

ある HARDY 空間の間の補間定理について

日本大学・経済学部 松岡勝男 (KATSUO MATSUOKA)
COLLEGE OF ECONOMICS OF NIHON UNIVERSITY

1. INTRODUCTION

1958 年に, E. M. Stein [St₁] は, the three lines theorem の extension を用いて, 次の the M. Riesz - G. O. Thorin convexity theorem の一般化を証明した (cf. [Sa] and [SW]).

以下において, $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$, $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ とする.

Theorem 1. $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, S_X, S_Y はそれぞれ measure space $(X, \mu), (Y, \nu)$ 上の simple functions の subspace とし, $f \in S_X$ を measurable function on (Y, ν) に transform する family of linear operators $\{T_z\}$ ($z \in S$) は analytic, i.e. $f \in S_X$ と $g \in S_Y$ に対して,

$$z \mapsto \int_Y (T_z f) g d\nu$$

が analytic in S_0 , continuous in S , また admissible, i.e. $f \in S_X$ と $g \in S_Y$ に対して,

$$\exists A, \exists a < \pi \text{ such that } \log \left| \int_Y (T_z f) g d\nu \right| \leq A e^{a|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in S)$$

とする. そして,

$$\|T_{it} f\|_{q_0} \leq A_0(t) \|f\|_{p_0} \quad (f \in S_X, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it} f\|_{q_1} \leq A_1(t) \|f\|_{p_1} \quad (f \in S_X, -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j = 0, 1$) は f と独立であり,

$$\exists b < \pi \text{ such that } \sup_{-\infty < t < \infty} e^{-b|t|} \log A_j(t) < \infty \quad (j = 0, 1).$$

このとき, $\forall \theta$ with $0 \leq \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_q \leq A_\theta \|f\|_p \quad (f \in S_X).$$

$$\text{ただし, } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Lemma 2 (The extension of the three lines theorem). 関数 $\Phi(z)$ は analytic in S_0 , continuous in S であり,

$$\exists a < \pi \text{ such that } \sup_{z=\theta+it \in S} e^{-a|t|} \log |\Phi(z)| < \infty.$$

このとき, $\forall \theta$ with $0 < \theta < 1$ に対して,

$$\log |\Phi(\theta)| \leq \frac{1}{2} \sin \pi \theta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\log |\Phi(it)|}{\cosh \pi t - \cos \pi \theta} + \frac{\log |\Phi(1+it)|}{\cosh \pi t + \cos \pi \theta} \right\} dt.$$

また, 1972 年に, C. Fefferman and E. M. Stein [FS] は Hardy 空間 $H^p(\mathbb{R}^n)$ に関して, $(\cdot, \cdot)_{[\theta]}$ ($0 < \theta < 1$) で示される複素補間空間 (see [BL]) についての次の結果を示した.

Theorem 3. $1 < p_1 < \infty$, $0 \leq \theta \leq 1$ のとき,

$$(H^1(\mathbb{R}^n), L^{p_1}(\mathbb{R}^n))_{[\theta]} = L^p(\mathbb{R}^n).$$

ただし, $\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p_1}$. また, $1 < p_0 < \infty$, $0 \leq \theta \leq 1$ のとき,

$$(L^{p_0}(\mathbb{R}^n), BMO)_{[\theta]} = L^p(\mathbb{R}^n).$$

ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0}$.

この Theorem 3 の corollary として, 次の $H^1(\mathbb{R}^n)$ と $L^p(\mathbb{R}^n)$ の間の補間定理および $L^p(\mathbb{R}^n)$ と BMO の間の補間定理が得られる (see [FS] and [St₂]).

Corollary 4. $\{T_z\}$ ($z \in S$) は family of bounded linear operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$ であり, analytic, i.e. $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx$$

が analytic in S_0 , continuous in S , また operator norm $\|T_z\|$ ($z \in S$) は uniformly bounded とする. そして,

$$\|T_{it} f\|_{L^1} \leq A \|f\|_{H^1} \quad (f \in L^2 \cap H^1(\mathbb{R}^n), -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it} f\|_{L^2} \leq A \|f\|_{L^2} \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^n), -\infty < t < \infty).$$

このとき, $\forall \theta$ with $0 < \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{L^p} \leq A_\theta \|f\|_{L^p} \quad (f \in L^2 \cap L^p(\mathbb{R}^n)).$$

ただし, $\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{2}$ であり, A_θ は A と θ だけに depend.

Corollary 5. $\{T_z\}$ ($z \in S$) は analytic family of bounded linear operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$ であり, operator norm $\|T_z\|$ ($z \in S$) は uniformly bounded とする. そして,

$$\|T_{it} f\|_{L^2} \leq A \|f\|_{L^2} \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^n), -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it} f\|_{BMO} \leq A \|f\|_{L^\infty} \quad (f \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), -\infty < t < \infty).$$

このとき, $\forall \theta$ with $0 \leq \theta < 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{L^p} \leq A_\theta \|f\|_{L^p} \quad (f \in L^2 \cap L^p(\mathbb{R}^n)).$$

ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{2}$ であり, A_θ は A と θ だけに depend.

本講演の目的は, Corollary 5 の analog の Theorem 1 version を用いて, Corollary 4 の analog の Theorem 1 version を示すことである.

2. PRELIMINARIES

最初に, non-homogeneous Herz 空間 $K_q^{\alpha,p}$ (see [HY] and [H]) の特別な場合である, Beurling algebra A^p と関数空間 B^p の定義を述べる (see [B], [CL], [F] and [G]).

$k \in \mathbb{Z}$ に対して, $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$ とし, $k \in \mathbb{N}$ に対して, $C_k = B_k \setminus B_{k-1}$ とする. また, χ_{C_k} を C_k の characteristic function として, $\chi_k = \chi_{C_k}$ if $k \in \mathbb{N}$, そして $\chi_0 = \chi_{B_0}$ とする.

Definition 6. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ のとき,

$$K_q^{\alpha,p} = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_q^p \right\}^{1/p} < \infty \right\};$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q \leq \infty$ のとき,

$$K_q^{\alpha,\infty} = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,\infty}} = \sup_{k \geq 0} 2^{k\alpha} \|f\chi_k\|_q < \infty \right\}.$$

Definition 7. $1 < p < \infty$ のとき,

$$A^p = K_p^{n(1-1/p),1} = \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kn/p'} \|f\chi_k\|_p < \infty \right\}.$$

ただし, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$;

$$B^p = K_p^{-n/p,\infty} = \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \sup_{k \geq 0} 2^{-kn/p} \|f\chi_k\|_p < \infty \right\}.$$

次の定義は, A^p 空間と B^p 空間の同値なもう一つの定義である (see [CL] and [G]).

Definition 8. $1 < p < \infty$ とするとき,

$$A^p = \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \inf_{\omega \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)^{-(p-1)} dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

ただし, Ω は positive, radial, $|x|$ に関して nonincreasing, そして

$$\omega(0) + \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1$$

である $\mathbb{R}^n$ 上の関数 ω の class である;

$$B^p = \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \sup_{R \geq 1} \left(\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

ここで (および 以下において), $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ は 中心 0, 半径 $R > 0$ の open ball を表すとする.

次に, non-homogeneous Herz-type Hardy 空間 $HK_q^{\alpha,p}$ の特別な場合である HA^p と関数空間 CMO^p の定義を述べる (see [CL], [G] and [LY]).

Definition 9. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ とし, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ with $\text{supp } \phi \subset B_0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx \neq 0$, $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \phi(\frac{x}{t})$ ($t > 0$) とする. このとき, non-homogeneous Herz-type Hardy 空間 $HK_q^{\alpha,p}$ associated to $K_q^{\alpha,p}$ を

$$HK_q^{\alpha,p} = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : \phi^*(f) \in K_q^{\alpha,p}\}$$

で定義する. ただし, $S'(\mathbb{R}^n)$ は tempered distributions on $\mathbb{R}^n$ の class であり,

$$\phi^*(f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)|.$$

また, norm $\|\cdot\|_{HK_q^{\alpha,p}}$ を

$$\|f\|_{HK_q^{\alpha,p}} = \|\phi^*(f)\|_{K_q^{\alpha,p}}$$

で定義する.

Definition 10. $1 < p < \infty$ のとき,

$$HA^p = HK_p^{n(1-1/p),1} = \{f \in A^p : f^+ \in A^p\}.$$

ただし, f^+ は f の Poisson 積分の vertical maximal 関数, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f^+(x) = \sup_{t>0} \left| c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \frac{t}{(t^2 + |y|^2)^{(n+1)/2}} dy \right|, \quad c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}},$$

である. また,

$$\|f\|_{HA^p} = \|f^+\|_{A^p}.$$

Definition 11. $1 < p < \infty$ のとき, $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ が central mean oscillation of order p の関数の class, CMO^p , に属するとは,

$$\|f\|_{CMO^p} = \sup_{R \geq 1} \left(\frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} |f(x) - m_R(f)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

を満たすことである. ただし,

$$m_R(f) = \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} f(x) dx$$

である.

このとき, $1 < p < \infty$ に対して,

$$CMO^p \supset B^p$$

であり, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ に対して,

$$L^1 \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \supset A^{p_1} \supset A^{p_2},$$

$$B^{p_1} \supset B^{p_2} \supset L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$H^1 \cap A^{p_1} \supset HA^{p_1} \supset HA^{p_2}$$

そして

$$CMO^{p_1} \supset CMO^{p_2} \supset BMO$$

である.

さらに, 次の duality theorem が成り立つ (see [CL], [G] and [HY]).

Theorem 12. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, where $p' = \infty$ if $0 < p \leq 1$, のとき,

$$(K_q^{\alpha,p})^* = K_{q'}^{-\alpha,p'}.$$

Corollary 13. $1 < p, p' < \infty$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ のとき,

$$(A^p)^* = B^{p'}.$$

Theorem 14. $1 < p, p' < \infty$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ のとき,

$$(HA^p)^* = CMO^{p'}.$$

また, sharp 関数 $f^\sharp$ に関して, sharp maximal theorem の analog が成り立つ.

Definition 15. $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, $B \subset \mathbb{R}^n$ を open ball として,

$$f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy$$

とすると, sharp 関数 $f^\sharp$ を

$$f^\sharp(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B| dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する.

Theorem 16 ([K]). $1 < p < \infty$ のとき,

$$f \in CMO^p \implies f^\sharp \in B^p$$

であり,

$$\|f^\sharp\|_{B^p} \leq C_p \|f\|_{CMO^p}.$$

Theorem 17 ([K] and [M₂]). $1 < p < \infty$ のとき, some $1 < p_0 < p$ に対して, $f \in L_{loc}^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ ならば,

$$f^\sharp \in B^p \implies f \in CMO^p$$

であり,

$$\|f\|_{CMO^p} \leq C_p \|f^\sharp\|_{B^p}.$$

3. INTERPOLATION OF ANALYTIC FAMILIES OF OPERATORS

最初に, Theorem 16, Theorem 17 そして Lemma 2 を用いて, C. Fefferman and E. M. Stein の $L^p(\mathbb{R}^n)$ と BMO の間の補間定理 (Corollary 5) の analog の Theorem 1 version が示される (cf. [M₁] and [M₃]).

Theorem 18. $1 < p_0 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ ($z \in S$) は family of bounded linear operators from B^{p_0} to CMO^{p_0} であり, analytic, i.e. $f \in B^{p_0}$, $g \in HA^{p_0'}$ where $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0'} = 1$ に対して,

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx$$

が analytic in S_0 , continuous in S , また admissible, i.e. $f \in B^{p_0}$, $g \in HA^{p_0'}$ where $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0'} = 1$ に対して,

$$\exists a < \pi \text{ such that } \sup_{z \in S} e^{-a|\operatorname{Im} z|} \log \left| \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx \right| < \infty$$

とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{B^{p_0}} \leq A_0(t) \|f\|_{B^{p_0}} \quad (f \in B^{p_0}, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{BMO} \leq A_1(t) \|f\|_{L^\infty} \quad (f \in L^\infty(\mathbb{R}^n), -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j = 0, 1$) は f と独立であり,

$$(*) \quad \exists b < \pi \text{ such that } \sup_{-\infty < t < \infty} e^{-b|t|} \log A_j(t) < \infty \quad (j = 0, 1).$$

このとき, $\forall \theta$ with $0 < \theta < 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{CMO^p} \leq A_\theta \|f\|_{B^p} \quad (f \in B^p).$$

ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$ であり, A_θ は $A_j(t)$ ($j = 0, 1$), p_0 と θ に depend.

Remark. Theorem 18 において,

$$A_\theta = C_{p_0, \theta} \exp \left[\frac{1}{2} \sin \pi \theta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\log A_0(t)}{\cosh \pi t - \cos \pi \theta} + \frac{\log A_1(t)}{\cosh \pi t + \cos \pi \theta} \right\} dt \right].$$

ただし, $0 < \theta < 1$.

また, Theorem 18 と同様にして, 次の 3 つの補間定理が得られる.

Theorem 19. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ ($z \in S$) は analytic family of bounded linear operators from B^{p_0} to CMO^{p_0} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{B^{p_0}} \leq A_0(t)\|f\|_{B^{p_0}} \quad (f \in B^{p_0}, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{CMO^{p_1}} \leq A_1(t)\|f\|_{B^{p_1}} \quad (f \in B^{p_1}, -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j = 0, 1$) は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall \theta$ with $0 < \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{CMO^p} \leq A_\theta\|f\|_{B^p} \quad (f \in B^p).$$

ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$, p_j ($j = 0, 1$) と θ に depend.

Theorem 20. $1 < p_0 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ ($z \in S$) は analytic family of bounded linear operators from B^{p_0} to CMO^{p_0} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{CMO^{p_0}} \leq A_0(t)\|f\|_{B^{p_0}} \quad (f \in B^{p_0}, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{BMO} \leq A_1(t)\|f\|_{L^\infty} \quad (f \in L^\infty(\mathbb{R}^n), -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j = 0, 1$) は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall \theta$ with $0 \leq \theta < 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{CMO^p} \leq A_\theta\|f\|_{B^p} \quad (f \in B^p).$$

ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$ であり, A_θ は $A_j(t)$ ($j = 0, 1$), p_0 と θ に depend.

Theorem 21. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ ($z \in S$) は analytic family of bounded linear operators from B^{p_0} to CMO^{p_0} であり, また admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{CMO^{p_0}} \leq A_0(t)\|f\|_{B^{p_0}} \quad (f \in B^{p_0}, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{CMO^{p_1}} \leq A_1(t)\|f\|_{B^{p_1}} \quad (f \in B^{p_1}, -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j = 0, 1$) は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall \theta$ with $0 \leq \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{CMO^p} \leq A_\theta\|f\|_{B^p} \quad (f \in B^p).$$

ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$, p_j ($j = 0, 1$) と θ に depend.

最後に, 本講演の目的である, C. Fefferman and E. M. Stein の $H^1(\mathbb{R}^n)$ と $L^p(\mathbb{R}^n)$ の間の補間定理 (Corollary 4) の analog の Theorem 1 version を, Theorem 18 を用いて示す.

Theorem 22. $1 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ ($z \in S$) は family of bounded linear operators from HA^{p_1} to A^{p_1} であり, analytic, i.e. $f \in HA^{p_1}$, $g \in B^{p_1'}$ where $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$ に対して,

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx$$

が analytic in S_0 , continuous in S , また admissible, i.e. $f \in HA^{p_1}$, $g \in B^{p_1'}$ where $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$ に対して,

$$\exists a < \pi \text{ such that } \sup_{z \in S} e^{-a|\operatorname{Im} z|} \log \left| \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx \right| < \infty$$

とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{L^1} \leq A_0(t)\|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{A^{p_1}} \leq A_1(t)\|f\|_{A^{p_1}} \quad (f \in A^{p_1}, -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j=0,1$) は f と独立であり,

$$(*) \quad \exists b < \pi \text{ such that } \sup_{-\infty < t < \infty} e^{-b|t|} \log A_j(t) < \infty \quad (j=0,1).$$

このとき, $\forall \theta$ with $0 < \theta < 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{A^p} \leq A_\theta \|f\|_{HA^p} \quad (f \in HA^p).$$

ただし, $\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$ ($j=0,1$), p_1 と θ に depend.

Proof. Corollary 4 の証明に similar (see [FS]).

$\forall z \in S$ に対して, S_z を $T_{\bar{z}}$ の adjoint とすると,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{(S_{\bar{z}} g)(x)} dx \quad (f \in HA^{p_1}, g \in B^{p_1'}).$$

このとき, $\{S_z\}$ ($z \in S$) は analytic family of bounded linear operators from $B^{p_1'}$ to $CMO^{p_1'}$ であり, admissible. その上, $g \in B^{p_1'}$ where $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$ のとき,

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (S_{1+it} g)(x) dx$$

は bounded linear functional on A^{p_1} であり, $A^{p_1} - B^{p_1'}$ duality により, $S_{1+it} g \in B^{p_1'}$ となり,

$$\|S_{1+it} g\|_{B^{p_1'}} \leq A_1(t) \|g\|_{B^{p_1'}}.$$

また, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ のとき,

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (S_{it} g)(x) dx$$

は bounded linear functional on H^1 であり, $H^1 - BMO$ duality により, $S_{it} g \in BMO$ となり,

$$\|S_{it} g\|_{BMO} \leq A_0(t) \|g\|_{L^\infty}.$$

よって, Theorem 18 を用いると, $\forall \theta'$ with $0 < \theta' < 1$ に対して, $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta'}{p_1'}$ として,

$$\|S_{\theta'} g\|_{CMOP'} \leq A_{\theta'} \|g\|_{B^{p'}} \quad (g \in B^{p'}).$$

故に, $\theta = 1 - \theta'$ とおくと, $\forall \theta$ with $0 < \theta < 1$ に対して, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, i.e. $\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p_1}$ として,

$$\|T_{\theta} f\|_{A^p} \leq A_{\theta} \|f\|_{HA^p} \quad (f \in HA^p).$$

□

Remark. Theorem 22 において,

$$A_{\theta} = C_{p_1, \theta} \exp \left[\frac{1}{2} \sin \pi(1 - \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\log A_1(t)}{\cosh \pi t - \cos \pi(1 - \theta)} + \frac{\log A_0(t)}{\cosh \pi t + \cos \pi(1 - \theta)} \right\} dt \right].$$

ただし, $0 < \theta < 1$.

さらに, Theorem 22 の証明と同様にして, Theorem 19 ~ Theorem 21 をそれぞれ用いると, 次の3つの補間定理を得ることができる.

Theorem 23. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ ($z \in S$) は analytic family of bounded linear operators from HA^{p_1} to A^{p_1} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it} f\|_{A^{p_0}} \leq A_0(t) \|f\|_{HA^{p_0}} \quad (f \in HA^{p_0}, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it} f\|_{A^{p_1}} \leq A_1(t) \|f\|_{A^{p_1}} \quad (f \in A^{p_1}, -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j = 0, 1$) は f と独立であり, (*) を満たす. このとき, $\forall \theta$ with $0 \leq \theta < 1$ に対して,

$$\|T_{\theta} f\|_{A^p} \leq A_{\theta} \|f\|_{HA^p} \quad (f \in HA^p).$$

ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ であり, A_{θ} は $A_j(t)$, p_j ($j = 0, 1$) と θ に depend.

Theorem 24. $1 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ ($z \in S$) は analytic family of bounded linear operators from HA^{p_1} to A^{p_1} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it} f\|_{L^1} \leq A_0(t) \|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it} f\|_{A^{p_1}} \leq A_1(t) \|f\|_{HA^{p_1}} \quad (f \in HA^{p_1}, -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j = 0, 1$) は f と独立であり, (*) を満たす. このとき, $\forall \theta$ with $0 < \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_{\theta} f\|_{A^p} \leq A_{\theta} \|f\|_{HA^p} \quad (f \in HA^p).$$

ただし, $\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p_1}$ であり, A_{θ} は $A_j(t)$ ($j = 0, 1$), p_1 と θ に depend.

Theorem 25. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ ($z \in S$) は analytic family of bounded linear operators from HA^{p_1} to A^{p_1} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{A^{p_0}} \leq A\|f\|_{HA^{p_0}} \quad (f \in HA^{p_0}, -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{A^{p_1}} \leq A\|f\|_{HA^{p_1}} \quad (f \in HA^{p_1}, -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ ($j = 0, 1$) は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall \theta$ with $0 \leq \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{A^p} \leq A_\theta\|f\|_{HA^p} \quad (f \in HA^p).$$

ただし, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$, p_j ($j = 0, 1$) と θ に depend.

REFERENCES

- [BL] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [B] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebra, *Ann. Inst. Fourier*, **14** (1964), 1-32.
- [CL] Y. Chen and K. Lau, Some new classes of Hardy spaces, *J. Func. Anal.*, **84** (1989), 255-278.
- [FS] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, **129** (1972), 137-193.
- [F] H. Feichtinger, An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n -space, *Proceedings, Conference at Cortona 1984, Sympos. Math.*, **29** (1987), 267-301.
- [G] J. Garcia-Cuerva, Hardy spaces and Beurling algebras, *J. London Math. Soc.* (2), **39** (1989), 499-513.
- [HY] E. Hernández and D. Yang, Interpolation of Herz spaces and applications, *Math. Nachr.*, **205** (1999), 69-87.
- [H] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, *J. Math. Mech.*, **18** (1968), 283-324.
- [K] Y. Komori, Notes on interpolation theorem between B^p and BMO , *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **60** (2004), 107-111.
- [LY] S. Lu and D. Yang, Some new Hardy spaces associated with the Herz spaces and their wavelet characterizations (in Chinese), *J. of Beijing Normal Univ. (Natur. Sci.)*, **29** (1993), 10-19.
- [M₁] K. Matsuoka, Interpolation theorem between B_0^p and BMO , *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **53** (2001), 547-554.
- [M₂] K. Matsuoka, Remark on the sharp function on Banach spaces B^p , *Research Bulletin of Nihon Daigaku Keizaigaku Kenkyukai*, **47** (2004), 47-51.
- [M₃] K. Matsuoka, Interpolation theorems related to CMO^p spaces, to appear.
- [Sa] C. Sadosky, *Interpolation of Operators and Singular Integrals*, Marcel Dekker, New York, 1979.
- [St₁] E. M. Stein, Interpolation of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 482-492.
- [St₂] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.
- [SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971.