

On Lie algebras of vector fields on smooth orbifolds

信州大 教養 阿部孝順 (Kōjun Abe)

§ 1 Introduction

Pursell-Shanks [9] は, 可微分で連結な多様体 M, N 上の compact support をもつ可微分ベクトル場をつくるリー環 $\mathfrak{X}_c(M), \mathfrak{X}_c(N)$ の同型は, 多様体 M, N の可微分同相を引起すことを示した。Omori [8], Kuriyama [5], Kuriyama-Omori-Maeda [5], [6] etc. は $\mathfrak{X}(M)$ の部分環 $\mathcal{Q}$, $\mathfrak{X}(N)$ の部分環 $\mathcal{Q}'$ を適当に与えたとき, $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q}'$ がリー環として同型ならば M, N は可微分同相であることを証明している。

ここでは, M, N が smooth connected orbifold としたとき上で述べた問題について考える。

M : connected smooth orbifold

$C^\infty(M)$: M 上の smooth function 全体

$\mathfrak{D}(M)$: $C^\infty(M)$ の derivation 全体をつくるリー環

$\mathfrak{D}(M)$ の元を M 上の smooth vector field と考える。 M は局所的には有限群の軌道空間であるから, M に自然な stratification が定義される。

$$\mathcal{X}(M) = \{X \in \mathcal{Q}(M) \mid X \text{ is strata preserving}\}$$

$$\mathcal{Q}_c(M) = \{X \in \mathcal{Q}(M) \mid \text{supp } X \text{ is compact}\}$$

$$\mathcal{X}_c(M) = \mathcal{X}(M) \cap \mathcal{Q}_c(M).$$

$\mathcal{Q}(M)$, $\mathcal{X}(M)$ の局所的な性質については, Binstone [4], Schwarz [10] より詳しく研究されている。smooth orbifold M, N に対して Purcell-Shanks 型の定理が得られることが分かっている ([1], [2])。以下では §2 で述べる条件 (C.1) ~ (C.4) をみたす $\mathcal{X}(M)$, $\mathcal{X}(N)$ の部分環 ^{$\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$} について, どのようなことが分かるか, 更に $\mathcal{Q}_c(M)$, $\mathcal{Q}_c(N)$ の部分環の場合について考える。

§2. $\Sigma_0(\mathcal{Q}) = \Sigma_0(\mathcal{Q}') = \emptyset$ の場合

以下では $\mathcal{X}(M)$ の部分環 ^{$\mathcal{Q}$} で次の条件をみたすものを考える (c.f. [6]).

$$(C.1) \quad \forall X \in \mathcal{Q} \text{ is complete.}$$

$$(C.2) \quad \text{Ad}(\exp tX) \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \quad (\forall X \in \mathcal{Q})$$

$$(C.3) \quad X, Y \in \mathcal{Q}, \quad -\infty < a \leq b < \infty \quad \text{ならば}$$

$$\int_a^b \text{Ad}(\exp tX) Y dt \in \mathcal{Q}.$$

$$(C.4) \quad M \text{ is locally finite open covering } \{W_\alpha\} \text{ に対して, } \forall X \in \mathcal{Q} \text{ は} \\ X = \sum_\alpha X_\alpha \quad (\exists X_\alpha \in \mathcal{Q}, \text{supp } X_\alpha \subset W_\alpha) \text{ と表わされる.}$$

但し M が smooth orbifold に対して $X \in \mathcal{Q}$ の 1-parameter family of transformations $g_t = \exp tX$ が定義されて, $(\text{Ad}(g_t)Y)(p)$

$$= (d\varphi_t)_{\varphi_t^{-1}(p)} (Y(\varphi_t^{-1}(p))) \quad (Y \in \mathcal{G}, -\infty < t < \infty, p \in M).$$

$$M \ni p$$

$$\mathcal{G}_p = \{X \in \mathcal{G} \mid X=0 \text{ on a neighborhood of } p\}$$

$$\mathcal{G}_p^\infty = \{X \in \mathcal{G} \mid (\text{ad}(Y_1) \cdots \text{ad}(Y_k)X)(p) = 0 \quad (\forall \text{ 自然数 } k, Y_i \in \mathcal{G})\}$$

$$\mathcal{G}^* = \{\mathfrak{m} : \mathfrak{g} \text{ の maximal ideal} \mid \mathfrak{m} \not\supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$$

Lemma 2.1 (c.f. [6] Lemma 4.3, Lemma 3.1).

$$\mathcal{G}^* \ni \mathfrak{m} \text{ に対し } \exists p \in M \mid \mathfrak{m} \supset \mathcal{G}_p.$$

$$\Sigma_0(\mathcal{G}) = \{p \in M \mid X(p) = 0 \quad (\forall X \in \mathcal{G})\}$$

Lemma 2.2 (c.f. [6] Lemma 4.5)

$$\mathfrak{m} \in \mathcal{G}^*, \mathfrak{m} \supset \mathcal{G}_p \quad (\exists p \in M - \Sigma_0(\mathcal{G}))$$

$$\Rightarrow \mathfrak{m} = \mathcal{G}_p^\infty.$$

$\mathcal{G}^*$ には Stone topology より位相が入っている (c.f. [5], §4). $\Sigma_0(\mathcal{G}) = \emptyset$ のときは, M と $\mathcal{G}^*$ は位相同型なことが証明される.

Proposition 2.3 (c.f. [5], §5)

M, N を smooth connected orbifold, $\mathcal{G}, \mathcal{G}' \in (C.1) \sim (C.4)$

をみたす, $\mathcal{X}(M), \mathcal{X}(N)$ の部分環で, $\Sigma_0(\mathcal{G}) = \Sigma_0(\mathcal{G}') = \emptyset$ である

とする. このとき $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ がリ-環として同型ならば, M と N は同相型である.

Corollary 2.4 (c.f. [5], §5).

$\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ が Proposition 2.3 をみたし, かつ $\mathcal{G}$ は $C^\infty(M)$ -module で $\mathcal{G}'$ は $C^\infty(N)$ -module ~~とす~~^{とする} ならば, リ-環の同型 $\Phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ が存在すれば, 微分同相 $\varphi: M \rightarrow N$ で $d\varphi = \Phi$ なるものが存在する.

§3. Expansive vector fields

smooth orbifold M の各点 p に対して, 有限群 T_p のベクトル空間 V_p への線型作用で, 軌道空間 V_p/T_p が p の近傍と微分同相なものが存在する.

$$\alpha_p: \mathcal{X}(M) \xrightarrow{\text{restriction}} \mathcal{X}(V_p/T_p) \cong \mathcal{X}_{T_p}(V_p)$$

(但し $\mathcal{X}_{T_p}(V_p)$ は V_p 上の T_p -equivariant smooth vector field 全体)

$\mathcal{X}(M) \ni X$ に対して, $\alpha_p(X)$ の linear part の固有値の実部が全て正であるとき, X は p において expansive であるという.

$\Sigma(\mathcal{G}) \ni \psi_p$ に対して $\mathcal{G}$ に含まれる expansive vector field が存在するとき, $\mathcal{G}$ は 性質(E) をみたすということにする.

$\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ が 性質(E) をみたすとき, [6] と平行な議論ができて次の結果を得る.

Theorem 3.1 M, N : smooth connected orbifold.

$\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ が条件 (C.1) ~ (C.4) をみたし, 性質 (E) をみたす $\mathcal{X}(M)$, $\mathcal{X}(N)$ の部分環で, かつ, $\mathcal{G}$ は $C^\infty(M)$ -module で $\mathcal{G}'$ は $C^\infty(N)$ -module とする. このとき, リー環の同型 $\Phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ が存在すれば, 微分同相 $\varphi: M \rightarrow N$ で $d\varphi = \Phi$ をみたすものが存在する.

S : M の closed subset.

$$\text{Diff}(M; S) = \{ g \in \text{Diff}(M) \mid g(S) = S \}$$

$$\mathcal{X}_c(M; S) = \{ X \in \mathcal{X}_c(M) \mid \exp tX \in \text{Diff}(M; S) \ (\forall t \in \mathbb{R}) \}$$

$\mathcal{X}_c(M; S)$ が性質 (E) をみたすとき, S は expansive set であるということになる. S が M の smooth suborbifold ならば S は expansive set である.

Corollary 3.2 M, N は smooth connected orbifold で

S, S' を M, N の expansive closed subset とする. このとき, リー環の同型 $\Phi: \mathcal{X}_c(M; S) \rightarrow \mathcal{X}_c(N; S')$ が存在すれば, 微分同相 $\varphi: M \rightarrow N$ で $d\varphi = \Phi$ をみたすものが存在する.

§4. リー環 $\mathcal{D}_c(M; S)$

$\mathcal{X}_c(M)$ に含まれる vector field X に対しては, $\exp tX$ が定義されるが, $\mathcal{D}_c(M)$ に含まれる vector field に対しては $\exp tX$

が定義されていない。このため $\mathcal{K}_c(M)$ の部分環よりも $\mathcal{D}_c(M)$ の部分環の構造を調べる方が難しくなる。この節では、 $\mathcal{D}_c(M)$ の部分環 $\mathcal{D}_c(M; S)$ に対して $\mathcal{K}_c$ と同様の問題を考えよう。

M の subset S に対して

$$I(S) = \{f \in C^\infty(M) \mid f = 0 \text{ on } S\}$$

$$\mathcal{D}_c(M; S) = \{X \in \mathcal{D}_c(M) \mid X(f) \in I(S) \text{ } (\forall f \in I(S))\}$$

Theorem 4.1. M, N を smooth connected orbifold, S, S' を M, N の smooth suborbifold とする。このとき、リー環の同型 $\Phi: \mathcal{D}_c(M; S) \rightarrow \mathcal{D}_c(N; S')$ が存在すれば、微分同相 $\varphi: M \rightarrow N$ で $d\varphi = \Phi$ をみたすものが存在する。

以下この節では Th 4.1 の証明の方針について述べる。Th 4.1 の証明には $\mathcal{D}_c(M; S)$ の maximal ideal を決定することと同様になるが、このため $\mathcal{K}$ はまず M が finite group Γ の表現空間 V の軌道空間 V/Γ で、 S が V の部分空間 V_1 の軌道空間 V_1/Γ である場合、 $\mathcal{D}_c(V/\Gamma; V_1/\Gamma)$ の maximal ideal を決定する必要がある。

$$V^{(1)} = \{v \in V \mid \text{ある isotropy subgroup } \Gamma_v \text{ が } V \text{ の reflection で生成される order 2 の group}\}$$

$$\Gamma_1 = \{\Gamma_v \mid v \in V^{(1)}\} \text{ で生成される } \Gamma \text{ の reflection subgroup.}$$

$\Gamma_1^{-1} : \{ \Gamma_v \mid v \in V^{(1)} \cap V_1 \}$ で生成される Γ の reflection subgroup

$[REV]_0^{\Gamma_1^{-1}} : V$ 上の Γ_1^{-1} -invariant polynomial で定数項が 0 なるもの

$\{\theta_1, \dots, \theta_n\} : [REV]_0^{\Gamma_1^{-1}}$ の homogeneous minimal set of generators

$\{\theta_1, \dots, \theta_m\} (n, \leq m)$ は $[REV]_0^{\Gamma_1^{-1}}$ の homogeneous minimal set of generators であるように可取.

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$
 $\theta^1 = (\theta_1, \dots, \theta_m) : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ } polynomial map

$\bar{\theta} : V/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$
 $\bar{\theta}^1 : V_1/\Gamma_1^{-1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ } θ, θ^1 の orbit map.

$\bar{\Gamma} = \Gamma/\Gamma_1$: factor group.

Γ の V への線型作用は $\bar{\Gamma}$ の V/Γ_1 への作用 $\psi_0 : \bar{\Gamma} \times V/\Gamma_1 \longrightarrow V/\Gamma_1$.

$\bar{\Gamma}$ の V_1/Γ_1^{-1} への作用 $\psi_0^1 : \bar{\Gamma} \times V_1/\Gamma_1^{-1} \longrightarrow V_1/\Gamma_1^{-1}$ を引き起す.

Lemma 4.2. 線型作用 $\psi : \bar{\Gamma} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ で次の条件をみたすものが存在する.

$$(1) \quad \psi(r, \bar{\theta}(x)) = \bar{\theta}(\psi_0(r, x)) \quad (r \in \bar{\Gamma}, x \in V/\Gamma_1)$$

$$(2) \quad \psi(r, \bar{\theta}^1(x)) = \bar{\theta}^1(\psi_0^1(r, x)) \quad (r \in \bar{\Gamma}, x \in V_1/\Gamma_1^{-1})$$

(3) $\bar{\theta}, \bar{\theta}^1$ は $\bar{\Gamma}$ -equivariant embedding.

Lemma 4.2 から $\bar{\theta}$ の orbit map $\bar{\theta} : V/\Gamma = V/\Gamma_1/\bar{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{R}^n/\bar{\Gamma}$

は embedding. $\bar{\theta}^* : C^\infty(\mathbb{R}^n/\bar{\Gamma}) \longrightarrow C^\infty(V/\Gamma) \mid \bar{\theta}^*(f) = f \circ \bar{\theta}$

is onto map $K \neq \emptyset$: $\times$ が分かる。

Lemma 4.3

$$\bar{\theta}^{**} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n/\bar{P}; \mathbb{R}^m/\bar{P}) \longrightarrow \mathcal{D}(V/\bar{P}; V/\bar{P})$$

$$; \quad \bar{\theta}^{**}(X)(\bar{\theta}^*(f)) = X(f) \cdot \bar{\theta} \quad (X \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n/\bar{P}; \mathbb{R}^m/\bar{P}), f \in C^\infty(\mathbb{R}^m/\bar{P}))$$

is well defined Lie algebra homomorphism.

$\{\eta_1, \dots, \eta_k\} : \mathbb{R}[\mathbb{R}^n]_{\bar{P}} \rightarrow$ homogeneous minimal set of generators

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

$\{\eta'_1, \dots, \eta'_{k_1}\} : \mathbb{R}[\mathbb{R}^{n_1}]_{\bar{P}} \rightarrow$ homogeneous minimal set of generators

$q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ is natural projection $\exists ! q$, $\eta_i = \eta'_i \circ q$ ($i=1, \dots, k_1$) とできる。

$$\eta' = (\eta'_1, \dots, \eta'_{k_1}) : \mathbb{R}^{n_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{k_1}$$

$$\eta : (\eta(\mathcal{O}(V)), \eta'(\mathcal{O}'(V_1))) \hookrightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k_1}) \text{ inclusion}$$

$$\eta^* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^{k_1}) \longrightarrow \mathcal{D}(\eta(\mathcal{O}(V)); \eta'(\mathcal{O}'(V_1))) \cong \mathcal{D}(V/\bar{P}, V/\bar{P})$$

is epimorphic. 従って $\mathcal{D}(\eta(\mathcal{O}(V)); \eta'(\mathcal{O}'(V_1)))$ は $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ -module と考えられる。Schwarz [10], §6 と 平行な議論により, $\mathcal{D}(\eta(\mathcal{O}(V)); \eta'(\mathcal{O}'(V_1)))$ に含まれる vector field の germ は $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ -module として, $\mathcal{D}(\eta(\mathcal{O}(V)); \eta'(\mathcal{O}'(V_1)))$ に含まれる real analytic な vector field の germ により生成される。同様 $\mathcal{D}(\eta(\mathbb{R}^n); \eta'(\mathbb{R}^{n_1}))$ に含まれる vector field の germ は $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -module として $\mathcal{D}(\eta(\mathbb{R}^n); \eta'(\mathbb{R}^{n_1}))$ に含まれる real analytic な vector field の germ により生成される。

れることが証明される。 $i_1: \mathcal{L}(\mathcal{O}(V)) \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ を inclusion とすると, $i_1(\mathcal{L}(\mathcal{O}(V)))$ は $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ の open set を含むことから, $i_1^*(\mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n); \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))) = \mathcal{D}(\mathcal{L}(\mathcal{O}(V)); \mathcal{L}(\mathcal{O}(V)))$ が示される。

従って

$$\text{Proposition 4.4} \quad \bar{\sigma}^{**}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n/\mathbb{P}; \mathbb{R}^n/\mathbb{P}) \longrightarrow \mathcal{D}(V/\mathbb{P}; V/\mathbb{P})$$

は onto Lie algebra homomorphism.

$\mathbb{R}^n/\mathbb{P}$ は codim 1 strata を含まないことから, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n/\mathbb{P}; \mathbb{R}^n/\mathbb{P}) = \mathcal{X}(\mathbb{R}^n/\mathbb{P}; \mathbb{R}^n/\mathbb{P})$. $\Rightarrow$ これから $\mathcal{D}(V/\mathbb{P}; V/\mathbb{P})$ の maximal ideal の決定は $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n/\mathbb{P}; \mathbb{R}^n/\mathbb{P})$ の maximal ideal の決定に帰着される。従って §3 の方法により Th 4.1 を示すことができる。

§5. Fibration preserving vector fields

§3, §4 の結果は, 部分環 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}}$ が C^∞ -関数環上の module であることが証明の鍵になっている。そうでない場合に, このような結果を得ることは, より難しい問題となる。Chen [8] は, M, N が smooth manifold で $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ が transitive Lie algebra の場合に, 多くの結果を得ている。しかし M, N が smooth orbifold の場合はこのような条件が望めない。 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ が $C^\infty(M), C^\infty(N)$ 上の module でない場合の例として次の

結果を述べておく.

$p: E \rightarrow B$ ($\overset{\text{resp}}{p'}: E' \rightarrow B'$) $\in$ fibration over a connected smooth orbifold B (resp. B') とする.

$\mathcal{D}_c(E; p)$: the Lie algebra of all smooth fibration preserving vector field with compact support.

$\mathcal{X}_c(E; p) = \{X \in \mathcal{D}_c(E; p) \mid X \text{ is strata preserving}\}$

Theorem 5.1 ([3]). リー環の同型 $\Phi: \mathcal{X}_c(E; p) \rightarrow \mathcal{X}_c(E'; p')$ が存在するならば, 微分同相 $\varphi: E \rightarrow E'$ が存在し, φ は fibration preserving かつ $d\varphi = \Phi$.

Theorem 5.2 リー環の同型 $\Phi: \mathcal{D}_c(E; p) \rightarrow \mathcal{D}_c(E'; p')$ が存在するならば, 微分同相 $\varphi: E \rightarrow E'$ が存在し, φ は fibration preserving かつ $d\varphi = \Phi$.

References.

- [1] K. Abe: Pursell-Shanks type theorem for orbit spaces of G -manifolds, P.R.M.S. 18 (1982).
- [2] ———: Pursell-Shanks type theorem for smooth orbifolds, preprint.
- [3] ———: On Lie algebras of fibration preserving

vector fields on fibrations over smooth orbifolds
 , preprint.

- [4] E. Bierstone : The Structure of Orbit Spaces and Singularities of Equivariant Mappings, Inst. De Math. Pura E Aplica (1980).
- [5] A. Koriyama : On Lie algebras of vector fields with invariant submanifolds , Nagoya Math. J. 55 (1974)
- [6] A. Koriyama , T. Maeda , H. Omori : On Lie algebra of vector fields , Trans. A.M.S. 226 (1977)
- [7] _____ : On Lie algebra of vector fields on expansive sets , Japan J. Math 3 (1977)
- [8] H. Omori ; Infinite dimensional Lie transformation groups, Springer Lecture Note 427 (1974)
- [9] L. Puseell , M. Shanks : The Lie algebra of vector fields of a smooth manifold , Proc. A.M.S 5 (1954)
- [10] G. Schwarz : Lifting smooth homotopies of orbit spaces, I.H.E.S. 51 (1980).