

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の粘性消失極限

京大教養部 浅野 潔 (Kiyoshi Asano)

§1. 問題

我々がここで考察する問題は、半空間 $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$, $n \geq 2$, における Navier-Stokes 方程式 (以下 $N-S$ 方程式と略記する) の初期値境界値問題で、次のように書かれる:

$$(i) \quad \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$(P_\nu) \quad (ii) \quad \nabla \cdot u = 0,$$

$$(iii) \quad u|_{t=0} = u_0,$$

$$(iv) \quad \gamma u \equiv u|_{x_n=0} = 0.$$

ここで $u = {}^t(u_1, \dots, u_n) = u(\nu, t, x)$ は時刻 $t \geq 0$, 位置 $x \in \mathbb{R}_+^n$ における流速, $\nu \in (0, 1]$ は流体の粘性係数を表わす。また (ii) は流体の非圧縮条件 (密度 = 一定), (iv) は境界壁面における流体の粘着条件である。初期流速 u_0 は次の条件を満たす:

$$(I) \quad (i) \quad \nabla \cdot u_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$(ii) \quad \gamma u_0 = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

我々の目標は、次の結果を示すことである：

① 方程式系 (P_ν) が、パラメタ $\nu \in (0, 1]$ によらない時間幅 $[0, T]$ で、普通の意味の解（古典解または強解） $u(\nu, t, x)$ をもつ。

② その解 $u(\nu, t, x)$ が、 $\nu \rightarrow 0$ のとき、次の Euler 方程式系 (P_0) の解 $u^0(t, x)$ に（適当な意味で）収束する、

$$(i) \quad \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$(P_0) \quad (ii) \quad \nabla \cdot u = 0,$$

$$(iii) \quad u|_{t=0} = u_0,$$

$$(iv) \quad \gamma_n u \equiv u_n|_{x_n=0} = 0, \quad (\text{slip 条件}).$$

上述の問題は、（粘性をもつ）“実在流体”の流れの場に置かれた物体が、流れに及ぼす影響（あるいは流れが物体に及ぼす力）を考察した Prandtl の境界層理論（1904）から始まる。“完全流体”の方程式系 (P_0) を、“粘性流体”の方程式系 (P_ν) で置きかえるとき、流れの場に付加される効果は、 $O(\sqrt{\nu})$ の誤差を無視するとき、境界（物体表面）からの距離が $O(\sqrt{\nu})$ の範囲の流れの場に現れるので、この補正項は境界層と名付けられた。これによつて、完全流体の一樣な流れの場に置かれた物体に、流体が及ぼす力が 0 であるという “D'Alembert の paradox” は、一応回避されたわけである。境界層

は，変数 x_n を $x_n/\sqrt{t}$ の形で含むことに注意しておく。

偏微分方程式論の立場から，簡単なユキソトをつけ加える。

- ① 粘性項 $-\nu\Delta u$ の処理は，粗く（方程式を局所的に，ある n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ で考える場合に）いえば， $\partial_t - \nu\Delta$ に対する基本解 (heat kernel) :

$$U_0(\nu, t, x) = (4\pi\nu t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4\nu t}$$

を，Euler 方程式の解に，左から合成積 (convolution) としてかける手続きによって逐行される。（これは commutator $[U_0(\nu, t), u \cdot \nabla]$ の効果から生ずる補正項が加わる。）この手続きは，いわゆる mollifier と同等の効果をもたらす。

- ② $N-S$ 方程式 (2 階放物型) と Euler 方程式 (1 階双曲型) の境界条件の違い (粘着条件と slip 条件) は，Helmholtz 分解 (ベクトル場の potential part と solenoidal part への分解) を定義する境界条件の違いとして現れる。たとえば， $n=3$ の場合， $\mathbb{R}^3$ における Helmholtz 分解

$$\text{grad } \Delta^{-1} \text{div} - \text{rot } \Delta^{-1} \text{rot} = 1 \quad (= \delta(x))$$

に対して，境界条件による補正を行なって， $\mathbb{R}_+^3$ における Helmholtz 分解を構成するのであるが， $N-S$ 的 Helmholtz 分解と Euler 的 Helmholtz 分解において，補正項の効果は全く異なる。

上記の事情は，方程式の解法に自然に組み込まれている。

とが多いので、強くは意識されなければならないけれども、デリケートな問題を扱う場合には、留意しておかななくてはならない。

我々は (P_ν) の解 $u(\nu, t, x)$ として、次の形のものを求める：

$$(1.1) \quad u(\nu, t, x) = u^0(\nu, t, x) + \varepsilon u^1(\varepsilon, t, x) + \varepsilon u^2(\varepsilon, t, x) \\ + \tilde{u}^1(\varepsilon, t, x', x_n/\varepsilon) + \varepsilon \tilde{u}^2(\varepsilon, t, x', x_n/\varepsilon),$$

$$\tilde{u}^1(\varepsilon, t, x', x_n) = \begin{pmatrix} \tilde{u}^{1'}(\varepsilon, t, x', x_n) \\ \varepsilon \tilde{u}_n^1(\varepsilon, t, x', x_n) \end{pmatrix},$$

$$p(\nu, t, x) = p^0(\nu, t, x) + \varepsilon p^1(\varepsilon, t, x) + \varepsilon p^2(\varepsilon, t, x) \\ + \varepsilon \tilde{p}^2(\varepsilon, t, x', x_n/\varepsilon),$$

$$\varepsilon = \sqrt{\nu} \in (0, 1].$$

後に構成法を示すが、これらは $\{u^0, p^0\}$, $\{u^1, p^1, \tilde{u}^1\}$, $\{u^2, p^2, \tilde{u}^2, \tilde{p}^2\}$ の順に、それぞれが特別な形の N - S 方程式をみなすように定められ、かつ u^0 は (ν, t) について、 $u^i, \tilde{u}^i$ ($i=1, 2$) は (ε, t) について $[0, 1] \times [0, T]$ にあって、適当な (x 変数の関数空間の) 強位相で滑らかとなる。さらに $\tilde{u}^1(\varepsilon, t, x', x_n)$ (の成分) は、 ε について一般に $O(e^{-\delta x_n})$ でもある。以下に $u^0, u^1, u^2, \tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ のみなすべき N - S 方程式を書く。

$$(P_\nu)^0 \quad \begin{cases} \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 - \nu \Delta u^0 + \nabla p^0 = 0, \\ \nabla \cdot u^0 = 0, \\ u^0|_{t=0} = u_0, \\ \gamma_n u^0 = 0, \end{cases}$$

$$(P_\nu)^1 \begin{cases} \partial_t u^1 + u^0 \cdot \nabla u^1 - \nu \Delta u^1 + u^1 \cdot \nabla u^0 + \nabla p^1 = 0, \\ \nabla \cdot u^1 = 0, \\ u^1|_{t=0} = 0, \\ \gamma_n u^1 = -\gamma_n \tilde{u}^1. \end{cases}$$

$$(\tilde{P}_\nu)^1 \begin{cases} \partial_t \tilde{u}^{1'} + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1) \cdot \nabla \tilde{u}^{1'} - \nu \Delta \tilde{u}^{1'} + \tilde{u}^1 \cdot \nabla u^{0'} = 0, \\ \nabla' \cdot \tilde{u}^{1'} = \partial_1 \tilde{u}_1^1 + \dots + \partial_{n-1} \tilde{u}_{n-1}^1 = -\partial_n \tilde{u}_n^1, \\ \tilde{u}^{1'}|_{t=0} = 0, \\ \gamma' \tilde{u}^{1'} = \tilde{u}^{1'}|_{x_n=0} = -\gamma' u^0. \end{cases}$$

$$(P_\nu)^2 \begin{cases} \partial_t u^2 + (u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon u^2) \cdot \nabla u^2 - \nu \Delta u^2 + u^2 \cdot \nabla (u^0 + \varepsilon u^1) + \nabla p^2 = -\varepsilon u^1 \cdot \nabla u^1, \\ u^2|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$(\tilde{P}_\nu)^2 \begin{cases} \partial_t \tilde{u}^2 + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1 + \varepsilon u^2 + \varepsilon \tilde{u}^2) \cdot \nabla \tilde{u}^2 - \nu \Delta \tilde{u}^2 + \varepsilon \nabla \tilde{p}^2 \\ \quad + \tilde{u}^2 \cdot \nabla (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1 + \varepsilon u^2) = -\tilde{u}^1 \cdot \nabla u^1 - r P^\infty e_\nu \tilde{h}^1, \\ \tilde{u}^2|_{t=0} = 0 \\ \tilde{h}^1 = {}^t(0, -\partial_n^{-1} \nabla' \cdot \tilde{v}^{1'} + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1) \cdot \nabla \tilde{u}_n^1 + \tilde{u}^1 \cdot \nabla u_n^0) \quad (\text{後述}), \end{cases}$$

$$(P_\nu)^2 - (\tilde{P}_\nu)^2 \begin{cases} \nabla \cdot (u^2 + \tilde{u}^2) = 0, \\ \gamma(u^2 + \tilde{u}^2) = -{}^t(\gamma' u^1, 0). \end{cases}$$

我々の結果は、次節の記号を用いて次のように表される。

定理. $u_0 \in H_a^{\ell, \gamma_0, \theta_0}$, $\ell > \frac{n-1}{2} + 1 + 2$, $\gamma_0 > 0$, $0 < \theta_0 < \pi/4$, $\alpha > 0$,

かつ u_0 は条件 (I) を満たすとする。このときある $T > 0$ が

存在して, (P₀) の解 $u(v, t, x)$ が (1.1) の形をもつものが $(v, t) \in (0, 1] \times [0, T]$ に対して (唯一つ) 存在する。しかも (1.1)

の各項は次の条件を満たす:

$$u^0(v, t, x) \in K_{a, \beta_0, T}^{\lambda, \rho_0, \theta_0}.$$

$$u^1(\varepsilon, t, x) \in K_{a, \beta_1, T}^{\lambda-1, \rho_0, \theta_0}.$$

$$\tilde{u}^1(\varepsilon, t, x) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u}^1(\varepsilon, t, x', x_n) \\ \tilde{u}_n^1(\varepsilon, t, x', x_n) \end{pmatrix} \in K_{a/\varepsilon, \beta_1, T}^{\lambda-1, \rho_0, \theta_0, (\mu)}.$$

$$u^2(\varepsilon, t, x) \in K_{a, \beta_2, T}^{\lambda-2, \rho_0, \theta_0}.$$

$$\tilde{u}^2(\varepsilon, t, x) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u}^2(\varepsilon, t, x', x_n) \\ \tilde{u}_n^2(\varepsilon, t, x', x_n) \end{pmatrix} \in K_{a/\varepsilon, \beta_2, T}^{\lambda-2, \rho_0, \theta_0}.$$

ただし, $0 < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2$, $\mu > 0$.

§ 2. 抽象的 Cauchy-Kowalewski 定理と関数空間

$\{X_\rho; 0 \leq \rho \leq \rho_0\}$ を Banach scale, すなわち Banach 空間 X_ρ

(ノルムを $\|\cdot\|_\rho$ で表す) の族で, 次の性質をもつものとする:

$$(2.1) \quad 0 \leq \rho' \leq \rho \leq \rho_0 \text{ のとき } X_{\rho'} \supset X_\rho \text{ かつ } \|\cdot\|_{\rho'} \leq \|\cdot\|_\rho.$$

次のような関数族を定義する:

$$(2.2) \quad X_{\rho, T} = \{u(t): [0, T] \rightarrow X_\rho \text{ 連続関数}\},$$

$$\|u\|_{\rho, T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_\rho.$$

$$(2.3) \quad Y_{\rho, \beta} = \{u(t): [0, T] \ni t \mapsto u(t) \in X_{\rho-\beta t} \text{ (左連続関数)}\},$$

$$\|u\|_{\rho, \beta} = \sup_{0 \leq t \leq T} |u(t)|_{\rho - \beta t} \quad (0 < T \leq \rho/\beta),$$

$$Y_{\rho, \beta}(R) = \{u(t) \in Y_{\rho, \beta}; \|u\|_{\rho, \beta} \leq R\}.$$

$u(t)$ の定義域を明示しない場合は, $Y_{\rho, \beta, T}, Y_{\rho, \beta, T}(R)$ と書くことにする。

次の性質をみたす写像 $F(\varepsilon, t, u(\cdot))$ を考えよう:

(F.1) $F(\varepsilon, t, u(\cdot))$ は $[0, 1] \times [0, T] \times Y_{\rho, \beta, \tau}(R)$ から $Y_{\rho', \beta, \tau}$ への連続写像, ただし $0 \leq \rho' < \rho \leq \rho_0 - \beta\tau, \beta \geq 0, \tau \leq T_0$.

(F.2) $u, v \in Y_{\rho, \beta}, \beta \geq \beta_0 \geq 0$ のとき $\rho' < \rho(\omega) < \rho - \beta\tau \leq \rho_0 - \beta_0\tau$ に対して次の評価式が成立つ

$$\begin{aligned} & |F(\varepsilon, t, u(\cdot)) - F(\varepsilon, t, v(\cdot))|_{\rho'} \\ & \leq \int_0^t C |u(\omega) - v(\omega)|_{\rho(\omega)} / (\rho(\omega) - \rho') d\omega, \end{aligned}$$

(F.3) $|F(\varepsilon, t, 0)|_{\rho_0 - \beta_0\tau} \leq R_0 < R$.

この $F(\varepsilon, t, u(\cdot))$ に対して, 次の (非線形) 方程式を考える。

$$(S.4) \quad u(t) = F(\varepsilon, t, u(\cdot)), \quad 0 \leq t \leq T (\leq T_0).$$

これは parameter ε を含み, 時間 t について正規型であるような 1 階偏微分方程式系 (Kowalewskian system) を, t に関する Volterra 型積分方程式に書きかえたものの一般化である。この一般化は, 実際には必要の一般化である。

定理 ACK (抽象的 Candy-Kowalewski 定理). 条件 (F.1), (F.2) および (F.3) の下で, ある $\beta > \beta_0$ と $T < T_0$ が存在して,

方程式 (2.4) は $Y_{\beta_0, \beta, T}(R)$ において唯一つの解 $u(\varepsilon, t)$ をもつ。

ただし $0 < T \leq \beta_0/\beta$ 。また $u(\varepsilon, t)$ は $[0, 1] \times [0, T]$ の $(\varepsilon, t) \mapsto$

$Y_{\beta_0, \beta}(R)$ の連続写像である。 β は次のように選ぶ： β は次のように選ぶ：

$$(2.5) \quad \beta = \max \{ 4\beta_0/3, 8Ce, 16Ce^2R_0/(R-R_0) \}.$$

証明は、次の補助的ノルムを利用して行う：

$$\|u\|_{\beta} = \sup_{0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq \beta_0 - \beta t} |u(t)|_s \varphi\left(\frac{\beta t}{\beta_0 - \beta}\right), \quad \varphi(t) = (1-t)e^{-t},$$

$$(2.6) \quad \|u\|_{\beta} \leq \|u\|_{\beta_0, \beta} \leq (1 - \beta'/\beta)^{-1} e \|u\|_{\beta'}, \quad \beta > \beta' \geq 0.$$

(F, 2) を用いると、 $u, v \in Y_{\beta_0, \beta}(R)$ 、 $\beta \geq \beta_0$ に対して、

$$\|F(\varepsilon, t, u(\cdot)) - F(\varepsilon, t, v(\cdot))\|_{\beta} \leq (2Ce/\beta) \|u - v\|_{\beta}$$

が成り立つ。(2.5) を用いて β をとり、

$$u_0(\varepsilon, t) = F(\varepsilon, t, 0),$$

$$u_{n+1}(\varepsilon, t) = F(\varepsilon, t, u_n(\varepsilon, \cdot)) \quad (n \geq 0),$$

$$\beta_n = \beta(1 - 2^{-n-1}) \quad \Leftrightarrow \quad \beta - \beta_n = \beta 2^{-n-1}$$

とおくと、次の評価式を得る：

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{\beta_n} \leq (2Ce/\beta_n) \|u_n - u_{n-1}\|_{\beta_n},$$

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{\beta_0, \beta} \leq (1 - \beta_n/\beta)^{-1} e \|u_{n+1} - u_n\|_{\beta_n}$$

$$= 2^{n+1} e \|u_{n+1} - u_n\|_{\beta_n}$$

$$\leq 2^{n+1} e (2Ce/\beta_n)^{n+1} \|u_1 - u_0\|_{\beta_n}$$

$$\leq 8/3 e (4Ce/\beta)^n \|u_1 - u_0\|_{\beta_1}.$$

これから $\{u_n(\varepsilon, t)\}$ が $Y_{\beta_0, \beta}(R)$ における収束列 ($\varepsilon \in [0, 1]$) かつ

と一様収束) であることが示される。

以下で記号と内数空間を導入する。簡単のため $n=3$ とする。

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad I(p) &= (-p, p) \\
 D(p)^2 &= \mathbb{R}^2 + \sqrt{-1} I(p)^2 \\
 &= \{z' = x' + iy'; \ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ y' = (y_1, y_2) \in I(p)^2\}, \\
 \Sigma(\theta, a) &= \Sigma_1(\theta, a) \cup \Sigma_2(\theta, a), \quad 0 < \theta < \pi/4, \ a > 0, \\
 \Sigma_1(\theta, a) &= \{z_3 = x_3 + iy_3; \ |y_3| \leq x_3 \tan \theta, \ 0 \leq x_3 \leq a\}, \\
 \Sigma_2(\theta, a) &= \{z_3 = x_3 + iy_3; \ |y_3| \leq a \tan \theta, \ x_3 \geq a\}, \\
 \Omega(p, \theta, a) &= D(p)^2 \times \Sigma(\theta, a), \\
 L(y') &= \mathbb{R}^2 + \sqrt{-1} y' \subset D(p)^2, \\
 L(\theta', a) &= L_1(\theta', a) \cup L_2(\theta', a) \subset \Sigma(\theta, a) \quad (0 \leq \theta' \leq \theta), \\
 L_1(\theta', a) &= \{z_3 = x_3 + iy_3; \ y_3 = \pm x_3 \tan \theta', \ 0 \leq x_3 \leq a\}, \\
 L_2(\theta', a) &= \{z_3 = x_3 + iy_3; \ y_3 = \pm a \tan \theta', \ x_3 \geq a\}.
 \end{aligned}$$

② Banach空間 X ($\|\cdot\|_X$) に対し, $B^k([0, T]; X)$ は $[0, T]$ から X への (強位相で) 有界連続的微分可能関数の全体を表わす。 $B^k([0, T]; X)$ のノルムは,

$$\|f\|_{X, k, T} = \sum_{j=0}^k \sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial_t^j f(t)\|_X < \infty.$$

$[0, T]$ を $\Sigma(\theta, a)$ の $\Delta_T = [0, 1] \times [0, T]$ で置きかえたものを, $B^k(\Sigma(\theta, a); X)$ なら $B^k(\Delta_T; X)$ で表わす。

② Banach scale $\{X_p; 0 \leq p \leq p_0\}$ ($1/p_0 \in \mathbb{N}$) に対して,

次のノルムにより $B_p^k([0, T]; X_p)$ を定義する:

$$\|f\|_{p, k, p, T} = \sum_{j=0}^k \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_t^j f(t)|_{p-p, t}.$$

$$B_p^k(\Delta_T; X_p) = \bigcap_{j=0}^k B^j([0, 1]; B^{k-j}([0, T]; X_p)) \quad \text{と する.}$$

③ $H^{l, p} \ni f \iff$ (i) $f(x' + iy')$ は $D(p)^2$ で解析的,

$$(ii) \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} f \in L^2(L(y')), \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leq l, \quad y' \in I(p)^2,$$

$$(iii) \|f\|_{l, p} = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq l} \sup_{y' \in I(p)^2} |\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} f(\cdot + iy')|_{L^2(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

④ $H_a^{l, p, \theta} \ni f \iff$ (i) $f(z', z_3)$ は $\Omega(p, \theta, a)$ の内部で解析的,

$$(ii) \partial^\alpha f(x' + iy', z_3) \in B^0(\Sigma(\theta, a); H^{l-|\alpha|, p}), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq l,$$

$$(iii) \|f\|_{l, p, \theta} = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{z_3 \in \Sigma(\theta, a)} |\partial^\alpha f(\cdot, z_3)|_{0, p} < \infty.$$

④' $H_a^{l, p, \theta, (\mu)} \ni f \quad (\mu \geq 0) \iff$ (i) $f \in H_a^{l, p, \theta},$

$$(ii) \|f\|_{l, p, \theta, (\mu)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{z_3 \in \Sigma(\theta, a)} |e^{\mu z_3} \partial^\alpha f(\cdot, z_3)|_{0, p} < \infty.$$

⑤ $K'_{p, T}^{l, p} = \bigcap_{j=0}^{[l/2]} B_p^j([0, T]; H^{l-2j, p}),$

$$\|f\|_{l, p, p, T} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_t^j f(t, \cdot)|_{l-2j, p-p, t}.$$

$$K'_{p, T}^{l, p} = \bigcap_{k=0}^l B^k([0, 1]; K'_{p, T}^{l-k, p}).$$

⑥ $K_{a, p, T}^{l, p, \theta} = \bigcap_{j=0}^{[l/2]} B_p^j([0, T]; H_a^{l-2j, p, \theta}),$

$$\|f\|_{l, \beta, \theta, \beta, T} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_t^j f(t, \cdot)|_{l-2j, \beta-\beta t, \theta-\beta t}.$$

$$\mathcal{K}_{a, \beta, T}^{l, \beta, \theta} = \bigcap_{k=0}^l B^k([0, 1]; K_{a, \beta, T}^{l-k, \beta, \theta}).$$

$$\textcircled{6} \quad K_{a, \beta, T}^{l, \beta, \theta, (\mu)} = \bigcap_{j=0}^{[l/2]} B_{\beta}^j([0, T]; H_a^{l-2j, \beta, \theta, (\mu)}).$$

$$\|f\|_{l, \beta, \theta, \beta, T}^{(\mu)} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \sup_{0 \leq t \leq T} |\partial_t^j f(t, \cdot)|_{l-2j, \beta-\beta t, \theta-\beta t, (\mu)},$$

$$\mathcal{K}_{a, \beta, T}^{l, \beta, \theta, (\mu)} = \bigcap_{k=0}^l B^k([0, 1]; K_{a, \beta, T}^{l-k, \beta, \theta, (\mu)}).$$

$$\textcircled{7} \quad \mathcal{K}_{a, \beta, T}^{l, \beta, \theta} = \bigcap_{k=0}^{[l/2]} B^k([0, 1]; K_{a, \beta, T}^{l-2k, \beta, \theta}), ([0, 1] \ni \nu).$$

§ 3. 作用素

我々は § 1 の 5 個の N - S 方程式の解を, それぞれ特別の形に書き下す。その後定理 ACK を用いて, 必要な性質を導く。そのためにかなり多数の作用素を補助的に用いるので, こゝで一括して説明する。 $n=3$ とし, 積分核の形は大体省略する。

① $r = \mathbb{R}^3$ の関数の $\mathbb{R}_+^3$ への制限,

$e = \mathbb{R}_+^3$ の関数の $\mathbb{R}^3$ への延長; $ef(x', x_3) = 0$, $x_3 < 0$,

$e_0 = \mathbb{R}_+^3 (D(\rho) \times \Sigma(\theta, a))$ から $\mathbb{R}^3 (D(\rho) \times \{\Sigma(\theta, a) \cup (1 - \Sigma(\theta, a/2))\})$

への “nice extension” i.e., 滑かさを保つ延長,

$\gamma = \mathbb{R}_+^3$ (又は $\mathbb{R}^3$) の関数の “ $x_3 = 0$ ” への制限 (既出)。

② $U_0(\nu, t, x) = (4\pi\nu t)^{-3/2} e^{-|x|^2/4\nu t},$
 $U_0(\nu, t) f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} U_0(\nu, t, x-\eta) f(\eta) d\eta,$
 $U_0(\nu) f(t, \cdot) = \int_0^t U_0(\nu, t-\lambda) f(\lambda, \cdot) d\lambda,$
 $U_0'(\nu, t, x') = (4\pi\nu t)^{-1} e^{-|x'|^2/4\nu t},$
 $\bar{U}_0(\nu, t, x', x_3) = U_0'(\nu, t, x') (4\pi t)^{-1/2} e^{-x_3^2/4t},$
 $\bar{U}_0(\nu, t), \bar{U}_0(\nu)$ は $U_0(\nu, t), U_0(\nu)$ と同様に定義する。

③ N および D を, $\mathbb{R}_+^3$ における Laplacian Δ に対する Neumann 問題および Dirichlet 問題を Poisson operator とする, i.e.,

$$\Delta N g = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^3, \quad \gamma \partial_3 N g = g \text{ on } \mathbb{R}^2,$$

$$\Delta D g = 0 \text{ in } \mathbb{R}_+^3, \quad \gamma D g = g \text{ on } \mathbb{R}^2, \quad D = \partial_3 N.$$

④ $\mathbb{R}^2$ (又は $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$) 上の関数 $u(x')$ (又は $u(t, x')$) の Fourier 変換 (又は Fourier-Laplace 変換) を $\hat{u}(\xi')$ (又は $\hat{u}(\lambda, \xi')$) と書く,

$$\hat{u}(\xi') = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i x' \cdot \xi'} u(x') dx',$$

$$\hat{u}(\lambda, \xi') = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \hat{u}(t, \xi') dt.$$

⑤ $(Tu)^\wedge(\xi') = \sigma(T)(\xi') \hat{u}(\xi') \quad (\text{又は } (Tu)^\sim(\lambda, \xi') = \sigma(T)(\lambda, \xi') \tilde{u}(\lambda, \xi'))$

により, 作用素 T の symbol $\sigma(T)(\xi')$ (又は $\sigma(T)(\lambda, \xi')$) を定める.

$$\sigma(N)(\xi', x_3) = -e^{-|\xi'|x_3} / |\xi'|,$$

$$\sigma(D)(\xi', x_3) = e^{-|\xi'|x_3},$$

$$\sigma(U'_0(\nu, t))(\xi) = e^{-\nu t |\xi|^2}, \quad \sigma(U'_0(\nu))(\lambda, \xi') = (\lambda + \nu |\xi'|^2)^{-1}.$$

⑥ 熱作用素 $\partial_t - \nu \Delta$ (又は $\partial_t - \nu \Delta' - \partial_3^2$) の Neumann (Dirichlet) 問題
の Poisson operator は $P_1(\nu)$ ($P_2(\nu)$) (又は $\bar{P}_1(\nu)$ ($\bar{P}_2(\nu)$)) と書く,

$$\begin{cases} (\partial_t - \nu \Delta) P_j(\nu) g = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}_+^3, \quad j = 1, 2, \\ P_j(\nu) g|_{t=0} = 0, \\ \partial_3 P_1(\nu) g = g(t, x'), \quad \text{及} \quad P_2(\nu) g = g(t, x'), & t > 0, x' \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

$$P_2(\nu) = \partial_3 P_1(\nu), \quad P_j(\nu) g(t, \cdot) = \int_0^t P_j(\nu, t-s) g(s) ds.$$

symbol は (2) の性質がある:

$$\sigma(P_1(\nu))(\lambda, \xi', x_3) = -e^{-\sqrt{\lambda/\nu + |\xi'|^2} x_3} / \sqrt{\lambda/\nu + |\xi'|^2},$$

$$\sigma(P_2(\nu))(\lambda, \xi', x_3) = e^{-\sqrt{\lambda/\nu + |\xi'|^2} x_3},$$

$$\sigma(\bar{P}_j(\nu))(\lambda, \xi', x_3) = e^{-\sqrt{\lambda/\nu + |\xi'|^2} x_3} (-1/\sqrt{\lambda/\nu + |\xi'|^2})^{2-j}, \quad j = 1, 2.$$

⑦ 作用素 $N' = {}^t(N_1, N_2)$, Λ' , $\omega(\nu)$, $\tau(\nu)$ を次により定義する,

$$\sigma(N_j) = i \xi_j / |\xi|, \quad j = 1, 2, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$\sigma(\Lambda') = |\xi|, \quad \Lambda' = -\partial_1 N_1 - \partial_2 N_2.$$

$$\sigma(\omega(\nu))(\lambda, \xi') = |\xi'| / \sqrt{\lambda/\nu + |\xi'|^2},$$

$$\sigma(\tau(\nu))(\lambda, \xi') = |\xi'| / (\sqrt{\lambda/\nu + |\xi'|^2} + |\xi'|) = \sigma(\omega(\nu)) - \sigma(\tau_1(\nu)).$$

次の 2 つが成り立つ:

$$\sigma(\omega(\nu, t))(\xi') = \pi^{-1/2} \nu^{1/2} t^{-1/2} |\xi'| e^{-\nu t |\xi'|^2},$$

$$\sigma(\omega^2(\nu, t))(\xi') = \nu |\xi'|^2 e^{-\nu t |\xi'|^2}, \quad \omega(\nu) \tau_1(\nu) = -\tau_1(\nu).$$

$$\textcircled{8} \quad Q^\infty = \text{grad } \Delta^{-1} \text{div}, \quad P^\infty = 1 - Q^\infty = -\text{rot } \Delta^{-1} \text{rot},$$

$$P = r P^\infty e_0 - \nabla N r_n P^\infty e_0, \quad Q = 1_{\mathbb{R}^3} - P.$$

$1_{\mathbb{R}^3} = P + Q$ は Euler 方程式に付随する Helmholtz 分解。

$$\delta(Q^\infty)(\xi) = (\xi^t \xi / |\xi|^2), \quad \nabla \cdot Q^{(\infty)} = \nabla \cdot, \quad \nabla \cdot P^{(\infty)} = 0.$$

$$\textcircled{9} \quad V(v, t) = P r U_0(v, t) e_0 = r P^\infty U_0(v, t) e_0 - \nabla N r_n P^\infty U_0(v, t) e_0.$$

$V(v, t)$ は次の条件を満たし, $(P_\nu)^0$ の解法に用いられる:

$$\begin{cases} (\partial_t - \nu \Delta) V(v, t) + \nabla N r_n P^\infty \partial_t U_0(v, t) e_0 = 0, \\ \nabla \cdot V(v, t) = 0, \\ V(v, 0) = P, \\ r_n V(v, t) = 0. \end{cases}$$

$$\textcircled{10} \quad \bar{U}_1(v) = r \bar{U}_0(v) e - \bar{P}_1(v) r \partial_3 \bar{U}_0(v) e,$$

$$\bar{U}_2(v) = r \bar{U}_0(v) e - \bar{P}_2(v) r \bar{U}_0(v) e = r \bar{U}_0(v) e + \bar{P}_1(v) r \partial_3 \bar{U}_0(v) e.$$

$\bar{U}_j(v)$ は次の条件を満たし, $(\bar{P}_\nu)^1$ に適用される:

$$\begin{cases} (\partial_t - \nu \Delta' - \partial_3^2) \bar{U}_j(v) f = f(t, x', x_3), \\ \bar{U}_j(v) f|_{t=0} = 0, \\ r \partial_3^{2-j} \bar{U}_j(v) f = 0, \quad j=1, 2. \end{cases}$$

$$\textcircled{11} \quad \Omega(v) = N' \omega(v)^t N',$$

$$P(v) = P_1(v) + P_0(v) + P_2(v),$$

$$P_1(\nu)g = \nabla N g_n - \nabla N N' \cdot \tau(\nu) (1 + \Omega(\nu)) (g' + N' g_n),$$

$$P_0(\nu)g = \nu \nabla \tau U_0(\nu) e D \nabla' \cdot (1 + \Omega(\nu)) (g' + N' g_n),$$

$$P_2(\nu)g = P_2(\nu) \begin{pmatrix} E' - \frac{1}{2} \omega(\nu) \tau(\nu) N'^t N' \\ \frac{1}{2} \omega(\nu) - \frac{1}{2} \omega(\nu) \tau(\nu)^t N' \end{pmatrix} (1 + \Omega(\nu)) (g' + N' g_n),$$

E' は (2.2) 単位行列.

$u(\nu, t, x', x_2) = P(\nu)g$ は, 次の Stokes 方程式を満たす:

$$\begin{cases} (\partial_t - \nu \Delta) u + \nabla p = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}_+^3, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \gamma u = g, & t > 0, x' \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

$P_2(\nu)g$ の 4 枚 boundary layer である ε に注意しよう.

補助定理 3.1. 上述の作用素は, 上述の関数空間で次の性質 (作用素ノルムの評価) をもつ. 特に, ノルムの評価は, $\varepsilon > 0$ による.

$$(i) \quad U_0(\nu, t), \bar{U}_0(\nu, t), U'_0(\nu, t) = O(1),$$

$$\varepsilon \Lambda' U_0(\nu, t), \varepsilon \Lambda' \bar{U}_0(\nu, t), \partial_2 \bar{U}_0(\nu, t), \varepsilon \Lambda' U'_0(\nu, t) = O(t^{-1/2}),$$

$$(ii) \quad D = O(1), \quad N_j = O(1), \quad \nabla N = D^t (-N', 1) = O(1),$$

$$(iii) \quad \bar{P}_1(\nu, t) = (\varepsilon \Lambda')^{-1} \int_0^t \bar{P}_2(\nu, t-s) \omega(\nu, s) ds = O(t^{-1/2}),$$

$$(\varepsilon \Lambda')^k \bar{P}_1(\nu, t) = O(t^{-1/2 - k/2}), \quad k \geq 0,$$

$$(iv) \quad (\varepsilon \Lambda')^{-k} \omega(\nu, t), (\varepsilon \Lambda')^{-k} \tau(\nu, t) = O(t^{-1+k/2}), \quad 0 \leq k \leq 1,$$

$$(v) \quad Q^\infty = O(1), \quad P^\infty = O(1).$$

$$(vi) \quad P_1(v)g - \nabla N g_n = \int_0^t P_1(v, t-\lambda) g(\omega) d\omega, \quad (\varepsilon \Lambda')^{-k} P_1(v, t) = O(t^{-1+k/2})$$

$$P_0(v)g = \int_0^t P_0(v, t-\lambda) g(\omega) d\omega, \quad (\varepsilon \Lambda')^{-k} P_0(v, t) = O(t^{-1+k/2}),$$

$$P_2(v)g - P_2(v) \begin{pmatrix} g' + N' g_n \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^t P_2(v, t-\lambda) g(\omega) d\omega,$$

$$(\varepsilon \Lambda')^{-k} P_2(v, t) = O(t^{-1+k/2}), \quad v \leq k \leq 1.$$

$$(vii) \quad \bar{P}_2(v) \mp \bar{U}_0(v) = -\bar{P}_1(v) \mp \partial_3 \bar{U}_0(v) = \bar{\pi}_2(v, t) \star_t, \quad \bar{\pi}_2(v, t) = O(1).$$

最後に, 1 階 1 次の微分作用素の作用素ノルムの評価をなす。
 3. これにより定理 ACK が適用可能となる。

補助定理 3.2. $f(z)$ は $D(p) = \mathbb{R} + \sqrt{-1} I(p)$ で解析的, かつ

$$\|f\|_p = \sup_{y \in I(p)} \|f(\cdot + iy)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$$

とする。このとき次のことが成立つ。

$$(i) \quad \Gamma_{p'} = \{z = \xi + i\eta; \xi \in \mathbb{R}, \eta = \pm p'\}, \quad 0 \leq p' < p, \quad \varepsilon \text{ お } < \varepsilon,$$

$$\partial_x f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{p'}} f(z)/(z-x-iy)^2 dz, \quad y \in I(p').$$

$$(ii) \quad \|\partial_x f\|_{p'} \leq \|f\|_p / (p-p').$$

補助定理 3.3. $f(z)$ は $\Sigma(\theta, a)$ 内で (Banach 空間の値をとる)

解析的, かつ $\|f\|_\theta = \sup_{z \in \Sigma(\theta, a)} \|f(z)\| < \infty$ とする。このとき:

$$(i) \quad \partial_z f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\theta', a)} f(z)/(z-z)^2 dz, \quad z \in \Sigma(\theta', a),$$

$$\Gamma(\theta', a) = L(\theta'', a) \cup L(-\theta'', a), \quad |\theta'| < \theta'' \leq \theta,$$

(ii) $\chi(z) = \min\{|z|, a\}$ とおくと, a は χ は $C(\bar{\Omega})$ があるから,

$$|\chi(\cdot) \partial_z f|_{\theta'} \leq C(\theta_0) \|f\|_{\theta} / (\theta - \theta'), \quad 0 \leq \theta' < \theta \leq \theta_0 (< \pi/4),$$

$$|\chi(\cdot) \partial_z f|_{\theta', (\mu)} \leq C(\theta_0) \|f\|_{\theta, (\mu)} / (\theta - \theta') + \mu \|f\|_{\theta', (\mu)}, \quad \mu \geq 0.$$

§ 4. $u^0(\nu, t, x)$ の解法.

我々は $(P_\nu)^0$ の解の存在, § 3-(9) の $V(\nu, t)$ を用いて

$$(4.1) \quad u^0(\nu, t) = V(\nu, t) u_0 - \int_0^t V(\nu, t-\lambda) u^0(\nu, \lambda) \cdot \nabla u^0(\nu, \lambda) d\lambda$$

と書けることを示す。 $l > (n-1)/2 + 3$, $p_0 > 0$, $0 < \theta_0 < \pi/4$ とし,

$$X_{p, \theta} = H_a^{l, p, \theta} \quad (\text{又は } X_p = H_a^{l, p, \theta_0 p/p_0}) \quad 0 \leq p \leq p_0, 0 \leq \theta \leq \theta_0$$

とおく。

$$G(u) = u \cdot \nabla u, \quad u \in \dot{X}_{p, \theta} = \{u \in X_{p, \theta}; \gamma_n u = 0\}$$

に, Sobolev の補題と補助定理 3.2-3.3 を用いて,

$$|G(u)|_{l, p', \theta'} \leq C_0 \|u\|_{l, p', \theta'} \{ \|u\|_{l, p, \theta} / (p - p') + \|u\|_{l, p', \theta} / (\theta - \theta') \}$$

$$\begin{aligned} \|G(u) - G(v)\|_{l, p', \theta'} &\leq C_0 (\|u\|_{l, p, \theta} + \|v\|_{l, p, \theta}) \times \\ &\quad \times \{ \|u-v\|_{l, p, \theta} / (p - p') + \|u-v\|_{l, p', \theta} / (\theta - \theta') \} \end{aligned}$$

$$0 \leq p' < p \leq p_0, \quad 0 \leq \theta' < \theta \leq \theta_0, \quad C_0 = C(\theta_0, \mu).$$

が成る。さらに補助定理 3.1 を用いると,

$$\dot{Y}_{p, \theta, p} \ni u \mapsto F(\nu, t, u(u)) = V(\nu, t) u_0 - \int_0^t V(\nu, t-\lambda) u(u) \cdot \nabla u(u) d\lambda$$

$$\dot{Y}_{p, \theta, p} \text{ は (2.3) で } X_p \text{ を } \dot{X}_{p, \theta} \text{ とおきかえただけで,}$$

は, 通常 $0 < R_0 < R$ とすると, 定理 ACK の仮定 (F.1) - (F.3)

をすべてみたす。 ($C = C(R, C_0)$ とある) 故に次の定理を得る。

定理 4.1. ある $T_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ ($T_0 \leq f_0/\beta_0$) ^($\alpha > T_0 \leq \theta_0/\beta_0$) が存在して, (4.1) の唯一つの解 $u^0 \in K_{\alpha, \beta_0, T_0}^{l, f_0, \theta_0}$ が存在する。 $\alpha > u^0 \in K_{\alpha, \beta_0, T_0}^{l, f_0, \theta_0}$.

§ 5. $u^1(\varepsilon, t, x)$ と $\tilde{u}^1(\varepsilon, t, x', x_3/\varepsilon)$ の解法

境界層 $\tilde{u}^1$ に対する方程式を書き直すため, $x_3 \rightarrow \varepsilon x_3$ ($\varepsilon = \sqrt{\nu}$) の変数変換を行おう。このとき $\partial_3 \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \partial_3$ とあるので, (4.1) に合せて, 従属変数も変換する。

$$(5.1) \quad \bar{u}^j(t, x', x_3) = \begin{pmatrix} u^j(t, x', \varepsilon x_3) \\ \frac{1}{\varepsilon} u_3^j(t, x', \varepsilon x_3) \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1,$$

$$\tilde{u}^1(t, x', x_3) = \begin{pmatrix} \tilde{u}^1(t, x', x_3) \\ \tilde{u}_3^1(t, x', x_3) \end{pmatrix}.$$

$\tilde{u}^1(t, x', x_3/\varepsilon)$ の本来の形は, (4.1) のように法線成分 $= O(\varepsilon)$ なのであるが, 上のように書いても誤解はないであろう。この方が, $\nabla \cdot \bar{u}^1 = 0$, $\nabla \cdot \tilde{u}^1 = 0$ など記述に便利でもある。(5.1)

の変換後に, 方程式 $(\tilde{p}_\nu)^1$ は次のようになる:

$$(5.2) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{u}^1 + (\bar{u}^0 + \varepsilon \bar{u}^1 + \tilde{u}^1) \cdot \nabla \tilde{u}^1 - (\nu \Delta' + \partial_3^2) \tilde{u}^1 + \tilde{u}^1 \cdot \nabla \bar{u}^0 = 0, \\ \partial_3 \tilde{u}_3^1 = -\nabla' \cdot \tilde{u}^1, \quad \tilde{u}^1|_{t=0} = 0, \\ \gamma \tilde{u}^1 = -\gamma' u^0 \equiv -\gamma u^0. \end{cases}$$

$(P_D)^1$ と (5.2) の解を, 次の形を求めよう ($v^1, \tilde{v}^1$ を求める):

$$(5.3) \quad \begin{cases} u^1(\varepsilon, t) = V(\nu) v^1 + \nabla N \gamma \partial_3^{-1} \nabla' \tilde{u}^1, \\ \tilde{u}^1(\varepsilon, t) = \bar{U}_2(\nu) \tilde{v}^1 - \bar{P}_2(\nu) \gamma u^0, \\ \tilde{u}_3^1 = -\partial_3^{-1} \nabla' \tilde{u}^1 \equiv \int_{x_3}^{\infty} \nabla' \tilde{u}^1(\varepsilon, t, x', \eta_3) d\eta_3. \end{cases}$$

この形の u^1 と $\tilde{u}^1$ は方程式系の中で 2- 和 4 条件をみたす。故に
 条件 1 条件 (方程式) を満たすように v^1 と $\tilde{v}^1$ を定めればよい。

$f \in H_a^{l, p, \theta, (\mu)}$ ならば $\partial_3^{-1} f \in H_a^{l, p, \theta, (\mu)}$ であること, および

$$(5.4) \quad \begin{cases} \bar{P}_2(\nu) \gamma u^0 = \bar{\Lambda}_2(\nu, t) (\bar{P}^{\infty} - N' \bar{P}_3^{\infty}) e_0 \bar{u}_0 - \bar{\Lambda}_2(\nu) (\bar{P}^{\infty} - N' \bar{P}_3^{\infty}) \underbrace{\bar{u}_0^0}_{(e_0)} \nabla \bar{u}^1, \\ P^{\infty} = \begin{pmatrix} P_3^{\infty} \\ P_3^{\infty} \end{pmatrix}, P_3^{\infty} = 1 - \partial_3 \Delta^{-1} d\nu, \bar{\Lambda}_2(\nu, t) \text{ は補題定理 3.1(III),} \\ \partial_3^{-1} \nabla' \tilde{u}^1 = \{r \partial_3^{-1} \bar{U}_0(\nu) e - \bar{P}_1(\nu) \gamma \bar{U}_0(\nu) e\} \nabla' \tilde{v}^1 - \bar{P}_1(\nu) \gamma \nabla' u^0, \end{cases}$$

に注意する。(5.3) を $(P_D)^1$ と (5.2) の第 1 式に代入すると, v^1
 と $\tilde{v}^1$ に対する方程式が得られる;

$$(5.5) \quad v^1(t) + \underbrace{u^0 \cdot \nabla V(\nu) v^1}_{\text{Volterra型}} + \underbrace{[u^0 \cdot \nabla, \nabla] N \gamma \partial_3^{-1} \nabla' \tilde{u}^1}_{\text{Volterra型}} = 0,$$

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \tilde{v}^1(t) + & \underbrace{(\bar{u}_0^0 + \varepsilon \bar{u}_1^1 + \bar{u}_1^1) \cdot \nabla' \bar{U}_2(\nu) \tilde{v}^1}_{\text{Volterra型}} + \underbrace{(\bar{u}_3^0 + \bar{u}_3^1 + \bar{u}_3^1) \partial_3 \bar{U}_2(\nu) \tilde{v}^1}_{\text{Volterra型}} \\ & + \underbrace{\tilde{u}_3^1 \partial_3 u^0}_{\text{Volterra型}} - (\bar{u}_0^0 + \varepsilon \bar{u}_1^1 + \bar{u}_1^1) \cdot \nabla' \bar{P}_2(\nu) \gamma u^0 \\ & - (\bar{u}_3^0 + \bar{u}_3^1 + \bar{u}_3^1) \partial_3 \bar{P}_2(\nu) \gamma u^0 = 0. \end{aligned}$$

一部分が ∇v^1 の $\underbrace{\text{Volterra型}}_{1 \text{ 次式}}$, 一部分が $\nabla \tilde{v}^1$ の 1 次式である。特に

$$(5.7) \quad \bar{u}_3^0 \partial_3 \bar{U}_2(\nu) \tilde{v}^1 = [r \partial_3 \bar{U}_0(\nu) e_0, \bar{u}_3^0] \tilde{v}^1 + r \bar{U}_0(\nu) e_0 (\partial_3 \bar{u}_3^0) \tilde{v}^1 \\ + r \bar{U}_0(\nu) e_0 \bar{u}_3^0 \partial_3 \tilde{v}^1 + \bar{u}_3^0 \partial_3 \bar{P}_1(\nu) \gamma \partial_3 \bar{U}_0(\nu) e_0 \tilde{v}^1,$$

$$(5.8) \quad |\bar{u}_3^0(\nu, t, x)| \leq \min \{ \sup |u_3^0| / \varepsilon, x_3 \sup |\partial_3 u_3^0| \},$$

$$|\bar{u}_3^0(\nu, t, x) - \bar{u}_3^0(\nu, t, \eta)| \leq |x - \eta| / \varepsilon \sup |\nabla' u_3^0| + |x_3 - \eta_3| \sup |\partial_3 u_3^0|.$$

従って $H_{a/\varepsilon}^{l-j, p, \theta, (\mu)}$ ($L(\theta, a/\varepsilon) \subset \overline{L}(p, \theta, a/\varepsilon)$ を用いて)

$$(5.9) \quad |\bar{u}_3^0(t) \partial_3 \tilde{v}^1|_{l-j, p, \theta', (\mu)} \leq C_\varepsilon(\theta_0, \mu) |u_3^0|_{l, p_0, \theta_0, \beta_0} |\tilde{v}^1|_{l-j, p', \theta', (\mu)} / (\theta - \theta').$$

$$0 \leq \theta' < \theta \leq \theta_0 - \beta_0 t, \quad 0 \leq p' \leq p_0 - \beta_0 t, \quad 1 \leq j \leq l.$$

$w^1(t) = {}^t(v^1(t), \tilde{v}^1(t))$ とおくと, (5.5) - (5.6) は,

$$(5.10) \quad w^1(t) = F^1(\varepsilon, t, w^1(\cdot))$$

と書けて, 定理 ACK の条件 (F.1) - (F.3) を満たす。 u^1 は $\nabla' \tilde{v}^1$

を含み, $\varepsilon \nabla' \tilde{u}^1$ は $\tilde{v}^1$ の 1 次式で書けるので, εu^1 は $\tilde{v}^1$ と

$\varepsilon \tilde{v}^1$ の連続な 1 次写像であることに注意しよう。ある $\beta_1 > \beta_0$

と $0 < T_1 \leq T_0$ に対して, (5.10) の解 $w^1 \in K_{a, \beta_1, T_1}^{l-1, p_0, \theta_0} \times K_{a/\varepsilon, \beta_1, T_1}^{l-1, p_0, \theta_0, (\mu)}$

が唯一つ存在する。故に次の定理を得る。

定理 5.1. ある $\beta_1 > \beta_0$ と $0 < T_1 < T_0$ ($T_1 \leq p_0/\beta_1$ かつ $T_1 \leq \theta_0/\beta_1$)

に対して, $(P_D)^1$ あるいは (5.2) の解 $(u^1, \tilde{u}^1) \in K_{a, \beta_1, T_1}^{l-1, p_0, \theta_0} \times K_{a/\varepsilon, \beta_1, T_1}^{l-1, p_0, \theta_0, (\mu)}$

が存在する。このとき $(u^1, \tilde{u}^1) \in \mathcal{K}_{a, \beta_1, T_1}^{l-1, p_0, \theta_0} \times \mathcal{K}_{a/\varepsilon, \beta_1, T_1}^{l-1, p_0, \theta_0, (\mu)}$

$$(i\text{注}1) \quad \tilde{u}_3^1 = -\partial_3^{-1} \nabla' \tilde{u}^1 \equiv \tilde{F}_3^1(\varepsilon, t, \tilde{v}^1(\cdot)) \quad ((5.4) \text{ 参照}) \text{ と書け}$$

て (F.1) - (F.3) を満たすので, $\tilde{u}_3^1 \in \mathcal{K}_{a/\varepsilon, \beta_1, T_1}^{l-1, p_0, \theta_0, (\mu)}$ が導き出される。

(i注2) 方程式 (5.2) から $O(\varepsilon)$ の項を落とすことできる。

$$\bar{u}_3^1(t, x) = u_3^1(t, x', 0) + u_3^1(t, x', \varepsilon x_3) - u_3^1(t, x', 0) = \varepsilon \tilde{u}_3^1 + O(\varepsilon),$$

$$\tilde{u}_3^1(t, x) + \varepsilon \tilde{u}_3^1 = -\partial_3^{-1} \nabla' \tilde{u}^1 - \varepsilon \tilde{u}_3^1 = -\int_0^{\varepsilon x_3} \nabla' \tilde{u}^1(t, x', \eta) d\eta \equiv -\partial_3^{-1} \nabla' \tilde{u}^1$$

に注意して, $\tilde{u}^1$ について用いた方程式を得ることもできる:

$$(5.2)' \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{u}^1 + (\tilde{u}^0 + \tilde{u}^1) \cdot \nabla \tilde{u}^1 + (\tilde{u}_3^0 + \partial_{x_3}^{-1} \nabla \cdot \tilde{u}^1) \partial_3 \tilde{u}^1 - (\nu \Delta' + \partial_3^2) \tilde{u}^1 + \tilde{u}^1 \cdot \nabla \tilde{u}^0 = 0, \\ \tilde{u}^1|_{t=0} = 0 \\ \gamma \tilde{u}^1 = -\gamma u^0. \end{cases}$$

(5.3) で定義された $\tilde{u}^1$ を (5.2)' に代入すれば, $\tilde{v}^1$ に対する用いた方程式が得られ, 定理 ACK を用いて解 $\tilde{v}^1$ の存在, 従って (5.2)' の解 $\tilde{u}^1 \in \mathcal{H}_{\alpha/\varepsilon, \beta_1, T_1}^{l-1, j_0, 0, (u)}$ の存在を示すこともできる. このとき $(P_\nu)^1$ は u^1 に対する線形方程式で, u^0 と同様の手段で存在を示すこともできる. 方程式 (5.2)' は Plamelle の境界層方程式と少し異なる非線形方程式であるが, 厳密解に対応するものであるから, より情報を含んでいるかもしれない.

§ 6. $u^2(\varepsilon, t, x)$ と $\tilde{u}^2(\varepsilon, t, x', x_3/\varepsilon)$ の解法.

まず $u^2 + \tilde{u}^2$ に対する方程式は次のようになる:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \partial_t (u^2 + \tilde{u}^2) + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1 + \varepsilon \tilde{u}^2 + \varepsilon \tilde{u}^2) \cdot \nabla (u^2 + \tilde{u}^2) - \nu \Delta (u^2 + \tilde{u}^2) \\ \quad + (u^2 + \tilde{u}^2) \cdot \nabla (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1) + \nabla p^2 + \varepsilon \nabla \tilde{p}^2 \\ = -\varepsilon u^1 \cdot \nabla u^1 - \tilde{u}^1 \cdot \nabla u^1 + \tilde{h}^1 \equiv f^2 + \tilde{f}^2, \quad (\tilde{h}^1 \text{ は } (P_\varepsilon)^2 \text{ を参照}), \\ \nabla \cdot (u^2 + \tilde{u}^2) = 0, \\ u^2|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}^2|_{t=0} = 0, \\ \gamma(u^2 + \tilde{u}^2) = -\varepsilon(\gamma u^1, 0) \equiv g \in \mathcal{H}_{\beta_1, T_1}'^{s-1, p_0}. \end{cases}$$

Stokes equation に付 3 Poisson operator $P(\nu)$ (§9 (11)) を用いて,

$$(6.2) \quad u^2 + \tilde{u}^2 = r P^\infty U_0(\nu) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) - P(\nu) \overbrace{r P^\infty U_0(\nu) e_0}^{(P^\infty)} (v^2 + \tilde{v}^2) + P(\nu) g$$

とおく。 $P_3(\nu)$ が境界層を作ることは注意する。 (6.2) は

$$(6.2)' \quad \begin{cases} u^2 = r P^\infty U_0(\nu) e_0 v^2 - (P_1(\nu) + P_0(\nu)) r P^\infty U_0(\nu) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) + (P_1(\nu) + P_0(\nu)) g, \\ \tilde{u}^2 = r P^\infty U_0(\nu) e_0 \tilde{v}^2 - P_2(\nu) r P^\infty U_0(\nu) (v^2 + \tilde{v}^2) + P_2(\nu) g \end{cases}$$

と同等である。 (6.1) の中2-中4条件は成り立っているから、(6.2)

を (6.1) に代入して中1式 (方程式) が成り立つように v^2 と $\tilde{v}^2$

を定めればよい。非境界層と境界層を分離すれば、 u^2 と $\tilde{u}^2$ は

それぞれ $(P_\nu)^2$ と $(\tilde{P}_\nu)^2$ を満たすべきである。 $\hat{h}^1$ は $\hat{u}_3^1$ の定め方

から出てくる。

補助定理 3.1 などから次のことがわかる：

$$(6.3) \quad P_1(\nu) = \nabla N \gamma_n + \nabla N R_1(\nu, t) * \varepsilon \Lambda', \quad R_1(\nu, t) = O(t^{-1/2}),$$

$$P_0(\nu) = \varepsilon \nabla R_0(\nu, t) * \varepsilon \Lambda', \quad R_0(\nu, t) = O(1), \quad \varepsilon \nabla R_0(\nu, t) = O(t^{1/2}).$$

(6.2)' の u^2 を $(P_\nu)^2$ に代入し、 $\underbrace{\text{適当}}_{(3)}$ potential part を省くと、

$$(6.4) \quad \begin{aligned} (i) \quad & v^2(t) + u^0 \cdot \nabla r P^\infty U_0(\nu) e_0 v^2 + (u^1 + u^2) \cdot \varepsilon \nabla r P^\infty U_0(\nu) e_0 v^2 + u^2 \cdot \nabla (u^1 + \varepsilon u^1) \\ & - [(u^0 + \varepsilon u^1) \cdot \nabla, \nabla] (N \gamma_n + N R_1(\nu) \varepsilon \Lambda') r P^\infty U_0(\nu) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) \\ & - [(u^0 + \varepsilon u^1) \cdot \nabla, \varepsilon \nabla] R_0(\nu) \varepsilon \Lambda' r P^\infty U_0(\nu) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) \\ & - u^2 \cdot \varepsilon \nabla (\nabla N \gamma_n + \nabla N R_1(\nu) \varepsilon \Lambda' + \varepsilon \nabla R_0(\nu) \varepsilon \Lambda') r P^\infty U_0(\nu) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) \\ & + [(u^1 + \varepsilon u^1) \cdot \nabla, \nabla] (N R_1(\nu) + \varepsilon \nabla R_0(\nu)) \varepsilon \Lambda' g \\ & + u^2 \cdot \varepsilon \nabla (\nabla N R_1(\nu) + \varepsilon \nabla R_0(\nu)) \varepsilon \Lambda' g = f^2 = -\varepsilon u^1 \cdot \nabla u^1 \end{aligned}$$

となる。 $\sim$ 部分が ∇v^2 に対する連続型 $\int$ 1 次写像である。 (5.4)

の式より

$$(6.5) \quad \varepsilon \nabla (\nabla N R_1(v) + \varepsilon \nabla R_2(v)) \wedge g \in K_{\alpha, \beta_1, T_1}^{j-2, j_0, \theta_0}.$$

$\tilde{u}^2$ を計算するため、変数変換 $x_3 \rightarrow \varepsilon x_3$ を行ない、これにともなう次の変換を行なう：

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \partial_3 &\rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \partial_3, \quad \nabla \rightarrow \bar{\nabla} = {}^t(\nabla', \frac{1}{\varepsilon} \partial_3), \\ Q^\infty &\rightarrow \bar{Q}^\infty, \quad P^\infty \rightarrow \bar{P}^\infty = 1 - \bar{Q}^\infty, \quad \partial(\bar{Q}^\infty)(z) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{z}' \bar{z}_3'}{|\bar{z}'|^2 + \bar{z}_3'^2/\varepsilon^2} & \frac{\bar{z}' \bar{z}_j/\varepsilon}{|\bar{z}'|^2 + \bar{z}_j^2/\varepsilon^2} \\ \frac{\bar{z}_2' \bar{z}'/\varepsilon}{|\bar{z}'|^2 + \bar{z}_j^2/\varepsilon^2} & \frac{\bar{z}_j^2/\varepsilon^2}{|\bar{z}'|^2 + \bar{z}_j^2/\varepsilon^2} \end{pmatrix} \\ U_0(v, t) &\rightarrow \bar{U}_0(v, t), \\ P_j(v, t) &\rightarrow \bar{P}_j(v, t), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

従属変数 $\bar{u}^i$, $i = 0, 1, 2$, は前節のとおりであるが、 $\bar{u}^i$ と u^i を次のようにおき直す（混乱は生じないと思う）：

$$u^i(\varepsilon, t, x', x_3) \equiv \begin{pmatrix} u^i(\varepsilon, t, x', \varepsilon x_3) \\ u^i_2(\varepsilon, t, x', \varepsilon x_3) \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2,$$

$$\bar{u}^1(\varepsilon, t, x', x_3) \equiv \begin{pmatrix} \bar{u}^1(\varepsilon, t, x', x_3) \\ \varepsilon \bar{u}^1_2(\varepsilon, t, x', x_3) \end{pmatrix},$$

$$\bar{u}^2(\varepsilon, t, x', x_3) \equiv \begin{pmatrix} \bar{u}^2(\varepsilon, t, x', x_3) \\ \bar{u}^2_2(\varepsilon, t, x', x_3) \end{pmatrix}.$$

(6.2)' に従って $\bar{u}^2$ は次のように表わされる：

$$(6.7) \quad \bar{u}^2 = r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(v) e_0 \tilde{v}^2 - \bar{P}_2(v) r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(v) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) + \bar{P}_3(v) g.$$

$\tilde{v}^2$ と $\bar{u}^2$ を捉える因数空間は、§2 で定義したものとは十分でないので、更に新しい空間を定義する。参照の便のため、§2 からの通し番号を用いる。

$$\textcircled{8} \quad H_{1,a}^{l,p,\theta} \ni f \Leftrightarrow \text{(i)} \quad f(z_1, z_2) \text{ は } \Omega(p, \theta, a) \text{ の内部で解析的,}$$

$$\text{(ii)} \quad \partial^\alpha f(z_1, z_2) \in L^1(L(\theta, a); H'^0), \quad 0 \leq \theta' < \theta, \quad |\alpha| \leq l,$$

7(9/0)

$$\text{(iii)} \quad \|f\|_{l,p,\theta,1} \equiv \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{0 \leq \theta' < \theta} \| |\partial^\alpha f(\cdot, z_2)|_0 \|_{L^1(L(\theta', a))} < \infty,$$

$$\textcircled{9} \quad \tilde{H}_a^{l,p,\theta} = H_a^{l,p,\theta} \cap H_{1,a}^{l,p,\theta}, \quad \|f\|_{l,p,\theta}^{\sim} = \|f\|_{l,p,\theta} + \|f\|_{l,p,\theta,1},$$

$$\textcircled{10} \quad \tilde{K}_{a,p,T}^{l,p,\theta} = \bigcap_{j=0}^{[l/2]} B_p^j([0, T]; \tilde{H}_a^{l-2j,p,\theta}),$$

$$\|f\|_{l,p,\theta,p,T}^{\sim} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial_t^j f(t, \cdot)\|_{l-2j,p-\beta t, \theta-\beta t}^{\sim}.$$

$$\textcircled{11} \quad \tilde{\mathcal{K}}_{a,p,T}^{l,p,\theta} = \bigcap_{k=0}^l B^k([0, 1]; \tilde{K}_{a,p,T}^{l-k,p,\theta}).$$

(6.7) における $\tilde{v}^2$ は, 実際は次の形のものを置きかえる:

$$(6.8) \quad \begin{cases} \tilde{v}^2 \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{v}^{2'} \\ \tilde{v}_3^2 \end{pmatrix} + \varepsilon \Lambda'_1 \tilde{v}^3, & \tilde{v}^{2'} \in K_{a/\varepsilon}^{l-2,p_0,\theta_0}(\mu), \\ & \tilde{v}_3^2 \in \tilde{K}_{a/\varepsilon}^{l-2,p_0,\theta_0}, \\ \Lambda'_1 = \Lambda'_1 + 1, & \tilde{v}^3 \in K_{a/\varepsilon}^{l-2,p_0,\theta_0}. \end{cases}$$

ただし (6.4) において, $\tilde{v}^2$ が $K_{a/\varepsilon}^{l-2,p_0,\theta_0}$ に属するという性質以外には用いない。補助定理 3.1-3.2 の内容は, D と ∇N の性質以外に $H_{1,a}^{l,p,\theta}$ でも成立つ。特に $\bar{P}_1(\nu, t) = O(1)$, $\bar{P}_2(\nu, t) = O(t^{-1/2})$ 。

補助定理 3.3 の内容 ($\chi(z_3)\partial_3$ の評価) は $\tilde{K}_a^{l,p,\theta}$ では成立たない。

$\tilde{v}^2$ の置きかえ (6.8) に対応して, $\tilde{u}^2$ も次のように書く:

$$(6.9) \quad \tilde{u}^2 \rightarrow {}^t(\tilde{u}^{2'}, \tilde{u}_3^2) + \varepsilon \Lambda'_1 \tilde{u}^3 \equiv \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda'_1 \tilde{u}^3,$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda'_1 \tilde{u}^3 &= r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 (\tilde{v}^2 + \varepsilon \Lambda'_1 \tilde{v}^3) \\
 &\quad - \bar{P}_2(\nu) r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 (\nu^2 + \tilde{v}^2 + \varepsilon \Lambda'_1 \tilde{v}^3) + \bar{P}_2(\nu) g, \\
 (6.10) \quad \begin{cases} \tilde{u}^{2'} &= r \bar{U}_0(\nu) e_0 \tilde{v}^{2'} - \bar{P}_2(\nu)' r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 (\nu^2 + \tilde{v}^2) - \bar{P}_2(\nu)' g, \\ \tilde{u}_3^2 &= r \bar{U}_0(\nu) \bar{R}_3^\infty e_0 \tilde{v}^2 - \bar{P}_2(\nu)_3 r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 (\nu^2 + \tilde{v}^2) - \bar{P}_2(\nu)_3 g, \\ \tilde{u}^3 &= r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 \tilde{v}^3 - \bar{P}_2(\nu) r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 \tilde{v}^3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

ここで $\tilde{u}^2, \tilde{u}_3^2, \tilde{u}^3$ に関する方程式は次のようになる:

$$(6.11) \quad \begin{cases} \bar{Q}^\infty = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1^\infty & \bar{Q}_2^\infty \\ {}^t\bar{Q}_2^\infty & \bar{Q}_3^\infty \end{pmatrix}, \quad \bar{P}^\infty = \begin{pmatrix} E' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \bar{R}^\infty, \quad \bar{R}^\infty = \begin{pmatrix} -\bar{Q}_1^\infty & -\bar{Q}_2^\infty \\ -{}^t\bar{Q}_2^\infty & \bar{Q}_3^\infty \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \bar{Q}_1^\infty = \bar{Q}_2^\infty {}^t\nabla', \quad \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \bar{Q}_2^\infty = \bar{Q}_3^\infty \nabla', \quad \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \bar{Q}_3^\infty = \bar{Q}_1^\infty \cdot \nabla', \\ R_3^\infty = (-{}^t\bar{Q}_2^\infty, \bar{Q}_3^\infty), \quad \frac{1}{\varepsilon} \partial_3 \bar{R}_3^\infty = (-\bar{Q}_2^\infty {}^t\nabla', \bar{Q}_1^\infty \cdot \nabla'). \end{cases}$$

(6.11) により $\tilde{v}_3^2$ に対する方程式は $\frac{1}{\varepsilon} \partial_3$ は現れない。

(6.9)-(6.10) を $(\tilde{P}_2)^2$ に代入し、それらの性質を考慮して整理すると、 $\tilde{v}^{2'}, \tilde{v}_3^2, \tilde{v}^3$ に対する (6.4)(i) と似た方程式を得る (一部分が $\bar{\nabla} \tilde{v}^{2'}, \nabla' \tilde{v}_3^2, \bar{\nabla} \tilde{v}^3$ ($\nabla \nu^2$) に因る Volterra 型作用素):

$$\begin{aligned}
 (6.4)(ii) \quad & \tilde{v}^{2'} + \underbrace{(u^0 \cdot \bar{\nabla} + \tilde{u}^1 \cdot \nabla') r \bar{U}_0(\nu) e_0}_{\text{Volterra type}} \tilde{v}^{2'} \\
 & + \{ \tilde{u}_3^1 \partial_3 + \varepsilon (u^1 + u^2 + \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda'_1 \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \} r \bar{U}_0(\nu) e_0 \tilde{v}^{2'} \\
 & - \underbrace{(u^0 \cdot \bar{\nabla} + \tilde{u}^1 \cdot \nabla') \bar{P}_2(\nu)' r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0}_{\text{Volterra type}} (\nu^2 + \tilde{v}^2) \\
 & - \{ \tilde{u}_3^1 \partial_3 + \varepsilon (u^1 + u^2 + \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda'_1 \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \} \bar{P}_2(\nu)' r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 (\nu^2 + \tilde{v}^2) \\
 & + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1 + \varepsilon u^2 + \varepsilon \tilde{u}^2 + \varepsilon^2 \Lambda'_1 \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \bar{P}_2(\nu)' g \\
 & + \tilde{u}^{2'} \cdot \nabla' (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1 + \varepsilon u^2) + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \tilde{u}_3^2 \partial_3 \tilde{u}^1}_{\text{Volterra type}} + \underbrace{(\varepsilon \Lambda'_1 \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \tilde{u}^1}_{\text{Volterra type}} \\
 & = - \tilde{u}^1 \cdot \bar{\nabla} u^1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_3^2 &= \varepsilon r \bar{U}_0(\nu) \{ -\bar{Q}_2^\infty \nabla' \partial_3^{-1} e_0 \tilde{v}^{2'} + \bar{Q}_2^\infty \nabla' \partial_3^{-1} e_0 \tilde{v}_3^2 \} \\
&\quad - \varepsilon \Lambda' \bar{R}_2(\nu)_3 r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) + \varepsilon \Lambda' \bar{R}_2(\nu)_3 g, \\
(6.4) \text{ (iii)} \quad \tilde{v}_3^2 &+ \underbrace{(u^0 \bar{\nabla} + \tilde{u}^1 \nabla') r \bar{U}_0(\nu) \{ -\bar{Q}_2^\infty e_0 \tilde{v}^{2'} + \bar{Q}_2^\infty e_0 \tilde{v}_3^2 \}}_{\substack{+ \{ \tilde{u}_3^1 \partial_3 + \varepsilon (u^1 + u^2 + \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda' \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \} r \bar{U}_0(\nu) \bar{R}_2^\infty e_0 \tilde{v}^2 \\ - (u^0 \bar{\nabla} + \tilde{u}^1 \nabla') \bar{P}_2(\nu)_3 r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) \\ - \{ \tilde{u}_3^1 \partial_3 + \varepsilon (u^1 + u^2 + \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda' \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \} \bar{P}_2(\nu)_3 r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 (v^2 + \tilde{v}^2) \\ + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1 + \varepsilon u^2 + \varepsilon \tilde{u}^2 + \varepsilon^2 \Lambda' \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \bar{P}_2(\nu)_3 \} \\ + \tilde{u}_3^2 \bar{\nabla} (u_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \varepsilon \tilde{u}_3^1 + \varepsilon u_3^2) + \varepsilon^2 \Lambda' \tilde{u}^3 \cdot \bar{\nabla} \tilde{u}_3^1 \\ = -\tilde{u}_3^1 \cdot \bar{\nabla} u_3^1 + \tilde{h}_3^1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad \Lambda'_1 \tilde{v}^3 &+ \underbrace{(u^0 \bar{\nabla} + \tilde{u}^1 \nabla') r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 \Lambda'_1 \tilde{v}^3}_{\substack{+ \{ \tilde{u}_3^1 \partial_3 + \varepsilon (u^1 + u^2 + \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda' \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \} r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 \Lambda'_1 \tilde{v}^3 \\ + r \bar{R}^\infty \partial_3^{-1} e_0 \nabla' \tilde{v}^2 \\ - (u^0 \bar{\nabla} + \tilde{u}^1 \nabla') \bar{P}_2(\nu) r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 \Lambda'_1 \tilde{v}^3 \\ - \{ \tilde{u}_3^1 \partial_3 + \varepsilon (u^1 + u^2 + \varepsilon \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda' \tilde{u}^3) \cdot \bar{\nabla} \} r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu) e_0 \Lambda'_1 \tilde{v}^3 \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{u}_3^2 \partial_3 (u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon u^2) + \Lambda'_1 \tilde{u}^3 \cdot \bar{\nabla} (u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon u^2 + \varepsilon \tilde{u}^2) \\ = 0.
\end{aligned}$$

2.2.2 (6.4) (iv) の 4 項の $\bar{R}^\infty$ は $\bar{R}^2$ の関係から定まる:

$$\begin{aligned}
(6.12) \quad (\partial_t - \nu \Delta' - \partial_3^2) r \bar{U}_0(\nu) \{ -\bar{Q}_2^\infty e_0 \tilde{v}^{2'} + (1 - \bar{Q}_2^\infty) e_0 \tilde{v}_3^2 \} \\
= \tilde{v}_3^2 - r \bar{Q}_2^\infty e_0 \tilde{v}^{2'} - r \bar{Q}_2^\infty e_0 \tilde{v}_3^2 \\
= \tilde{v}_3^2 - \varepsilon r \bar{Q}_2^\infty \partial_3^{-1} e_0 \nabla' \tilde{v}^{2'} - \varepsilon (\bar{\nabla} \bar{\Delta}^{-1} \partial_3 e_0 \tilde{v}_3^2)_3,
\end{aligned}$$

$$\bar{R}^\infty \nabla \tilde{v} = {}^t (-\bar{Q}_3^\infty \nabla' \tilde{v}_3, \bar{Q}_3^\infty \nabla' \tilde{v}') .$$

$w^2(t) = {}^t (v^2(t), \tilde{v}^2(t), \tilde{v}_3^2(t), \tilde{v}^3(t)) \in K_{a, \beta, T}^{l-2, \gamma_0, \theta_0} \times K_{a/\varepsilon, \beta, T}^{j-2, \gamma_0, \theta_0^{(H)}} \times K_{a/\varepsilon, \beta, T}^{l-2, \gamma_0, \theta_0} \\ \times K_{a/\varepsilon, \beta, T}^{l-2, \gamma_0, \theta_0} \quad (\beta \geq \beta_1, 0 < T \leq T_1) \text{ とおき, (6.4) (ii) - (iii) を (iv) の } \gamma \bar{R}^\infty \times \\ \times \partial_3^{-1} e_0' \nabla' \tilde{v}^2 \text{ の所に代入すると, (6.4) は}$

$$(6.13) \quad w^2(t) = F^2(\varepsilon, t, w^2(\cdot))$$

の形となり, 定理 ACK の条件 (F.1) - (F.3) が満たされる。故に
(6.13) の解 $w^2(t)$ が, ある $\beta_2 > \beta$ と $0 < T_2 < T_1$ に対して, 上の関数
空間で唯一存在する。 $\tilde{v}^3 \mapsto \varepsilon \Lambda_1' \tilde{v}^3$ が連続写像であること
($K_{a/\varepsilon, \beta, T}^{l-2, \gamma_0, \theta_0}$ で) などには注意する。

定理 6.1 ある $\beta_2 > \beta_1$ と $0 < T_2 < T_1$ ($T_2 \leq \gamma_0/\beta_2, T_2 \leq \theta_0/\beta_2$)
に対して, $(P_\nu)^2$ および $(\tilde{P}_\nu)^2$ の解 $(u^2, \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda_1' \tilde{u}^3) \in K_{a, \beta_2, T_2}^{l-2, \gamma_0, \theta_0} \times$
 $K_{a/\varepsilon, \beta_2, T_2}^{l-2, \gamma_0, \theta_0}$ が存在する。このとき $(u^2, \tilde{u}^2 + \varepsilon \Lambda_1' \tilde{u}^3) \in K_{a, \beta_2, T_2}^{l-2, \gamma_0, \theta_0} \times$
 $\mathcal{K}_{a/\varepsilon, \beta_2, T_2}^{l-2, \gamma_0, \theta_0}$.

(注3) 解の滑かたの order を落せば, 実は $u^2 = O(\varepsilon)$ である。
従って展開 (1.1) は次の形になる ($u^2 \rightarrow u^2/\varepsilon$ として) :

$$(1.1)' \quad u(v, t, x) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \tilde{u}^1 + \varepsilon \tilde{u}^2 + \varepsilon^2 \Lambda_1' \tilde{u}^3 .$$

$\tilde{u}^3$ の係数を 1 つずらす方が見易いかもしれない。

(注4) 境界層方程式について再論する。 $u^0(v, t, x)$ は ν につ

にて滑らか, $u^0(v, t, x) = u^0(0, t, x) + O(v)$, であるから, $U(t, x) = u^0(0, t, x)$ は Euler 方程式 (P_0) の一意解である. $(\tilde{P}_v)^1$ または (B.2)' において $O(\varepsilon)$ の項をすべて省略し, パラメータ v を含まない方程式系を求めると,

$$(BL) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{u}' + (\bar{U} \cdot \nabla + \tilde{u}' \cdot \nabla' + \tilde{u}_3 \partial_3) \tilde{u}' - \partial_3^2 \tilde{u}' + \tilde{u}' \cdot \nabla' \bar{U}' = 0, \\ \tilde{u}_3(t, x', x_3) = - \int_0^{x_3} \nabla' \cdot \tilde{u}'(t, x', \eta_3) d\eta_3 \equiv -\partial_{3,0}^{-1} \nabla' \cdot \tilde{u}', \\ \tilde{u}'|_{t=0} = 0, \\ \gamma \tilde{u}' = -\gamma U' = U'(t, x', 0). \end{cases}$$

これは $\tilde{u}'$ について用いた方程式であり, §5 と同様にして $\tilde{u}'$ の方程式に書かえ, 定理 ACK を適用すれば, ある区間における解の存在が示される.

(BL) のまた, $(\partial_t - \partial_3^2)$ の Dirichlet 問題の Poisson operator $P_2(t)$ と基本解 $U_2(t, x_3, \eta_3)$ を用いて,

$$(BL)' \quad \begin{aligned} \tilde{u}'(t) = & - \int_0^t U_2(t-\lambda, x_3, \eta_3) \{ (\bar{U} \cdot \nabla + \tilde{u}' \cdot \nabla' - \partial_{3,0}^{-1} \nabla' \cdot \tilde{u}' \partial_3) \tilde{u}'(\lambda, x', \eta_3) \\ & + (\bar{U} \cdot \nabla + \tilde{u}' \cdot \nabla' - \partial_{3,0}^{-1} \nabla' \cdot \tilde{u}' \partial_3) P_2 \gamma U'(\lambda, x', \eta_3) \} d\lambda d\eta_3 \\ & - P_2 \gamma U' \end{aligned}$$

と書かえ, $\tilde{u}'$ の一意的存在を示すこともできる. しかし,

(BL) は通常の L^2 -norm による函数空間では, well-posed でない.

(BL) が Planck 境界層方程式と異なるところを情報を与えていることがあると面白いかもしれない.