

Gedanken Experiments on Linear Representation Systems

名古屋大学 工学部 松尾 強 (Tsuyoshi Matsuo)

1. はじめに

Kalman¹⁾等による有限次元線形系の実現理論の完成により、最近是非線形系の実現理論が展開されている。特に著者等は非線形の一つである線形表現系を導入し、それが非線形系の実現に適していることを示した^{2,3,4)}。又、線形系と同様に、線形表現系の部分実現理論を展開した⁵⁾。これらの実現理論は、対象に対し多重実験が可能であり、理想的入出力データが与えられるときの意味を持つ。本論文では、対象に対し一重実験のみが許される場合、例えば運転状況にあるプラントに対する場合、一つの入出力実験データから、そのプラントを真に再生するという実時間部分実現問題に対する主定理を与える。この定理は Moore の強連結ミーケニシャル・マシーンが単一実験により同定できるという定理⁶⁾に於いてある。

2. 線形表現系

入力値集合 Ω を有限集合, すなわち, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ とする。又, 出力は 1 変数, すなわち, 出力値集合はある体 K とする。

(2.1) 定義. X を K 上の線形空間, $F: \Omega \rightarrow L(X, X)$, $x^0 \in X$, $h \in L(X, K)$ とする。この時, 組 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ は 線形表現系 と云われ, その系方程式は

$$\begin{cases} x(0) = x^0 \\ x(t+1) = F(\omega(t+1))x(t) \\ y(t) = h x(t) \end{cases}$$

である。ただし, $t = 0, 1, \dots$, $\omega(t) \in \Omega$, $x(t) \in X$, $h(t) \in K$ である。

σ に対し モノイド射 $\phi: \Omega^* \rightarrow L(X, X)$ を

$$\phi(\omega^n \dots \omega^1) = F(\omega^n) \dots F(\omega^1), \quad \omega^n \dots \omega^1 \in \Omega^*$$

で与える。ただし Ω^* は Ω から生成される自由モノイド。

σ の 行動 は入力応答関数 $a_\sigma: \Omega^* \rightarrow K; \omega \mapsto h\phi(\omega)x^0$ であり, σ は a_σ を 実現 すると言う。

集合 $\{ \phi(\omega)x^0; \omega \in \Omega^* \}$ の線形包が X のとき σ は 擬可到達, $h\phi(\omega)x = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^*$ ならば $x = 0$ が成立するとき σ は 可識別, 擬可到達で可識別な σ は 正準 であると言われる。

$\sigma_1 = ((X_1, F_1), x_1^0, h_1)$, $\sigma_2 = ((X_2, F_2), x_2^0, h_2)$ を線形表

現系とする。線形写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ は関係 $fF_1(u) = F_2(u)f$,
 $\forall u \in U$, $f x_1^0 = x_2^0$, $h_2 f = h_1$ を満たすとき, 線形表現系射
 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ と云われる。 $f: X_1 \rightarrow X_2$ が全単射のとき
 $f: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ は 同型射 と云われる。

3. 実現定理

(3.1) 定理. どんな入力応答関数 $a: U^* \rightarrow K$ に対しても, それを実現する正準線形表現系が同型を除いて唯一つ必ず存在する。

(3.2) 定理. 入力応答関数 $a: U^* \rightarrow K$ の Hankel 行列を

$$H_a = \begin{pmatrix} & & \omega_1 & & \\ & & \vdots & & \\ & & & a(\omega_2 \omega_1) & \cdots \\ & & & \vdots & \\ \omega_2 & \cdots & a(\omega_2 \omega_1) & \cdots & \end{pmatrix}$$

とする。 a が n 次元 (有限次元) 正準線形表現系の行動であるための必要十分条件は $\text{rank } H_a = n$ (有限) である。

4. 実時間部分実現

線形表現系 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ とある入力系列

$\omega = u^m \cdots u^1 \in U^*$ に対し, 写像

$$a_\sigma: [0, |\omega|] \rightarrow K; m \mapsto h \phi(u^m \cdots u^1) x^0$$

は σ の ω に対する出力系列 (実験データ) と云われる。ただし、 $0 \leq m \leq |\omega|$ 。

逆に、与えられた入力系列 ω と実験データ $\sigma: [0, |\omega|] \rightarrow K$ (入出力データ (ω, σ)) に対し、 h 中 $(u^m \dots u^1) x^0 = \sigma(m)$, $0 \leq m \leq |\omega|$ を満す線形表現系 σ は入出力データ (ω, σ) を部分実現すると云われる。

任意の入出力データ (ω, σ) を実現する有限次元線形表現系は必ず存在する。したがって、その中で最小次元のもの、すなわち、 (ω, σ) の最小部分実現系が存在する。これは正準ではあるが、同型を除いた意味でさえも、それは一般に一意的ではない。一意性が云えなければ、それが真にプラントを記述すると主張することはできない。

(4.1) 命題. プラントが有限次元線形表現系 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ で記述され、 $F(u), u \in U$ が全単射であるとする。ただし、 σ すなわち、 X, F, x^0, h および X の次元は未知であるとする。この時、入出力データ (ω, σ) のみから σ を (同型を除いて) 一意に導出できるような入力系列 $\omega \in U^*$ が (一般に σ に依存して) 存在する。

(4.2) 定理. プラントが N 次元以下の正準線形表現系 $\sigma = ((X, F), x^0, h)$ で記述され、 $F(u), u \in U$ が全単射であるとする。ただし、 σ , すなわち、 X, F, x^0, h

および λ の次元は未知である。この時、入出力データ (ω, y) のみから σ_t を (同型を除いて) 一意に導出できるような入力系列 $\omega \in U^*$ が σ_t に依存しないように存在する。

(4.3) 定理. プラットは主定理と同じ仮定を持つ σ_t で記述されたとする。入力値を無作為に選び実験系列を伸べていけば、その入出力データから σ_t が同型を除いて求まる確率は 1 に近づく。

5. 単一実験擬可到達性および可識別性

主定理 (4.2) は定理 (4.1) から導出され、定理 (4.3) は主定理から導出される。そこで、定理 (4.1) を導出するに重要な命題を 2 つ述べる。

(5.2) 命題. $\sigma = ((K^n, F), x^0, -)$ を擬可到達な線形表現系、ただし、 $F(u), u \in U$ は全単射、 $Y \subset K^n$ を m 次元の線形部分空間とする。任意の $x^0 \in \{\phi(\omega)x^0; \omega \in U^*\} \cap Y$ に對し、ある入力系列 $\omega \in U^*$ ただし $|\omega| \leq m-1$ が存在し、 $\phi(\omega)x^0 \notin Y$ となる。

(5.2) 命題. $\sigma = ((K^n, F), -, h)$ を可識別な線形表現系、ただし、 $F(u), u \in U$ は全単射とする。この時、入出力データから初期状態 x^0 が決定出来るような入力系列 $\omega \in U^*$ 、ただし、 $|\omega| \leq n(n-1)/2$ 、が存在する。

参考文献

- 1) R. E. Kalman et al ; Topics in Mathematical System Theory, McGraw, 1969
- 2) T. Matsuo ; Realization Theory of Continuous-Time Dynamical Systems, Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences Vol. 32, 1981
- 3) 長谷川・松尾 ; 離散時間線形表現系の実現理論, 計測自動制御学会論文集 第15巻 第3号
- 4) 長谷川・松尾 ; 離散時間有限次元線形表現系, 同上 第15巻, 第4号.
- 5) 長谷川・松尾・平野 ; 離散時間線形表現系の部分実現問題, 同上, 第18巻, 第2号.