

ある平面分割の母関数について

石川 雅雄

岡山大学, 理学部

mi@math.okayama-u.ac.jp

1 交代符号行列について

1.1 交代符号行列

n 次の交代符号行列 (alternating sign matrix) A とは, 成分が $\{0, \pm 1\}$ からなる n 次正方行列で各行各列の和が 1 で, 各行各列で 0 を除けば +1 と -1 が交代に現れるものである.. n 次交代符号行列全体の集合を $\mathcal{A}_n$ で表す. 例えば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_5$$

は 5 次の交代符号行列の例である. n 次の交代符号行列 $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ に対して, -1 に等しい成分の個数を $s(A)$ で表し, 第 1 行の 1 が第 k 列にあるとき $p(A) = k - 1$ とする. また

$$\text{inv}(A) = \sum_{i < k} \sum_{j > l} A_{ij} A_{kl}.$$

とおく. 例えば, 交代符号行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して $s(A) = 2$, $p(A) = 1$, $\text{inv}(A) = 5$ である. $\mathcal{A}_n$ の母関数を

$$A(n; q, t, x) = \sum_{A \in \mathcal{A}_n} q^{\text{inv}(A)} t^{p(A)} x^{s(A)}.$$

によって定義する. 例えば

$$A(2; q, t, x) = qt + 1,$$

$$A(3; q, t, x) = q^2(q+1)t^2 + \{q^2x + q(q+1)\}t + q + 1,$$

$$A(4; q, t, x) = q^3\{q^2x + (q+1)(q^2 + q + 1)\}t^3 + q^2\{q^3x^2 + q(q^2 + 4q + 2)x + (q+1)(q^2 + q + 1)\}t^2 \\ + q\{q^2x^2 + q(2q^2 + 4q + 1)x + (q+1)(q^2 + q + 1)\}t + q^2x + (q+1)(q^2 + q + 1).$$

である.

1.2 線対称交代符号行列

$(2n+1)$ 次の左右対称な交代符号行列 (vertically symmetric ASMs または VSASMs と略す) 全体の集合を $\mathcal{A}_{2n+1}^V$ で表す. 左右対称な線対称交代符号行列 A に対して, A が線対称変換で m 個の -1 の軌道を持つとき, $s(A) = m$ とおく. ここで, m は中心線上にある -1 を数えない. また, 第 1 列上にある 1 の場所

が第 k 行であるとき, $p(A) = k - 1$ とおく. 線対称交代符号行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して $s(A) = 2$, $p(A) = 2$ である. $\mathcal{A}_{2n+1}^V$ の母関数を

$$A_V(2n+1; t, x) = \sum_{A \in \mathcal{A}_{2n+1}^V} t^{p(A)} x^{s(A)}.$$

によって定義しよう. 例えば $A_V(3; t, x) = 1$ で

$$A_V(5; t, x) = t^2 + xt + 1,$$

$$A_V(7; t, x) = (x+2)t^4 + 2x(x+2)t^3 + (x+1)(x^2+x+2)t^2 + 2x(x+2)t + x + 2,$$

$$\begin{aligned} A_V(9; t, x) &= (x^3 + 6x^2 + 13x + 6)t^6 + 3x(x^3 + 6x^2 + 13x + 6)t^5 \\ &\quad + (3x^5 + 18x^4 + 44x^3 + 42x^2 + 25x + 6)t^4 + x(x+2)^2(x^3 + 2x^2 + 9x + 6)t^3 \\ &\quad + (3x^5 + 18x^4 + 44x^3 + 42x^2 + 25x + 6)t^2 + 3x(x^3 + 6x^2 + 13x + 6)t + x^3 + 6x^2 + 13x + 6. \end{aligned}$$

である. 次の式を満たすような多項式 $\tilde{A}_V(2n; t, x)$ が存在することが知られている ([3]).

$$A(2n; t, x) = (t+1)A_V(2n+1; t, x)\tilde{A}_V(2n; 1, x),$$

$$A(2n-1; t, x) = A_V(2n-1; 1, x)\tilde{A}_V(2n; t, x).$$

例えば $\tilde{A}_V(2; t, x) = 1$ であり

$$\tilde{A}_V(4; t, x) = 2t^2 + (x+2)t + 2,$$

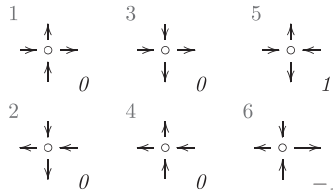
$$\tilde{A}_V(6; t, x) = 2(x+6)t^4 + (x+6)(3x+2)t^3 + (x^3 + 6x^2 + 26x + 12)t^2 + (x+6)(3x+2)t + 2(x+6),$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_V(8; t, x) &= 2(x^3 + 12x^2 + 70x + 60)t^6 + (5x+2)(x^3 + 12x^2 + 70x + 60)t^5 \\ &\quad + 2(2x^5 + 25x^4 + 161x^3 + 352x^2 + 310x + 60)t^4 + (x^6 + 12x^5 + 85x^4 + 452x^3 + 834x^2 + 680x + 120)t^3 \\ &\quad + 2(2x^5 + 25x^4 + 161x^3 + 352x^2 + 310x + 60)t^2 + (5x+2)(x^3 + 12x^2 + 70x + 60)t + 2(x^3 + 12x^2 + 70x + 60). \end{aligned}$$

である.

1.3 六頂点模型

交代符号行列に対応する六頂点模型 (Six vertex model) の各頂点は



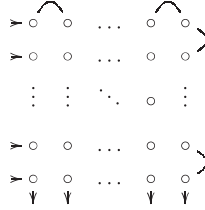
の形をしている. ここで, 普通の交代符号行列に関しては open boundary condition と呼ばれる境界条件を課す. この対応については Bressoud の本 [1] に詳しい. . 例えば下図の左の交代符号行列には, 右の六頂点模型が対応している.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \end{array}$$

この例のように, 上下の境界では外向き, 左右の境界では内向きという条件を open boundary condition という. また, この境界条件の下で上の六種類の頂点を各格子点に置いたものが六頂点模型である.

1.4 ダブル U-ターン交代符号行列

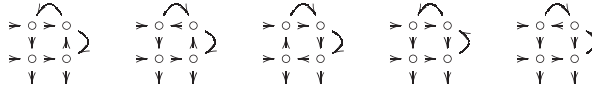
次の図のような境界条件を課した六頂点模型に対応する交代符号行列を**ダブル U-ターン交代符号行列 (UUASM)** という. すなわち, ダブル U-ターン交代符号行列は $2n \times 2n$ 行列で, 各行の右端及び各列の下端で折り返したときに, 交代符号行列の条件を満たす.



$\mathcal{A}_{4n}^{\text{UU}}$ を $4n$ 次の UUASMs 全体の集合とする. u を右端での上向きの U-turn の個数とし, r を上端での右向きの U-turn の個数とする. $x^s y^u z^r$ を重みとした母関数を考え

$$A_{\text{UU}}(4n; x, y, z) = \sum_{A \in \mathcal{A}_{4n}^{\text{UU}}} x^s y^u z^r.$$

とする. ここでは, 六頂点模型と交代符号行列の対応については詳しく述べない. 例えば $n = 1$ のとき, 以下の 5 個の六頂点模型がある:

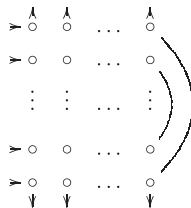


Kuperberg [3] によると, 次を満たす多項式 $A_{\text{UU}}^{(2)}(4n; x, y, z)$ が存在する:

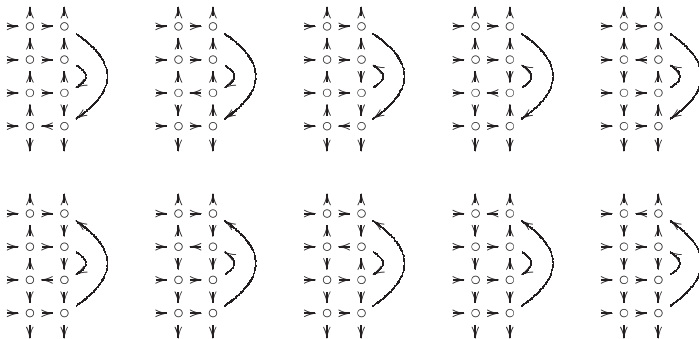
$$A_{\text{UU}}(4n; x, y, z) = A_{\text{V}}(2n+1; t, x) \Big|_{t=1} A_{\text{UU}}^{(2)}(4n; x, y, z)$$

1.5 点対称交代符号行列

$2n \times 2n$ の点対称交代符号行列 (**half-turn-symmetric ASMs** または **HTSASMs**) 全体の集合を $\mathcal{A}_{2n}^{\text{HTS}}$ で表す.. 点対称交代符号行列は, 次の境界条件をみたす $2n \times n$ 六頂点模型に対応する:



例えば $n = 2$ のときは, 次の 10 個の六頂点模型が存在する.



これらの六頂点模型に対応する点対称交代符号行列は以下になる.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

母関数を

$$A_{\text{HT}}(2n; t, x, y, w) = \sum_{A \in \mathcal{A}_{2n}^{\text{HTS}}} t^{k-1} x^m y^u w^v,$$

で定義する. ここで, u は右端での上向きの矢印の数とし, v は (点対称なので左半分のみを考えると) 上半分でゼロでない成分の個数とする. m を点対称変換による -1 の軌道の個数とし, A の第 1 列の 1 の場所を k とする. 例えば, $A_{\text{HT}}(2; t, x, y, w) = wyt + 1$ であり

$$A_{\text{HT}}(4; t, x, y, w) = yz(yz + 1)t^3 + \{yz^3x + yz(yz + 1)\}t^2 + (yzx + yz + 1)t + yz + 1,$$

$$\begin{aligned}
 A_{\text{HT}}(6; t, x, y, w) = & \left\{ y^2 z^2 (z^2 + 1)x + 2yz(yz + 1)^2 \right\} t^5 \\
 & + \left\{ y^2 z^4 (z^2 + 2)x^2 + yz(y^2 z^4 + 6yz^3 + 2yz + 4z^2 + 1)x + 2yz(yz + 1)^2 \right\} t^4 \\
 & + \left\{ x^3 y^2 z^6 + yz^3(yz^3 + 3yz + 2z^2 + 2)x^2 + yz^2(7z^2 y + 3y + 8z)x + 2yz(yz + 1)^2 \right\} t^3 \\
 & + \left\{ x^3 yz^3 + yz(2yz^3 + 2yz + 3z^2 + 1)x^2 + yz(8yz + 3z^2 + 7)x + 2(yz + 1)^2 \right\} t^2 \\
 & + \left\{ yz(2z^2 + 1)x^2 + (y^2 z^4 + 4y^2 z^2 + 2yz^3 + 6yz + 1)x + 2(yz + 1)^2 \right\} t \\
 & + (z^2 + 1)yzx + 2(yz + 1)^2.
 \end{aligned}$$

Kuperberg [3] に書いてあることの拡張として, 次を満たす多項式 $A_{\text{HT}}^{(2)}(2n; t, x, y)$ が存在すると考えられる:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{HT}}(2n; t, x, y, w) \Big|_{w=1} &= A(n; t, x) A_{\text{HT}}^{(2)}(2n; t, x, y), \\
 A_{\text{HT}}(2n; t, x, y, w) \Big|_{w=-1} &= A(n; t, x) A_{\text{HT}}^{(2)}(2n; t, x, -y).
 \end{aligned}$$

Masao Ishikawa (Okayama University)

この式を使って計算すると、例として $A_{\text{HT}}^{(2)}(2; t, x, y) = yt + 1$ であり

$$A_{\text{HT}}^{(2)}(4; t, x, y) = y(y+1)t^2 + txy + y + 1,$$

$$A_{\text{HT}}^{(2)}(6; t, x, y) = y \left\{ xy + (y+1)^2 \right\} t^3 + xy \left\{ xy + 2(y+1) \right\} t^2 + xy \left\{ x + 2(y+1) \right\} t + xy + (y+1)^2,$$

$$\begin{aligned} A_{\text{HT}}^{(2)}(8; t, x, y) &= y \left\{ y(y+1)x^2 + 5y(y+1)x + (y+1)^3 \right\} t^4 \\ &+ xy \left\{ y(y+2)x^2 + 3y(2y+3)x + 3(y+1)^2 \right\} t^3 + xy \left\{ x^3y + 4x^2y + 3(y^2 + 3y + 1)x + 3(y+1)^2 \right\} t^2 \\ &+ xy \left\{ (2y+1)x^2 + 3(3y+2)x + 3(y+1)^2 \right\} t + y(y+1)x^2 + 5y(y+1)x + (y+1)^3 \end{aligned}$$

また、次の等式をみたす多項式 $\tilde{A}_{\text{UU}}^{(2)}(4n; t, x)$ が存在する:

$$A_{\text{HT}}^{(2)}(4n+2; t, x, y) \Big|_{y=1} = (t+1) A_{\text{UU}}^{(2)}(4n; x, y, z) \Big|_{y=z=1} \tilde{A}_{\text{UU}}^{(2)}(4n+4; t, x)$$

この式を使って計算すると、例として $\tilde{A}_{\text{UU}}^{(2)}(4; t, x) = 1$ であり

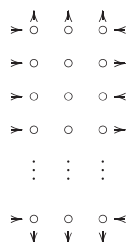
$$\tilde{A}_{\text{UU}}^{(2)}(8; t, x) = t^2 + (x-1)t + 1$$

$$\tilde{A}_{\text{UU}}^{(2)}(12; t, x) = (x+1)t^4 + (x+1)(2x-1)t^3 + (x^3 + x + 1)t^2 + (x+1)(2x-1)t + x + 1$$

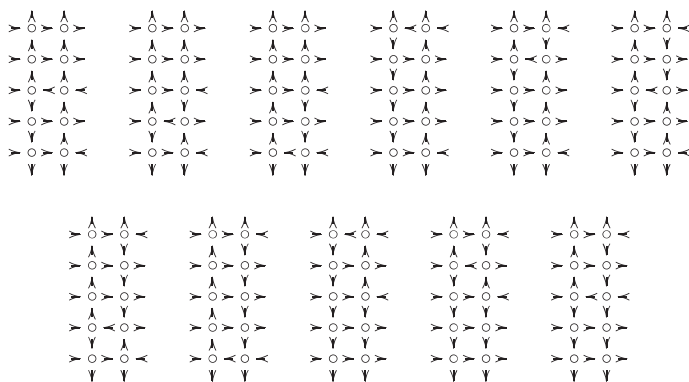
となる。

1.6 瑕つき線対称交代符号行列

[2] で考察された、次の境界条件を課した $(2n+1) \times n$ の六頂点模型を考える。



この境界条件は $2n + n = 3n$ 本の外向きへの矢印と $(2n+1) + (n+1) = 3n+2$ 本の内向きの矢印があるので、内向きの矢印が 2 本多い.. そこで右端の壁の $n+1$ 本の内向きの矢印のうちの 1 本を外向きに変える。この変えた場所を「瑕」という。例えば $n=2$ のときは、次のような条件をみたす 11 個の六頂点模型がある。



これらの例に対応する交代符号行列は以下のようになる:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

対応する交代符号行列の集合を $\mathcal{A}_{2n+1}^{\text{dVS}}$ によって表す. また, 母関数を

$$A_{\text{dV}}(2n+1; t, x, z) = \sum_{A \in \mathcal{A}_{2n+1}^{\text{dVS}}} t^{k-1} x^s z^{w-1},$$

で定義する. ここで s は -1 の個数である. また, 第 1 列の 1 の場所を k とし, 「瑕」の場所を $2w-1$ とする. 例として, $A_{\text{dV}}(3; t, x, z) = zt^2 + 1$ であり,

$$\begin{aligned} A_{\text{dV}}(5; t, x, z) &= z(z+1)t^4 + z(z+1)xt^3 + (z^2+xz+1)t^2 + x(z+1)t + z + 1 \\ A_{\text{dV}}(7; t, x, z) &= z\{(z^2+3z+1)x + 2(z^2+z+1)\}t^6 + \{2z(z^2+3z+1)x^2 + 4zx(z^2+z+1)\}t^5 \\ &\quad + \{z(z^2+3z+1)x^3 + 2z(z^2+2z+2)x^2 + (3z^3+5z^2+4z+1)x + 2z^3+2z^2+2\}t^4 \\ &\quad + 2(z+1)x\{zx^2 + (z+1)^2x + 2(z^2+1)\}t^3 + \{(z^2+3z+1)x^3 + (4z^2+4z+2)x^2 \\ &\quad + (z^3+4z^2+5z+3)x + 2z^3+2z+2\}t^2 + \{(2z^2+6z+2)x^2 + (4z^2+4z+4)x\}t \\ &\quad + (z^2+3z+1)x + 2(z^2+z+1). \end{aligned}$$

とする.

1.7 まとめ

[3] には, 他にもいろいろな対称性を考慮した交代符号行列が考察されているが, ここに関係したものだけをとり上げる. これらの個数について以下の表にまとめられる:

n	1	2	3	4	5	6	OEIS
$A(n; 1, 1, 1, 1)$	1	2	7	42	429	7436	A005130
$A_V(2n+1; 1, 1)$	1	3	26	646	45885	9304650	A005156
$A_V(2n; 1, 1)$	1	7	143	8398	1411510	677688675	
$A_{\text{HT}}(4n; 1, 1, 1)$	5	198	63206	163170556	3410501048325	577465332522075000	A107445
$A_{\text{HT}}^{(2)}(4n; 1, 1, 1)$	5	66	2431	252586	74327145	62062015500	A059489
$A_{\text{HT}}(2n; 1, 1, 1)$	2	10	140	5544	622908	198846076	A059475
$A_{\text{HT}}^{(2)}(2n; 1, 1, 1)$	2	5	20	132	1452	26741	A006366
$A_{\text{HT}}^{(2)}(4n; 1, 1, 1)$	2	11	170	7429	920460	323801820	A051255
$A_{\text{dV}}(2n+1; 1, 1, 1)$	2	11	170	7429	920460	323801820	A051255

2 平面分割

2.1 平面分割

平面分割とは, 非負整数の二次元配列 $(\pi_{i,j})_{i,j \geq 1}$ で, 各行について左から右に非減少, 各列について上から下に非減少であるもの, すなわち,

$$\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1} \quad \text{and} \quad \pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j} \quad \text{for all } i \text{ and } j,$$

であり, ゼロでない成分は有限個であるもの. ゼロでない成分を **part** といい, 和 $|\pi| = \sum_{i,j \geq 1} \pi_{i,j}$ を重み (**weight**) という. $\lambda_i = \#\{j \mid \pi_{ij} \neq 0\}$ によって定義される分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ を π の形 (**shape**) といひ, $\text{sh}(\pi)$ と書く. 例えば

$$\pi = \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & \\ 2 & 1 & & \end{array}$$

は形が 432 で、重みが $|\pi| = 22$ の平面分割である。平面分割 $(\pi_{i,j})_{i,j \geq 1}$ が行減少 (**row-strict**) (または列減少 (**column-strict**)) とは $\pi_{i+1,j} > \pi_{i,j}$ (または $\pi_{i,j+1} > \pi_{i,j}$) が成り立つことである。ただし、この両辺が定義される範囲で成り立てばよい。 π の フェラーズ図形 (**Ferrers graph**) は

$$F(\pi) = \{(i, j, k) \mid i, j \geq 1, 1 \leq k \leq \pi_{i,j}\} \subseteq \mathbb{Z}^3$$

によって定義される。例えば、上の平面分割のフェラーズ図形は下図のようになる。



平面分割 $(\pi_{i,j})_{i,j \geq 1}$ の形が $(n, n-1, \dots, 1)$ のとき、 n -階段型 (n -staircase) という。また

$$\mathfrak{B}_{l,m,n} = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}.$$

とおく。 $F(\pi) \subseteq \mathfrak{B}_{l,m,n}$ のとき、単に $\pi \subseteq \mathfrak{B}_{l,m,n}$ と書く。

2.2 ずれ平面分割

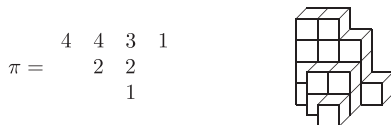
ずれ平面分割 (**shifted plane partition**) とは $i \leq j$ に対して定義された非負整数の二次元配列 $(\pi_{i,j})_{1 \leq i \leq j}$ であり、普通の平面分割同様に、各行について左から右に非減少、各列について上から下に非減少であるものである。前と同様に $|\pi| = \sum_{1 \leq i \leq j} \pi_{i,j}$ をずれ平面分割の **重み (weight)** という。 $\mu_i = \#\{j \mid \pi_{i,j} \neq 0\}$ によって定義される strict partition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ を π の **形 (shape)** といい $\text{ssh}(\pi)$ で記す。また $(\pi_{1,1}, \pi_{2,2}, \dots)$ によって定義される strict partition を $\text{pr}(\pi)$ と記し、 π の **profile** という。例えば

$$\pi = \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 3 & 1 \\ & 2 & 2 & \\ & & 1 & \end{array}$$

は形が 421 で重みが $|\pi| = 18$ のずれ平面分割である。行減少や列減少も同様に定義される。 π の フェラーズ図形 は

$$F(\pi) = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i \leq j, 1 \leq k \leq \pi_{i,j}\}.$$

によって定義される。例えば下図のようである。



ずれ平面分割 $(\pi_{i,j})_{i,j \geq 1}$ の形が $(n, n-1, \dots, 1)$ のとき、 n -階段的 (n -staircase) と呼ぶことも同様である。

$$\mathfrak{S}\mathfrak{B}_{m,n} = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}.$$

とおき、 $\pi \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{B}_{m,n}$ は $F(\pi) \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{B}_{m,n}$ の意味である。

2.3 Cyclically (m, n) -twisted shifted plane partition

$\mathfrak{S}\mathfrak{B}_{n,2m}$ に含まれる n -階段的ずれ平面分割 $\pi = (\pi_{i,j})_{1 \leq i \leq j}$ が

$$(i, j, k) \in F(\pi) \Leftrightarrow (j, k-2m, i) \in F(\pi)$$

をみたすとき π は **cyclically (m, n) -twisted** という。 ($m=1$ のときは Mills-Robbins-Rumsey [4, 5] によって定義された。) cyclically (m, n) -twisted なずれ平面分割の集合を $\mathcal{C}_{m,n}$ によって表す。 $i+m \leq \pi_{i,j} < j+m$

をみたす成分 π_{ij} を, 特別 (**special**) と呼び, 特別成分の個数を $s(\pi)$ によって表す. また, 第 1 行になる $n + 2m$ に等しい成分の個数を $p(\pi)$ によって表す, $\pi_{ij} \geq i + m$ をみたす成分の個数を $\text{inv}(\pi)$ で表し, 主対角線の成分で $\pi_{ii} \geq i + m$ をみたすものの個数を $\text{des}(\pi)$ で表す.

$\begin{array}{ccc} 5 & 5 & \mathbf{3} \\ 5 & \mathbf{3} & \\ 0 & & \end{array}$
 は 2 個の special part を持ち, 2 個の最大元 5 を第 1 行にもつ,
 $\geq i + m$ である成分は 5 個あり, $\geq i + m$ である成分が主対角線上に 2 個ある.
 $(m = 1, n = 3 \text{ とする})$

$m = 0, n = 2$ のとき, cyclically $(0, 2)$ -twisted ずれ平面分割は 5 個ある:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 2 & \\ \langle 0, 0, 0, 0 \rangle & \langle 0, 0, 1, 1 \rangle & \langle 1, 1, 1, 2 \rangle & \langle 2, 0, 1, 2 \rangle & \langle 2, 0, 2, 3 \rangle \end{array}$$

$m = 1, n = 2$ のとき, cyclically $(1, 2)$ -twisted ずれ平面分割は 7 個ある:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & \mathbf{2} & 4 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 4 & \\ \langle 0, 0, 0, 0 \rangle & \langle 0, 0, 1, 1 \rangle & \langle 1, 0, 1, 1 \rangle & \langle 1, 1, 1, 2 \rangle & \langle 1, 0, 1, 2 \rangle & \langle 2, 0, 1, 2 \rangle & \langle 2, 0, 2, 3 \rangle \end{array}$$

2.4 (m, n) -profile-shape column-strict shifted plane partition

$\mathfrak{S}\mathfrak{B}_{n, n+2m}$ に含まれる n -階段的で列減少なずれ平面分割 $\pi = (\pi_{ij})_{1 \leq i \leq j}$ が

$$\pi_{ii} = \mu_i + 2m \quad \text{where } \mu \text{ is the shape of } \pi$$

をみたすとき π は (m, n) -profile-shape 列減少ずれ平面分割 ((m, n) -profile-shape column-strict shifted plane partition) または (m, n) -profile-shape ずれ平面分割 ((m, n) -profile-shape shifted plane partition) ということにする. ($m = 1$ の場合は Mills-Robbins-Rumsey [4, 5] によって定義された.) (m, n) -profile-shape ずれ平面分割全体の集合を $\mathcal{D}_{m, n}$ と記す. $1 + m \leq \pi_{ij} \leq j - i + m$ をみたす成分 π_{ij} を特別 (**special**) といい, $\pi_{ij} = n + 2m$ である成分 π_{ij} を, 極大 (**maximal**) という. 特別成分の個数を $s(\pi)$, 極大成分の個数を $p(\pi)$ で表す. m より大きい成分の個数を $\text{inv}(\pi)$, π の行の数を $\text{des}(\pi)$ で表す.

$\begin{array}{ccc} 5 & 5 & \mathbf{3} \\ 4 & \mathbf{2} & \end{array}$
 は 2 個の特別成分, 2 個の極大成分を持ち,
 ≥ 2 である成分は 5 個, 行数は 2 である. ($m = 1, n = 3$ とする)

$m = 0, n = 2$ のとき, $(0, 2)$ -profile-shape ずれ平面分割は 5 個ある:

$$\begin{array}{ccccc} \emptyset & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & & & & & 1 & \\ \langle 0, 0, 0, 0 \rangle & \langle 0, 0, 1, 1 \rangle & \langle 1, 1, 1, 2 \rangle & \langle 2, 0, 1, 2 \rangle & \langle 2, 0, 2, 3 \rangle \end{array}$$

$m = 1, n = 2$ のとき, $(1, 2)$ -profile-shape ずれ平面分割は 7 個ある:

$$\begin{array}{ccccccc} \emptyset & 3 & 4 & 1 & 4 & \mathbf{2} & 4 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ & & & & & & & & & & & 3 & \\ \langle 0, 0, 0, 0 \rangle & \langle 0, 0, 1, 1 \rangle & \langle 1, 0, 1, 1 \rangle & \langle 1, 1, 1, 2 \rangle & \langle 1, 0, 1, 2 \rangle & \langle 2, 0, 1, 2 \rangle & \langle 2, 0, 2, 3 \rangle \end{array}$$

Theorem 2.1. 次で定義される $a = (a_{ij}) \in \mathcal{C}_{m, n}$ から $b = (b_{ij}) = \Phi(a) \in \mathcal{D}_{m, n}$ への写像は $\mathcal{C}_{m, n}$ から $\mathcal{D}_{m, n}$ への全単射を与える.

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - i + 1 & \text{if } a_{ij} \geq i - 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この全単射によって $s(\pi)$, $p(\pi)$, $\text{inv}(\pi)$, $\text{des}(\pi)$ は保存される.

$\mathcal{D}_{m, n}$ (または $\mathcal{C}_{m, n}$) の母関数を

$$F_{m, n}(q, t, x, y) = \sum_{\pi \in \mathcal{D}_{m, n}} q^{\text{inv}(\pi)} t^{p(\pi)} x^{s(\pi)} y^{\text{des}(\pi)}.$$

Masao Ishikawa (Okayama University)

によって定義する. 例えば $m = 0$ のとき, 次のようになる:

$$\begin{aligned} F_{0,2}(q, t, x, y) &= qty + 1 \\ F_{0,3}(q, t, x, y) &= q^2y(qy + 1)t^2 + q^2txy + qy + 1 \\ F_{0,4}(q, t, x, y) &= q^3y\{q^2xy + (qy + 1)(q^2y + 1)\}t^3 + q^3xy\{q^2xy + 2(qy + 1)\}t^2 \\ &\quad + q^3xy\{x + 2(qy + 1)\}t + q^2xy + (qy + 1)(q^2y + 1) \end{aligned}$$

$m = 1$ のときは次のようになる.

$$\begin{aligned} F_{1,2}(q, t, x, y) &= qty + 1 \\ F_{1,3}(q, t, x, y) &= q^2y(qy + 1)t^2 + qy\{qx + (q + 1)\}t + qy + 1 \\ F_{1,4}(q, t, x, y) &= \{q^5xy^2 + q^3y(q^3y^2 + 2q^2y + 2qy + 1)\}t^3 \\ &\quad + q^2y\{q^3x^2y + q(q^2y + 4qy + 2)x + (q + 1)(q^2y + qy + 1)\}t^2 \\ &\quad + qy\{q^2x^2 + q(2q^2y + 4q + 1)x + (q + 1)(q^2y + q + 1)\}t \\ &\quad + q^2xy + q^3y^2 + 2q^2y + 2qy + 1 \end{aligned}$$

$m = 1$ のとき, $\mathcal{D}_{1,n}$ と order $n + 1$ の descending plane partitions の間に全単射を作ることができる.

Theorem 2.2. (i) $m = 0$ のときは, $n \times n$ 行列 $A_{0,n} = (a_{i,j}(q, t, x, y))_{1 \leq i, j \leq n}$ を

$$a_{i,j}(q, t, x, y) = \begin{cases} q^j y \sum_{k=1}^j \binom{i-1}{k-1} \binom{j-1}{k-1} x^{j-k} & \text{if } i < n, \\ q^j y \sum_{1 \leq \nu \leq k \leq j} \binom{i-\nu-1}{k-\nu} \binom{j-1}{k-1} t^\nu x^{j-k} & \text{if } i = n, \end{cases}$$

によって定義する. このとき

$$F_{0,n}(q, t, x, y) = \det(I_n + A_{0,n}).$$

が成り立つ.

(ii) $m > 0$ のときは, $n \times n$ 行列 $A_{m,n} = (a_{i,j}(q, t, x, y))_{1 \leq i, j \leq n}$ を

$$a_{i,j}(q, t, x, y) = \begin{cases} y \sum_{1 \leq k \leq l \leq j} \binom{i+m-1}{k-1} \binom{l-1}{k-1} \binom{j-l+m-1}{j-l} q^l x^{l-k} & \text{if } i < n, \\ y \sum_{1 \leq \nu \leq k \leq l \leq j} \binom{i+m-\nu-1}{k-\nu} \binom{l-1}{k-1} \binom{j-l+m-1}{j-l} q^l t^\nu x^{l-k} & \text{if } i = n, \end{cases}$$

によって定義すると

$$F_{m,n}(q, t, x, y) = \det(I_n + A_{m,n}).$$

が成り立つ.

$F_{m,n}(1, 1, 1, 1)$ の値を表にすると以下ようになる:

n	1	2	3	4	5	6	OEIS
$m = 0$	2	5	20	132	1452	26741	A006366
$m = 1$	2	7	42	429	7436	218348	A005130
$m = 2$	2	9	72	1040	26000	1130500	
$m = 3$	2	11	110	2125	72250	4420255	A051255

また, $F_{m,n}(q, t, x, y)$ において, $m = 1$ のとき, $x = 0, q = t = 1$ とおくと

$$F_{1,n}(1, 1, 0, y) = (1 - y)^{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} (j + 1)^n y^j$$

となる. これは, 対称群の Eulerian polynomial $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} y^{\text{des}(\sigma)}$ と一致する. この多項式は以下の表のようになる:

n	1	2	3	4
$F_{1,n}(1, 1, 0, y)$	$y + 1$	$y^2 + 4y + 1$	$y^3 + 11y^2 + 11y + 1$	$y^4 + 26y^3 + 66y^2 + 26y + 1$

2.5 (m, n) -transpose complement

cyclically (m, n) -twisted ずれ平面分割 $\pi = (\pi_{ij})_{1 \leq i \leq j} \in \mathcal{C}_{m,n}$ に対して, その (m, n) -擬補完 ((m, n) -transpose complement) $\pi' = (\pi'_{ij})_{1 \leq i \leq j} \in \mathcal{C}_{m,n}$ を

$$(i, j, k) \in F(\pi') \iff (n+1-j, n+1-i, n+2m+1-k) \notin F(\pi),$$

によって定義する. すなわち

$$\pi'_{ij} + \pi_{n+1-j, n+1-i} = n+2m \quad \text{for } 1 \leq i \leq j \leq n,$$

によって決まる $\pi' = (\pi'_{ij})_{1 \leq i \leq j}$ が (m, n) -擬補完である. $\pi \mapsto \pi'$ によって決まる写像を $\varphi_{m,n}$ と書く. この写像は well-defined で involution である例えば,

$$\pi = \begin{array}{ccc} 5 & 5 & 3 \\ & 5 & 3 \\ & & 0 \end{array} \mapsto \pi' = \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{array}$$

である. cyclically $(m, 2n)$ -twisted ずれ平面分割 $\pi = (\pi_{ij})_{1 \leq i \leq j} \in \mathcal{C}_{m,2n}$ が $(m, 2n)$ -擬自己補完 ($(m, 2n)$ -transpose self-complement) とは $\varphi_{m,2n}(\pi) = \pi$ が成り立つことである. $(m, 2n)$ -擬自己補完なずれ平面分割全体の集合を $\mathcal{S}_{m,n}$ と書く. 例えば $m=1, n=3$ のとき, 次の 11 個である:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} 0 \ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 0 \\ 0 \end{array} \\ \langle 0, 3 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 2, 1 \rangle & \langle 2, 2 \rangle & \langle 3, 1 \rangle & \langle 2, 2 \rangle \\ \\ \begin{array}{c} 2 \ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 2 \\ 1 \end{array} & \\ \langle 3, 1 \rangle & \langle 3, 2 \rangle & \langle 4, 1 \rangle & \langle 4, 1 \rangle & \langle 5, 0 \rangle & \end{array}$$

2.6 (m, n) -restricted plane partition

平面分割 $\pi = (\pi_{ij})_{i,j \geq 1}$ が m -bounded とは

$$0 \leq \pi_{ij} \leq m-i+1.$$

をみたすこととする. $(n+m)$ -bounded な n -階段的平面分割全体の集合を $\mathcal{T}_{m,n}$ と記す. $\mathcal{T}_{m,n}$ の元を (m, n) -制限的 ((m, n) -restricted) 平面分割という. $\pi_{ij} < j$ をみたす成分 π_{ij} を 特別 (special) という. 例えば $m=0, n=3$ のとき, 次の 11 個ある:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} 0 \ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 0 \\ 0 \end{array} \\ \langle 0, 3 \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 2, 1 \rangle & \langle 2, 2 \rangle & \langle 3, 1 \rangle & \langle 2, 2 \rangle \\ \\ \begin{array}{c} 2 \ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \ 2 \\ 1 \end{array} & \\ \langle 3, 1 \rangle & \langle 3, 2 \rangle & \langle 4, 1 \rangle & \langle 4, 1 \rangle & \langle 5, 0 \rangle & \end{array}$$

Theorem 2.3. $a = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_{m,n}$ から $b = (b_{ij}) = \Phi(a) \in \mathcal{T}_{m,n}$ への写像 Ψ を

$$b_{ij} = a_{i,j+n} - (n+m) \quad (1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-i)$$

によって定義すると, これは $\mathcal{S}_{m,n}$ から $\mathcal{T}_{m,n}$ への全単射を与える. この全単射によって $s(\pi)$ は不変である.

$\mathcal{T}_{m,n}$ の母関数 $G_{m,n}(x)$ を

$$G_{m,n}(x) = \sum_{\pi \in \mathcal{T}_{m,n}} x^{s(\pi)}.$$

によって定義しよう $m=0$ のときは $G_{0,0}(x) = 1$ であり, また

$$\begin{aligned} G_{0,1}(x) &= x+1, \\ G_{0,2}(x) &= x^3+4x^2+5x+1, \\ G_{0,3}(x) &= x^6+9x^5+34x^4+62x^3+49x^2+14x+1. \end{aligned}$$

Masao Ishikawa (Okayama University)

である。また、 $m = 1$ のときは $G_{1,0}(x) = 1$ であり、

$$\begin{aligned} G_{1,1}(x) &= x + 2, \\ G_{1,2}(x) &= x^3 + 6x^2 + 13x + 6, \\ G_{1,3}(x) &= x^6 + 12x^5 + 63x^4 + 176x^3 + 234x^2 + 136x + 24 \end{aligned}$$

である。さらに、 $m = 2$ のときは、 $G_{2,0}(x) = 1$ であり、

$$\begin{aligned} G_{2,1}(x) &= x + 3, \\ G_{2,2}(x) &= x^3 + 8x^2 + 24x + 17, \\ G_{2,3}(x) &= x^6 + 15x^5 + 100x^4 + 366x^3 + 666x^2 + 559x + 155. \end{aligned}$$

である。また $G_{m,n}(1)$ の表は、以下ようになる：

n	1	2	3	4	5	6	OEIS
$m = 0$	2	11	170	7429	920460	323801820	A051255
$m = 1$	3	26	646	45885	9304650	5382618660	A005156
$m = 2$	4	50	1862	202860	64080720	1130500	
$m = 3$	5	85	4508	720360	340695828	471950744980	

Theorem 2.4. 母関数 $G_{m,n}(x)$ は

$$G_{m,n}(x) = \det \left(\sum_{k \geq 0} \binom{i+m}{k-i+1} \binom{j}{k-j+1} x^{2j-k-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

によって与えられる。

References

- [1] Davis M. Bressoud, *Proofs and Confirmations — The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press (1999) .
- [2] J. de Gier, “Loops, matchings and alternating-sign matrices”, *Discrete Math.*, **298** (2005) 365 – 388.
- [3] G. Kuperberg, “Classes of Alternating-Sign Matrices under One Roof”, *Ann. of Math.*, **156** (2002) 835 – 866.
- [4] W.H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr., “Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **34** (1983) 340 – 359.
- [5] W.H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr., “Enumeration of a Symmetry Class of Plane Partitions”, *Discrete Math.*, **67** (1987) 43 – 55.
- [6] S. Okada, “Enumeration of Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices and Characters of Classical Groups”, *J. Algebraic Combin.*, **23** (2006) 43 – 69.
- [7] V Reiner, “The distribution of descents and length in a Coxeter group”, *Electr. J. Comb.*, **2** (1995) #R25.
- [8] J. Striker and N. Williams, “Promotion and rowmotion”, *European J. Combin.*, **33** (2012) 1919 – 1942.
- [9] D. Robbins, “Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices”, [arxiv:0008045](https://arxiv.org/abs/0008045).