of Tokyo(1999).
- [竹内 1936] 竹内端三 , 楕円函数論 , 岩波書店 (1936).