

柱状領域の変形による Δ の振動について

東大大学院 植松 日子太郎

§ 1. 序

semi-infinite cylinder $S = \{x = (\tilde{x}, x_n); \tilde{x} \in \mathcal{L}, x_n \geq 0\}$

$\mathcal{L}$; $n-1$ dimensional bounded domain

での Δ と, その変形した領域 Ω での Δ を比較する.

Goldstein (1) がこの問題をあつかっているが Ω が

$\Omega \subset S$ かつ $x_n \geq k > 0$ で $\Omega = S$ というつよい制限なの

でそれより一般の場合を考える. その方法は Ω から S への

変数変換を考えて, Δ を S での 2 階微分作用素に unitary

変換して, この 2 階微分作用素としての Δ とを比較する

このとき証明の方法は Kuroda (3) の方法をつかう.

§ 2.

記号と定義

$$\mathcal{L} = L^2(S), \quad \|f\|_{\mathcal{L}}^2 = \int_S |f(x)|^2 dx$$

$$H_1 u = -\Delta u \quad \mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}_2^1(S) \cap \mathcal{E}_2^2(S)$$

すなわち Goldstein より

$$h_\ell u = -\Delta u \quad u \in \mathcal{D}_2^1(\ell) \cap \mathcal{E}_2^2(\ell)$$

とあき、 h_ℓ の固有値 $\{\nu_n\}$, $(\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \dots)$,

固有函数 $\{\psi_n(\vec{x})\}$ とする。

$$(T_0 f)_m(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \overline{w_m^0(x; \xi)} f(x) dx$$

$$w_m^0(x; \xi) \equiv \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin \xi x \cdot \psi_m(\vec{x})$$

とあければ、 T_0 は

$$L^2(S) \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \oplus L_2(0, \infty) \equiv H'$$

への Unitary operator で $T_0 H_1 f = \{(\xi^2 + \nu_m)(T_0 f)_m(\xi)\}$

すなわち、各 m ごとに $\xi^2 + \nu_m = \mu$ と変数変換を考えて

次のように定義する

def.

$$F f = \left\{ (T_0 f)_m (\mu - \nu_m)^{1/2} \frac{1}{2^{1/2} (\mu - \nu_m)^{1/4}} \right\} \quad \text{とあき}$$

F は

$L^2(S') \rightarrow H \equiv \bigoplus_{m=1}^{\infty} L^2(\nu_m, \infty)$ への Unitary operator で

$$F H_1 f = \{ \mu (F f)_m(\mu) \} \quad \text{但し } \|f_n\|_H^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\nu_m}^{\infty} |f_m(\mu)|^2 d\mu$$

すなわち F は非摂動作用素 H_1 のスペクトル表示を与える
と考えられる。

さて,

$$u \in \mathcal{D}_L^1(S) \cap \mathcal{E}_L^2(S) \text{ とし,}$$

$$H_2 u = - \sum_{i,k}^n \partial_i a_{ik}(x) \partial_k u + q(x) u$$

$$= = \tilde{c}, \quad \alpha_{ik}(x) = \delta_{i,k} - a_{i,k}(x) \text{ とおす,}$$

条件 1,

$\{ \alpha_{ik}(x) \}$ real uniformly positive definite symmetric
matrix valued smooth function,

$q(x)$ smooth function,かつ

$$|q(x)| \leq \frac{C}{(1+x_n)^\alpha}, \quad |\alpha_{ik}(x)| \leq \frac{C}{(1+x_n)^\alpha}$$

$$\alpha > 0$$

定理 1.

上の条件の $\alpha > 1$

$\Rightarrow H_1$ と $H_{2,ac}$ は unitary 同値.

さらに

条件 2 $|\partial_k \alpha_{ki}(x)| \leq \frac{C}{(1+x_n)^\alpha}$ となる $\alpha > 1$ が存在.

ならば 以下のことがなりたつ

(i) 函数 $W_m(x; \xi)$ が存在して 次の性質をみたす.
($m=1, 2, 3, \dots$)

$$a) \quad \frac{W_m(x; \xi)}{(1+x_n)^{1+\varepsilon}} \in L^2(S) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$b) \chi(x) w_m(x; \xi) \in \mathcal{D}_{L^1}(S) \cap \mathcal{E}_{L^2}(S)$$

$$\text{但し} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & b \leq x \end{cases} \quad \chi(x) \in \mathcal{E}^\infty$$

$$= 0 \quad b \leq x \quad 0 < a < b$$

a, b は任意にとれる

$$c) - \sum_{i,k} \partial_i a_{ik}(x) \partial_k w_m(x; \xi) + q(x) w_m(x; \xi) = (\xi^2 + V_m) w_m(x; \xi)$$

(ii) $\forall u \in \mathcal{H}_{2,ac}$ に対して ($\mathcal{H}_{2,ac}$ は H_2 に関する絶対連続部分空間)

$$Tu = \{\hat{u}_m(\xi)\} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^L \int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{w_m(x; \xi)} dx \right\}$$

とある。但し $\{f_n\}$ は $H' = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_2(0, \infty)$ の意味

$$\| \{f_n\} \|_{H'}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(\xi)|^2 d\xi$$

T は $\mathcal{H}_{2,ac}$ から H' の上への Unitary operator となる

iii)

$u \in \mathcal{H}_{2,ac} \cap \mathcal{D}(H_2)$ に対して

$$(H_2 u)_m^\wedge(\xi) = (\xi^2 + V_m) \hat{u}_m(\xi)$$

定理 2.

条件 1 が $\alpha > 2$ に対してなりたつ

$\Rightarrow H_2$ の singular spectrum は $(0, \infty)$ で discrete.

まづ定理1の前半の部分の証明をする。

$$H_2 u = H_1 u + A^* C A u \quad u \in \mathcal{D}_2^1(S) \cap \mathcal{E}_2^2(S)$$

とかく。

== じ,

$$\text{def. } A : \mathcal{X} \supset \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{X}' \equiv \underbrace{\mathcal{X} \oplus \mathcal{X} \oplus \cdots \oplus \mathcal{X}}_{n+1 \text{ 回}}$$

$$A u = (A_1 u, A_2 u, \dots, A_{n+1} u)$$

$$\text{但し } A_j u = \frac{\sqrt{-1}}{(1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}}} \partial_j u, \quad A_{n+1} u = \frac{1}{(1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}}} u$$

$$C : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}' \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) \in \mathcal{X}' \mapsto \tilde{u}$$

$$C u = \left(\sum_{j=1}^{n+1} C_{1,j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} C_{n+1,j} u_j \right)$$

== じ,

$$C_{i,j} u(x) = \alpha_{i,j}(x) (1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}} u_j(x) \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$$

$$C_{n+1,n+1} u(x) = \xi(x) (1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}} u(x)$$

$$C_{i,n+1} u(x) = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

さて一般に operator T の closure を T^a とかく。

$$\text{又 } (H_1 - z)^{-1} = R_1(z) \quad \text{とかく,}$$

定理1の前半の部分は Kuroda より $\operatorname{Im} z \neq 0$ で

$$[A R_1(-1) R_1(z) A^*]^a, \quad \text{compact operator}$$

と, $z = \lambda + i\varepsilon$ とするとき,

$[A R_1(-1) R_1(z) A^*]^a$ が $\varepsilon \rightarrow 0$ のときノルム

の意味で極限値をもつことをいえよ.

(注意. $[A R_1(z) A^*]^a$ が compact がいまの場合示せないので $[A R_1(-1) R_1(z) A^*]^a$ を考えることになる)

以下上の二つを目標にする.

def. $\nu_N < \lambda < \nu_{N+1}$ のとき

$$G(\lambda)A = \{h_1(\lambda), \dots, h_N(\lambda), 0, 0, \dots\}$$

$$h \in S = \{ \{s_x\} ; \|s_x\|_H < \infty \text{ かつ } s_x \text{ continuous function} \}$$

$G(\lambda)$ は S から ℓ^2 への operator

def.

$$T_i(\lambda)u = G(\lambda)F(A_i^*u)$$

もちろん, すべての $u \in L^2(S)$ について $T_i(\lambda)u$ が定義できるとはおぼろしいが, 次の lemma 1 より実は可能.

lemma 1.

条件 1 の $\alpha > 1$, $\nu_N < \lambda < \nu_{N+1}$

$$\Rightarrow \|T_i(\lambda)u\|_{\ell^2} \leq \frac{C_N}{(\lambda - \nu_N)^{1/4}} \|u\|_{\mathcal{H}}$$

C_N は $\lambda \in (\nu_N, \nu_{N+1})$ によるない.

証明. $u \in C_0^\infty(S)$ とする.

定義より

$$\|T_i(\lambda)u\|_{\ell^2}^2 = \sum_{m=1}^N |(FA_i^* u)_m(\lambda)|^2$$

$$\|(FA_i^* u)_m(\lambda)\|^2 = \left| \int \overline{w_m^0(x; (\lambda - \nu_m)^{1/2})} A_i^* u(x) dx \right|^2 \frac{1}{2(\lambda - \nu_m)^{1/2}}$$

$1 \leq i \leq N$ のとき,

$$A_i^* u(x) = \sqrt{-1} \partial_i \frac{1}{(1+x_N)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot u(x) \quad \text{だから部分積分より}$$

$$|(FA_i^* u)_m(\lambda)|^2 = \begin{cases} \left| \int \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin((\lambda - \nu_m)^{1/2} x_N) \partial_i \tilde{w}_m(\tilde{x}) \frac{1}{(1+x_N)^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot u(x) dx \right|^2 \frac{1}{2(\lambda - \nu_m)^{1/2}} & i \neq N \\ \left| \int \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (\lambda - \nu_m)^{1/2} \cos((\lambda - \nu_m)^{1/2} x_N) \cdot \tilde{w}_m(\tilde{x}) \frac{1}{(1+x_N)^{\frac{\alpha}{2}}} u(x) dx \right|^2 \frac{1}{2(\lambda - \nu_m)^{1/2}} & i = N \end{cases}$$

したがって $\alpha > 1$ なる Schwarz の不等式より

$$\|T_i(\lambda)u\|_{\ell^2} \leq \frac{C_N}{(\lambda - \nu_N)^{1/4}} \|u\|_{\mathcal{H}}$$

$T_{N+1}(\lambda)$ のときも同様.

そこで $T_i(\lambda)$ は $\mathcal{H}$ から ℓ^2 の bounded operator に拡張できる.

lemma 2.

$(1+x)^\alpha \cdot f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1)$ とする

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^\infty \sin \xi x \cdot f(x) dx \quad \text{とおく}$$

このとき次のことがなりたつ.

$$a) \quad \alpha > \frac{1}{2} \quad \text{なら} \quad |\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq C h^\delta \quad \forall \delta > 0$$

$$b) \quad \alpha > 1 \quad \text{なら} \quad |\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| \leq C h^\delta \quad \Rightarrow \delta > \frac{1}{2}$$

証明

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi) &= \int_0^\infty (\sin(\xi+h)x - \sin \xi x) \cdot f(x) dx \\ &= \int_0^N (\sin(\xi+h)x - \sin \xi x) f(x) dx + \int_N^\infty (\sin(\xi+h)x - \sin \xi x) f(x) dx \\ &\equiv I_N + II_N \end{aligned}$$

 $1 < 2\alpha < 3$ なる

$$\begin{aligned} |I_N| &\leq h \int_0^N |x f(x)| dx \leq h \left(\int_0^N \frac{x^2}{(1+x)^{2\alpha}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^N (1+x)^{2\alpha} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C h \cdot N^{\frac{-2\alpha+3}{2}} \left(\int_0^\infty (1+x)^{2\alpha} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |II_N| &\leq 2 \left(\int_N^\infty \frac{dx}{(1+x)^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_N^\infty (1+x)^{2\alpha} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2}{N^{\frac{2\alpha-1}{2}}} \left(\int_0^\infty (1+x)^{2\alpha} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{で } N = h^{-1} \text{ とすると } |I_N| \leq C h^{\frac{2\alpha-1}{2}}, \quad |II_N| \leq C h^{\frac{2\alpha-1}{2}}$$

$$\text{よって, } |\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)| \leq C \cdot h^{\frac{2\alpha-1}{2}}$$

$\alpha > 1$ なる $\frac{2\alpha-1}{2} > \frac{1}{2}$ なる結論を得る.

lemma 3

条件1の $\alpha > 1$

$\Rightarrow T_\alpha(u)$ は 各区間 $(2N, 2N+1)$ で ノルムの意味で

Hölder 連続

とくに 条件1の $\alpha > 2$

$$\Rightarrow \|T_i(u+r) - T_i(u)\| \leq C r^\delta \quad \delta > \frac{1}{2}$$

証明

$T_i(u)$ の定義と lemma 2 より いえる.

lemma 4.

各 λ に 対して $T_i(u)$; compact , 但し $\lambda \neq \lambda_j$

証明

定義より $T_i(u)$ は $\mathcal{L}^2$ の中の有限次元部分空間にうつす

さて def. $\gamma(\lambda)u = \sum_{i=1}^{N+1} T_i(u)u_i \quad u \in \mathcal{H}', \lambda_N < \lambda < \lambda_{N+1}$

上の lemma 1, 3, 4 より

lemma 5.

条件1の $\alpha > 1$ より

$$\Rightarrow \|\gamma(\lambda)u\|_{\mathcal{L}^2} \leq \frac{C_N}{(\lambda - \lambda_N)^{\frac{1}{4}}} \|u\|_{\mathcal{H}'}, \quad \lambda_N < \lambda < \lambda_{N+1}$$

かつ $\gamma(\lambda)$ は compact operator

$$\text{かつ} \quad \|\gamma(u+r) - \gamma(u)\| \leq C \cdot r^\delta \quad \delta > 0$$

とくに $\alpha > 2$ ならば 上の式の δ を $\frac{1}{2}$ より大きくとれる

さて H の単位分解を $E(\lambda)$ とかく

lemma 6.

$$[A E(I) A^*]^a = \int_I \gamma(\lambda)^* \gamma(\lambda) d\lambda$$

I : 有限区間

証明.

$$\mu_N < \lambda < \mu_{N+1} \text{ とする}$$

$$u, v \in C_0^\infty \equiv \underbrace{C_0^\infty(S) \oplus C_0^\infty(S) \oplus \dots \oplus C_0^\infty(S)}_{n+1 \text{ 個}}, \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} ((R, u+i\epsilon) - R, u-i\epsilon) A^* u, A^* v \Big|_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} (F(R, u+i\epsilon) - R, u-i\epsilon) A^* u, A^* v \Big|_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{\mu_m}^{\infty} \frac{\epsilon}{(\mu-\lambda)^2 + \epsilon^2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} (FA_i^* u_i)_m(\mu) \cdot \overline{\sum_{i=1}^{n+1} (FA_i^* v_i)_m(\mu)} d\mu \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \sum_{m=N+1}^{\infty} \dots \\ & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^{n+1} (FA_i^* u_i)_m(\mu) \cdot \overline{\sum_{i=1}^{n+1} (FA_i^* v_i)_m(\mu)} \\ &= (\gamma(\lambda) u, \gamma(\lambda) v)_{\ell^2} \end{aligned}$$

lemma 7. $\operatorname{Im} z \neq 0$,

$$[A R, (-1) R, (z) A^*]^a; \text{ compact operator.}$$

証明.

ある $a > 0, b > 0$ が存在して

$$\|A_i u\|_{\mathcal{H}} \leq a \|H^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathcal{H}} + b \|u\|_{\mathcal{H}}$$

これより,

$$A R_1(-1)^{\frac{1}{2}} R_1(z)^{\frac{1}{2}} (1 - E_1(\lambda)) \rightarrow 0 \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty$$

よって $[A R_1(-1) R_1(z) (1 - E_1(\lambda)) A^*]^a \rightarrow 0 \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty$

一方 lemma 6 より

$$[A R_1(-1) R_1(z) E_1(\lambda) A^*]^a = \int_0^\lambda \frac{1}{\mu+1} \frac{1}{\mu-z} y(\mu)^* y(\mu) d\mu$$

したがって lemma 5 より

$$[A R_1(-1) R_1(z) E_1(\lambda) A^*]^a \text{ compact}$$

以上で証明された.

lemma 8

$$[A R_1(-1) R_1(\lambda + i\varepsilon) A^*]^a \text{ は } \varepsilon \rightarrow \pm 0 \text{ のとき}$$

ノルムの意味で極限値をもつ.

証明

Kato (4) 参照.

lemma 7, 8 より 定理 1 の前半は証明された.

なお定理 2 も lemma 5 と Kuroda (5) の定理より証明された.

定理 1 の後半の部分の証明をする.

まず

$$H_2 u = H_1 u + A B u \quad u \in \mathcal{D}_{L^2}^1(S) \cap \mathcal{E}_{L^2}^2(S)$$

とかく、

$$\text{== 2 ==} \quad \text{def.} \quad A u = A \sum_{i=1}^m u_i \quad u \in \mathcal{L} \oplus \mathcal{H} \quad m = n^2 + n + 1$$

A は $\frac{1}{(1+x_n)^\alpha}$ をかけた掛け算作用素

$$B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L} \oplus \mathcal{H}$$

$$B u = (B_{11} u, \dots, B_{i,j} u, \dots, B_{nn} u, B_1 u, \dots, B_n u, B_{n+1} u)$$

== 2 ==

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{i,j} u(x) = (1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}} \alpha_{i,j}(x) \partial_i \partial_j u(x) \quad 1 \leq i \leq n \\ \quad \quad \quad 1 \leq j \leq n \\ \\ B_j u(x) = (1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}} B_j(x) \partial_j u(x) \quad 1 \leq j \leq n \\ \quad \quad \quad \text{but } B_j(x) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial \alpha_{k,j}(x)}{\partial x_k} \\ \\ B_{n+1} u(x) = f(x) \cdot (1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) \end{array} \right.$$

== 3 ==

$B R_1(-) R_1(z) A$; compact operator, $\operatorname{Im} z \neq 0$

$B R_1(-) R_1(1+it) A$ が $\| \cdot \|$ の意味で極限値を持つ

== 4 == と前と同様にして証明する,

また

$$X = R(A) = \{u(x); (1+x_n)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) \in L^2(S)\}$$

とあけは、 $w_m^0(x; \xi) \in X^*$

したがって Kuroda(3) より 結論を得る.

但し 定理 1 の i) の ϕ) については 次の lemma 9
で証明を与える.

lemma 9

$$\chi(x) W_m(x, s) \in \mathcal{D}_L^1(S) \cap \mathcal{E}_L^2(S)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } \chi(x) &= 1 & 0 \leq x_n \leq a & & \chi(x) \in \mathcal{E}^\infty \\ &= 0 & x_n \geq b & & 0 < a < b \\ & & & & (a, b \text{ は任意}) \end{aligned}$$

証明 まず Kuroda の一般論から

$$(H_2 \psi(x), W_m(x, s)) = (\psi(x), (s^2 + V_m) W_m(x, s))$$

$$\text{但し } (f, g) = \int_S f(x) \overline{g(x)} dx$$

が次の条件をみたすすべての $\psi(x)$ についてなりたつ.

$$\begin{cases} \psi(x) \in \mathcal{D}_L^1(S) \cap \mathcal{E}_L^2(S) \\ \psi(x) = 0 & x_n \geq c \quad (c > 0 \text{ は任意}) \end{cases}$$

まず簡単のために $W_m(x, s) = \phi(x)$, $s^2 + V_m = \omega$ とかく。

$\chi(x) = 0$ $x_n \geq b$ であるが, ω の ϕ をとり,

$$\Omega_\phi \equiv \{x = (\tilde{x}, x_n) \in S, \quad 0 < x_n < b\} \text{ とおく,}$$

さて任意の $\chi(x) \in \mathcal{D}_L^1(\Omega_\phi) \cap \mathcal{E}_L^2(\Omega_\phi)$ に対して

$\chi(x) \chi(x)$ は上の条件をみたす.

$$\text{そこで, } (H_2 \chi_\chi, \phi) = (\chi_\chi, \phi)$$

これより,

$$((H_2 + tI)x\zeta, \phi) = (x\zeta, (\omega + t)\phi)$$

よて $x(x)$ の support は Ω_θ に含まれるから

H_2 を $L^2(\Omega_\theta)$ での微分作用素とみて

$$\langle (H_2 + tI)\zeta, x\phi \rangle = \langle x\zeta, (\omega + t)\phi \rangle - \langle \tilde{H}_2\zeta, \phi \rangle$$

$$\text{但し } \langle f, g \rangle \equiv \int_{\Omega_\theta} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad H_2 x\zeta = x H_2 \zeta + \tilde{H}_2 \zeta$$

そこで, $v \in \mathcal{D}_{L^2}(\Omega_\theta)$ に対し

$$F(v) \equiv \langle x v, (\omega + t)\phi \rangle - \langle \tilde{H}_2 v, \phi \rangle \quad \text{と置く.}$$

$\tilde{H}_2$ は一階微分作用素だから F は $\mathcal{D}_{L^2}(\Omega_\theta)$ 上の連続一次形式.

よって t を十分大きくとって

$$\|v\|_{\mathcal{H}_\theta}^2 \equiv \sum_{i,j} -\langle a_{ij} \partial_i v, \partial_j v \rangle + \langle (\theta + t)v, v \rangle$$

とおけば $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\theta}$ は $\mathcal{D}_{L^2}(\Omega_\theta)$ と同等なノルムになる.

そこで Riesz の定理より $F(v) = (v, u)_{\mathcal{H}_\theta} \quad \exists u \in \mathcal{D}_{L^2}(\Omega_\theta)$

v として ζ をとれば $F(\zeta) = \langle (H_2 + tI)\zeta, x\phi \rangle$ だから

$$\langle (H_2 + tI)\zeta, x\phi \rangle = (\zeta, u)_{\mathcal{H}_\theta} = \langle (H_2 + tI)\zeta, u \rangle$$

$$\therefore x\phi = u \quad \text{これより結論を得る.}$$

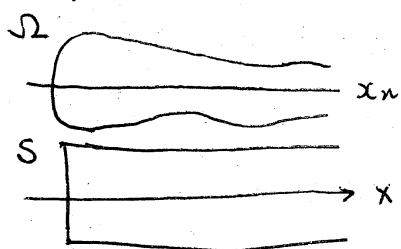
§3.

変形した柱状領域 Ω を考える. $\partial\Omega$ はめろか.

$$\text{def. } \hat{H}u = -\Delta u \quad u \in \mathcal{E}_{L^2}^2(\Omega) \cap \mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$$

Ω から S^n のなめろかな変数変換, $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ を考える.

def. $f \in L^2(\Omega)$ に対して $(Uf)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) |D|^{1/2}$



$$|D| = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

このとき U は $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(S)$
 Λ の Unitary operator となる.

さて $L^2(S)$ での operator H_2 を $H_2 = U \hat{H} U^{-1}$ で定義する.

$$H_2 u = - \sum_{i,k} \partial_i \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial x_k} \right) \partial_k u \\ - \frac{3}{4} |D|^{-2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial |D|}{\partial x_i} \cdot u + \frac{1}{2} |D|^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 |D|}{\partial x_i^2} u$$

定理 3 次の条件をみたす変数変換が存在するような Ω に対

して, 以下のことがなりたつ. $\hat{H}_{ac}$ と H_1 は Unitary 同値.

- i) 函数 $w_m(x, \xi)$ が存在して次の性質をみたす
- $\frac{w_m(x, \xi)}{(1+x_n)^{1+\epsilon}} \in L^2(\Omega), \forall \epsilon > 0$
 - $\chi(x) w_m(x, \xi) \in \mathcal{D}_c^1(\Omega) \cap \mathcal{E}_c^2(\Omega)$
 - $-\Delta w_m(x, \xi) = (\xi^2 + \nu_m) w_m(x, \xi)$
- 但し $\chi(x) = 1$ $0 \leq x_n \leq a$, $\chi(x) = 0$ $b \leq x_n$ $0 < a < b$ $\chi(x) \in \mathcal{E}^\infty$

ii) $\forall u \in \mathcal{H}_{ac}$ ($\mathcal{H}_{ac}$ は $\hat{H}$ に関する絶対連続部分空間) に対して

$$Tu = \{ \hat{u}_m(\xi) \} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^L (S u(x) \overline{w_m(x, \xi)} dx) dx_n \right\}$$

とかくと, T は $\mathcal{H}_{ac}$ から H' の上への Unitary Operator となる

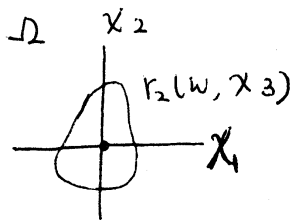
iii) $u \in \mathcal{H}_{ac} \cap \mathcal{D}(\hat{H})$ に対して $(\hat{H} u)_m(\xi) = (\xi^2 + \nu_m) \hat{u}_m(\xi)$

条件.

$$|(\tilde{D} \tilde{D}^t - E)_{ij}|, \left| \frac{\partial |D|}{\partial x_i} \right|, \left| \frac{\partial^2 |D|}{\partial x_i^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_\ell \partial x_k} \right|, \dots$$

いずれも $\frac{C}{(1+x_n)^\alpha}$, $\alpha > 1$ でおさえられる $\tilde{D}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$

例.

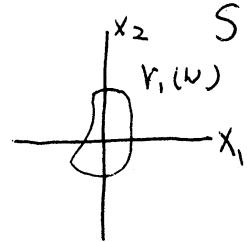


Ω は左図のような領域とする。 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

但し ある $a > 0$ に対して $x_3 \geq a$ ならば

x_3 軸を軸として半径 a の円筒が Ω の中に

はいるものとする。 S は右図で表える。



定理 4.

$$\left| r_1 - r_2 \right|, \left| \frac{\partial r_1}{\partial w} - \frac{\partial r_2}{\partial w} \right|, \\ \left| \frac{\partial^2 r_1}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 r_2}{\partial w^2} \right|, \left| \frac{\partial r_2}{\partial x_3} \right|, \left| \frac{\partial^2 r_2}{\partial x_3^2} \right| \text{ が}$$

いざれ $F, \frac{C}{(1+x_3)^\alpha}$ $\alpha > 1$ であさえる。

$\Rightarrow$ 定理 3 の条件をみたす

証明.

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad w = \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

$$S = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{w} = \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

と円筒座標をとって, x_3 の大きいところでは変数変換

$$\begin{cases} S = \left\{ \frac{r_1(w)}{r_2(w, x_3)} - 1 \right\} r \varphi(r) + r \\ \tilde{w} = w \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \varphi \in C^\infty \begin{cases} \varphi(r) = 0 & r \leq \frac{a}{2} \\ = 1 & r \geq a \end{cases}$$

を考えて計算すればよい

Reference

- (1). C. I. Goldstein.
Eigenfunction Expansions associated with the
Laplacian for certain domains with infinite
boundaries
Transactions of A. M. S. 1969 Vol. 135
- (2) Yosio Kato and S. T. Kuroda
The Abstract theory of Scattering
Lecture Notes
- (3) S. T. Kuroda
Perturbation of Eigenfunction Expansions
Vol 57, NO5, May 1967.
- (4) Yosio Kato
Some results on potential Scattering
Reprinted from the Proceedings of the International
Analysis and Related Topics, Tokyo April, 1969.
- (5) S. T. Kuroda.
A stationary method of scattering and
some applications. 同上, (4)と同じ)