

ある種の Differential-Delay Equation の 周期解の存在

早大 教育 伊藤 隆一

Nussbaum [3] によらうて, Differential-Delay Equation の周期解の存在を調べる。[3] では

$$y'(t) = af(y(t-1)) \quad (*)$$

の形の方程式は, 仮定 $yf(y) < 0$ for $\forall y \neq 0, f'(0) < 0$, $\sup_{y \in \mathbb{R}} f(y) < \infty$ のもとで, $a > \frac{\pi}{2} |f'(0)|^{-1}$ ならば, 非自

明な周期解をもつことを示してゐる。証明は, 一種の Bifurcation Theorem を用ゐる。ここでは, (*) をより一般化して,

$$y'(t) = af(y(t), y(t-1)) \quad (**)$$

の形の方程式の非自明な周期解の存在を次のような仮定 (H) のもとで調べる。

(H) (1) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続的偏微分可能

$$(2) \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} > 0, \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} < 0$$

$$(3) f(0, 0) = 0$$

$$(4) \sup f(u, v) < \infty$$

$$(5) a > 0$$

(6) $f(u, v) = 0$ は (2), (3) より $v = g(u)$, $g(0) = 0$
 (と一意に解けるが, この $g(u)$ は連続で単調増大である.)

$g'(0) = m$ とおき, ある $p \geq 2$ に対して, $0 < m \leq e^{-p}$ とする。

(7) $u \neq 0$ のとき, $\frac{g(u)}{u} < m$

(8) $\frac{\partial f(0,0)}{\partial v} = -b$ とおくと, $uv > 0$ のとき,

$$\left| \frac{f(u, v)}{u} \right| < bmp$$

~~定理~~. $f, a, m, m(H)$ をおいたとする。

$$\frac{\cos^{-1} m}{b\sqrt{1-m^2}} < a \leq -\frac{1}{bmp} \log m$$

ならば, (**) は非自明な周期解をもつ。

Kaplan-Yorke [2] は (H) の (2) の式の代りに, $\frac{\partial f}{\partial u} < 0$, $\frac{\partial f}{\partial v} < 0$ を仮定し, (6), (7), (8) とし位の条件のもとで (**) の周期解の存在と安定性を調べている。

(H) の (1), (2) をおいた方程式 (**) は 数理経済学の Kalecki モデル [1] の方程式を非線型にしたものである。その他のモデルでも, (**) の形の方程式が出てくると考えられる。

- [1] Kalecki, M: A Macrodynamie Theory of Business cycles, *Econometrica* Vol 3. (1935) July No.3
- [2] Kaplan L & Yorke, J: On the Nonlinear Diff Delay Equation $x'(t) = -f(x(t), x(t-1))$
J. Diff Eq. 23, 293-314 (1977)
- [3] Nussbaum, R.D. : A Global Bifurcation Theorem with Application to Functional Diff. equ.
J. Functional Analysis 19, 319-338 (1975)