

Constrained system の versal unfolding について

京大・理 岡 宏枝 (Hiroe Oka)

京大・理 国府寛司 (Hiroshi Kokubu)

1. 我々は、 (ε, α) -parameter 付きの常微分方程式系、

$$(1) \begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}, \alpha) \\ \vdots \\ \varepsilon \dot{x}_r = f_r(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}, \alpha) \\ \dot{y}_1 = g_1(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}, \alpha) \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-r} = g_{n-r}(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}, \alpha) \end{cases}$$

の標準形とその versal unfolding を考察するために、(1) を多様体 M の上に次のように定式化した。

定義 1. M を n 次元 C^∞ 多様体、 v を M 上のベクトル場、 A を TM の bundle endomorphism とする。組 $(A; v)$ を generalized vector field といい、その全体を $GX(M)$ とかく。また、各 $x \in M$ に対して、 $A(x)$ の corank が一定値 r であるとき、組 $(A; v)$ を constrained system of corank r といい、そ

の全体を CX_r とかく。

定義 2. $P: TM \rightarrow TM$ bundle automorphism と $\phi: M \rightarrow M$ diffeomorphism の組 $(P; \phi)$ を constrained system の変換と言う。 $(P; \phi)$ は $(A; v) \in CX_r$ (または、 GX) に次のように作用する。

$$(A'; v') = (P \circ T\phi \circ A \circ T\phi^{-1}; P \circ T\phi \circ v \circ \phi^{-1})$$

また、このとき $(A; v)$ と $(A'; v')$ は、同値 (equivalent) であるという。

Constrained system の k 次の normal form とは、constrained system の k -jet の上で定義した同値関係で割った代表元のことである。以前の研究集会において、無限小変形を用いてこれを計算するアルゴリズムと、2次元、3次元の constrained system の余次元の低い場合の計算結果について報告した。

([1] [2] [3] [4] 参照。)

一言で言えば、versal unfolding とは、 $(A; v)$ の unfolding のうちで、適当に変換することによって、 $(A; v)$ の任意の unfolding がえられる様なものである。従って、それを特徴づけることは、ある中心となる系 $((1)$ で、 $\epsilon=0, \alpha=0$ としたもの) を与えたときに、その摂動系のうちでどのようなものが安定であるか、また、どのような dynamics がその摂動系に現れうるかを知るのに有効である。ここでは、以上の定式化のもとで corank 1 の constrained system の versal unfolding について議論する。

2. 以下、 $(A; v)^k$ を $x_0 \in M$ のまわりの constrained system (または, generalized vector field) $(A; v)$ の k -jet とする。ここでは、一般的な場合である corank 1 の constrained system $(A_0; v_0) \in CX_1$ の unfolding $(A_\mu; v_\mu)$, $\mu \in R^n$ について考えるが、その場合十分小さな μ については、 $(A_\mu; v_\mu) \in CX_0 \cup CX_1$ である。

$C = CX_0 \cup CX_1$, $C^k = \{CX_0 \text{ の } k\text{-jets}\} \cup \{CX_1 \text{ の } k\text{-jets}\}$ とおく。特に、 $(A; v)$ の unfolding の中で次のようなものを考えることにする。

定義 3. $\mu \in R^n$ をパラメーターとする constrained system の family

$(A; v)^k$ が $(A; v)^k \in C^k$ の regular unfolding であるとは、

$(A_0; v_0)^k = (A; v)^k$ であり、更に、

[U] $U \subset M \times R^n$ の近傍と、その上で定義された $(A_\mu; v_\mu)^k$ の代表元

$(A_\mu; v_\mu)$ で A_μ が U 上で constant corank になるものが存在し、かつ、

$$[R] \quad \left. \frac{d}{d\mu} \right|_{\mu=0} \det A_\mu(x_0) \neq 0$$

が成立することである。

我々は、 $(A; v)^k$ の regular unfolding であって、適当な変換の family を作用させることにより任意の $(A; v)^k$ の regular unfolding がそれから得られるようなものを versal unfolding と呼ぶことにする。

定義 4. $(A'_\lambda; v'_\lambda)^k$, $(A_\mu; v_\mu)^k$ を $(A; v)^k$ の regular unfolding とする。このとき、 $(A'_\lambda; v'_\lambda)^k$ が $(A_\mu; v_\mu)^k$ から induce された regular unfolding であるとは、変換 $(\text{Id}; \text{id})^k$ の unfolding $(P_\lambda; \phi_\lambda)^k$ と parameter の変換 $\mu = h(\lambda)$ が存在し、

$$(A'_\lambda; v'_\lambda)^k = (P_\lambda; \phi_\lambda)^k \# (A_{h(\lambda)}; v_{h(\lambda)})^k$$

が成立することである。

定義 5. 任意の $(A; v)^k$ の regular unfolding $(A'_\lambda; v'_\lambda)^k$ が $(A_\mu; v_\mu)^k$ から induce されるとき、 $(A_\mu; v_\mu)^k$ を $(A; v)^k \in C^k$ の k-versal unfolding と言う。特に、 $h = \text{id}$ の時、 $(A'_\lambda; v'_\lambda)^k$ と $(A_\mu; v_\mu)^k$ は、equivalent であると言う。

次の補題が成立する。

補題 6. regular unfolding $(A_\mu; v_\mu)^k$ は、

$$\begin{pmatrix} a & 0 & & \\ & & & * \\ 0 & I_{n-1} & & \end{pmatrix}^k$$

の形の unfolding と equivalent である。但し、 $a = a(\mu)$, i.e. μ のみに依存する定数である。

3. 次に我々は、versal unfolding を特徴づけるために、constant determinant unfolding のクラスを導入する。

$$D = \{ (A; v) \in G X \mid \det A = \text{const} \}$$

$$D^k = \{ (A; v)^k \mid (A; v) \in D \}$$

$$D^k = \{ (A; v)^k \mid (A; v) \in G X, \det A^k = \text{constant jet} \}$$

$$\mathcal{J}^{*k} = \{ (P; \phi)^k \mid \det P = 1 \}, \quad \text{とする。}$$

命題 7. 次が成立する。

$$(1) D \supset C X_r, \quad r \geq 1$$

$$(2) C^k \cap D^k = C^k \cap D^k$$

命題 8. (1) D^k は、 $J^k(M, \text{End}(TM) \times_n TM)$ のなかの algebraic

set になり、 N^k を D^k の non-singular point set とすると、これは

$J^k(M, \text{End}(TM) \times_n TM)$ の中の部分多様体 である。

$$(2) \{ C X_1 \text{ の } k\text{-jets} \} \subset N^k$$

$$(3) \mathcal{J}^{*k} \text{ は、} D^k \text{、及び、} N^k \text{ に作用する。}$$

多様体 N^k と、変換群 $\mathcal{J}^{*k}$ に対して、" versal unfolding は

$(A; v)^k$ の orbit に transversal な family で特徴づけられる" というベク

トル場の versal unfolding のときと同様の原理が成立すること、及び、補題 6

から、次の定理をえる。

定理 9. $(A; v)^k \in C^k$ の N^k 内の unfolding $(A_\mu; v_\mu)^k$ が $(A; v)^k$ の $\mathcal{J}^k$ -orbit に transversal ならば、それは $(A; v)^k$ の k -versal unfolding である。

4. 2次元の constrained system のいくつかの簡単な場合について、versal unfolding の計算結果を報告する。normal form に関しては、[4] を参照されたい。

	normal form	versal unfolding	dynamics	k
1)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & ; \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 1 \\ & ; \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	rapid motion	∞
2)	$\begin{pmatrix} 0 & \pm x \\ & ; \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \alpha \pm (1+\beta)x + \gamma xy \\ & ; \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	slow regular motion	2
3)	$\begin{pmatrix} 0 & \pm y + ax^2 \\ & ; \\ 0 & 1 & 1 \pm x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \alpha + \beta x \pm y + (a + \gamma)x^2 + \delta xy \\ & ; \\ 0 & 1 & 1 \pm (1 + \zeta)x \end{pmatrix}$	jumping motion	2
4)	$\begin{pmatrix} 0 & \pm y + s_1 x^2 \\ & ; \\ 0 & 1 & s_2 x^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \alpha + \beta x \pm y + s_1 x^2 + \gamma xy \\ & ; \\ 0 & 1 & \delta + s_2 x + \zeta x^2 \end{pmatrix}$	canard (duck)	2

但し、 $s_1, s_2 = \pm 1$ 、ギリシア文字は、unfolding parameter を表す。また、 k は normal form の次数を表している。これらを常微分方程式の形でかくと次のようになる。

$$1) \begin{cases} \epsilon \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \epsilon \dot{x} = \alpha \pm (1 + \beta)x + \gamma xy \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \epsilon \dot{x} = \alpha + \beta x \pm y + (a + \gamma)x^2 + \delta xy \\ \dot{y} = 1 \pm (1 + \zeta)x^2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \epsilon \dot{x} = \alpha + \beta x \pm y + s_1 x^2 + \gamma xy \\ \dot{y} = \delta + s_2 x + \zeta x^2 \end{cases}$$

これらの相図は、下に示されたようになる。

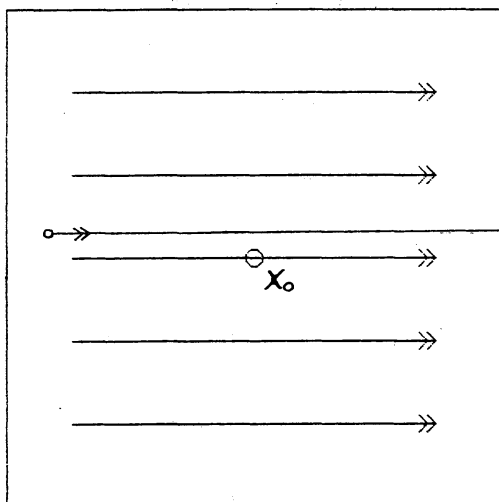


Fig. 1 rapid motion

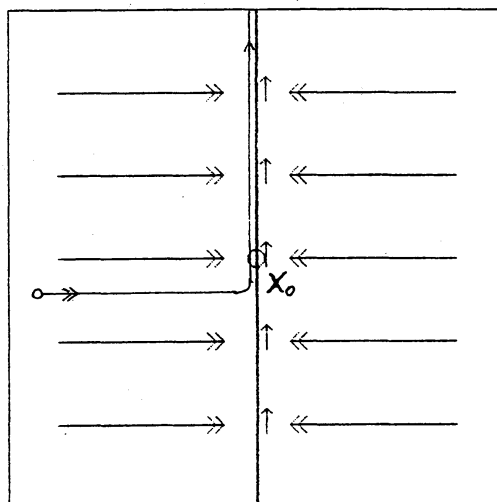


Fig. 2 slow regular motion

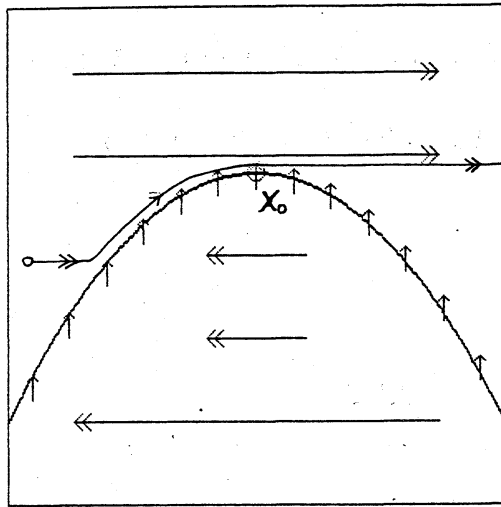


Fig. 3 jumping motion

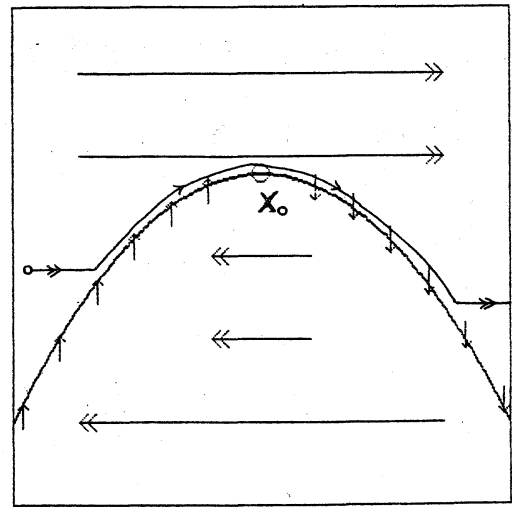


Fig. 4 canard

5. 参考文献

「1」岡宏枝 数理解析研究所講究録574 「力学系と非線形現象」

1985年12月

「2」岡宏枝 数理解析研究所講究録602 「力学系と特異現象」

1986年12月

「3」Oka, H. and Kokubu, H. An approach to constrained equations and

strange attractors. Patterns and Waves--Qualitative Analysis of

Nonlinear Differential Equations--(eds. T. Nishida, M. Mimura and

H. Fujii), Kinokuniya and North-Holland, 1986, 607-630

「4」Oka, H. Constrained systems, characteristic surfaces and normal

forms, Japan J. Appl. Math., Vol. 4, No. 3, 393-431