

拡散過程の細位相に関する比較定理

名大 教養 神田 護

[1] 細位相と正則性

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内の領域, $X = (x_t, \beta, M_t, P_x) \in \Omega$ 上の Hunt process とする。

定義 1. $B \subset \Omega$ を *nearly Borel set*, $x \in B$ の (X に関する) 正則性 $\Leftrightarrow x \in B_X^{\text{reg}} \Leftrightarrow P_x(\sigma_B = 0) = 1$ 但し $\sigma_B = \inf(t > 0, x_t \in B)$.

定義 2 $A \subset \Omega$ が *finely open* $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists D$ *nearly Borel set* $\rightarrow A^c (= \Omega - A) \subset D$ かつ $x \in D_X^{\text{irreg}}$.

Ω 上の *finely open set* 全体を $\mathcal{O}$ とすれば Ω 上の *topology* を定義される. これを X による Ω 上の *fine topology* とする.

次の Prop. は Blumenthal-Gettoer の本 [1] の PS4 II 4. のいくつかの Prop. を用いることによって示せる。

PROPOSITION 1 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ をそれぞれ Ω 上の Hunt process X_1 及び X_2 による *fine topology* とする。次の 2 つは同値である。

i) $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より強い.

ii) $\forall \text{ open } B, B_{X_1}^{\text{reg}} \subset B_{X_2}^{\text{reg}}$

[2] 2 階の強楕円型微分作用素に関する正則変

R^n ($n \geq 2$) 上の微分作用素 $\mathcal{L}$

$$i) \sum_{j=1}^n a_{jj} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$ii) \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{jj} \frac{\partial}{\partial x_j})$$

共に強楕円型, 係数有界可測, と考える. 上の $\mathcal{L}$ で generated となるマルコフ過程が構成できた時, [1] で述べた意味での正則変と Dirichlet 問題 (上の $\mathcal{L}$ に関する) にあける正則変と一致する事を示すのは trivial な事ではない. (係数不連続の時, Dirichlet 問題の定式化自体にも問題がある) しかし, ここでは 2 つの概念を混同して用いる. 次の結果を紹介している.

i) ii) に関する正則変とラプラシアンに関するそれとは一致する.

ii) 係数が Dim' 連続かつ i) に関しても i) の結論は正しい. N.V. Krylov [2]

iii) 係数が連続性だけをもつなら $\underbrace{\text{(i) の場合}}_{n=2 \text{ の時 1 次元}}$ と小自身の $\mathcal{L}$ 正則変となり別がある. (ラプラシアンに関してそのような事は無い). 3次元以上の時は不明である.

iv) i) の場合 係数不連続とすると種々の奇妙な例があらわれる。 E. M. Lancki [3] H. Millar [4]

iv) の例をみると i) の場合 係数不連続の時、一般論的な取扱いは見込みが広いように思われる。問題は連続係数の場合である。一般論的な取りまうとどれくらいの結果が得られるか？ このノートでは一つの解答を与える。

[3] 一様連続係数の拡散過程の細位相に関する比較定理

i) の形の $\mathcal{D}$ に対する R^n 上の拡散過程を $X = (x_t, y_t, M_t, P_t)$ とする 但し 係数は R^n で一様連続とする。その時

定理 1. $n \geq 3$ ならば X による R^n 上の fine topology は R^n 上の symmetric stable process of order α , $0 < \alpha < 2$ による fine topology より弱い。

このノートでは上の定理の証明の概略を 係数が一様 Lipschitz 連続の時、Brown 運動と細位相が一致するという事をも含めた形で示す。この方法によると具体的に係数の滑らかさが与えられた時、この結果よりくわしい結果が得られる。

[4] 一般論への準備

[3] で述べた定理を示すために 多少一般的な場合に細位相の比較定理を示す。

$X_i = (x_t^i, j^i, M_t^i, P_x^i)$ $i=1,2$ 上の条件をみたす

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の Hunt process とする。

i) $\exists \alpha > 0$ $G_\alpha^i : C_c(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$, 但し G_α^i $i=1,2$ は α 次の resolvent operator , $C_c(\Omega)$ は Ω 上 compact support を持つ連続関数の空間

ii) $\forall x, x' \in \Omega$ $P_x^i(\sigma_{x'}^i < +\infty) = 0$, $i=1,2$.

iii) $\int_0^{+\infty} T_t^i f < +\infty$, $\forall f \in C_c(\Omega)$

更に X_1 は次の性質をもち Green 函数 $G^1(x, y)$ をもち

1) $G^1(x, y) \geq 0$ $\Omega \times \Omega$ 上可測 かつ $x \neq y$ ならば $G^1(x, y) > 0$

X_1 -excessive , $\int_\Omega G^1(x, y) f(y) dy = \int_0^{+\infty} T_t^1 f(x) dt$ $\forall f \in C_c(\Omega)$

2) $\forall B$ compact $\subset \Omega$ $\int_B G(x, y) dy$ 有界

3) $G^1(x, y)$ は任意の対角線の上を除外して有界

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{(x, y) \in Q_n \times Q_n} G^1(x, y) = +\infty$, $Q_n \downarrow \emptyset$ とき $n \uparrow \infty$

5) $\forall B$ compact or open with compact closure $\subset \Omega$

$$P_x^1(\sigma_B < +\infty) = \int_\Omega G^1(x, y) \mu_B(dy)$$

$\mu_B(dy)$ の support は $\bar{B}$ 内にある。

定義 3 $X: \Omega$ 上の Hunt process, Q open $\subset \Omega$, $x_0 \in Q$, f は Ω 上の可測函数; f は C -subharmonic (C -superharmonic) at (x_0, Q) w.r.t X (for $C > 0$) $\iff$

$$E_{x_0} f(x_{\tau_S}) \geq C f(x_0) \quad (" \leq ")$$

for $\forall S$ open $\rightarrow Q \supset \bar{S} \supset S \ni x_0$, $\tau_S = \inf\{t \geq 0, x_t \in \Omega \setminus S\}$

定理 2 $\forall x_0 \in \Omega$, $\exists$ neighborhood V , $\exists C > 0$

$G_y^2(\cdot) (\equiv G^2(\cdot, y))$ は C -subharmonic (C -superharmonic) at $(x_0, V \setminus \{y\})$ w.r.t X_2 for each $y \in V$, $y \neq x_0$

$\Downarrow$

X_1 に対する fine topology は X_2 に対するそれより強い (ref. 3.5.11).

証明はどこかに発表する予定なので省略する。

[5] 定理 1 の証明のアウトライン

記号 $n \geq 2$.

$$\mathcal{Q} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \longrightarrow X: \text{Degenerate to } \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\lambda_2 |z|^2 \geq \sum a_{ij} z_i \bar{z}_j \geq \lambda_1 |z|^2, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$a(r)$: conti', nonnegative, monotone increasing on $[0, \infty)$

$$\rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} a(r) = 0, \quad \max_{i,j} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq a(\sqrt{\lambda_1} |x - y|).$$

$(A_{ij}(y))$ は $(a_{ij}(y))$ の cofactor matrix

$$\rho_y(x) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}$$

$$B_{ij}^y(x) = \sum_{\ell=1}^n A_{i\ell}(x_\ell - y_\ell) \sum_{k=1}^n A_{jk}(x_k - y_k)$$

注意 $\sqrt{\lambda_1} |y - x| \leq \rho_y(x) \leq \sqrt{\lambda_2} |y - x|$

$$\sum_{i,j=1}^n |B_{ij}^y(x)| \leq M \rho_y(x)^2$$

LEMMA 1 $n \geq 3$ あるいは $n \geq 2$ かつ 一様 $C^{1,\alpha}$ 連続
(即ち $\int_0^1 \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho < +\infty$) なる X は 性質 ii) を持つ.

証明略

LEMMA 2 $k_i, i=1, 2$ は ある区間 $(0, \rho_0]$ 上の 正の
可測函数で

$$k_1(\rho) \geq \frac{(n-1) + M a(\rho)}{\rho(1 - M a(\rho))}$$

$$k_2(\rho) \leq \frac{(n-1) - M a(\rho)}{\rho(1 + M a(\rho))} \quad \rho \in (0, \rho_0]$$

をみたすものとする。

$$g_i(t) = \int_t^{\rho_0} \exp\left(-\int_{\rho_0}^t k_i(\rho) d\rho\right) d\rho \quad i=1, 2$$

とあく. $\forall t < \rho_0, \forall c < 1, \exists K_c^i > 0$

$$\frac{\varphi_i(c_r)}{\varphi_i(r)} \leq K_c^i < +\infty \quad i=1,2$$

が成り立つならば Ω 内の任意の点に対して近傍 ∇ と
正定係 $C_i, i=1,2$ で適当に与えられる $\varphi_i(1-|y|)$ は C_i -sub-
harmonic at $(x, Q-|y|)$ w.r.t X for each $x, y \in Q$
 $x \neq y$ ($\varphi_2(1-|y|)$ は C_2 -superharmonic ")

証明略

定理2 と Lemma 2^(or Lemma 1) より.

定理 1' もし Ω 上に与えられた $\varphi_i, i=1,2$ は
singularity とする Green 函数 $G^i(x, y), i=1,2$ (即ち $G^i(x, y)$
 $\sim \varphi_i(|x-y|), |x-y| \rightarrow 0$) で性質 i) ~ v) を満たすものとして $\rightarrow$
Hunt process $X_i, i=1,2$ が存在し、それらが性質 i) ~ iii)
を満足するならば、 X による fine topology は X_1 による
fine topology より細かい (X_2 による fine topology より細かい)
(但し $n \geq 3$ あるいは $n \geq 2$ で係数一致 $\Delta u = 0$ となる)。

定理 1' $\Rightarrow$ 定理 1 の証明 $0 < \alpha < 2, \beta = \alpha - 1, \Delta u \neq 0$

$$\text{ii), } (n \geq 3) \quad \frac{(n-1) + M\alpha(\rho)}{\rho(1 - M\alpha(\rho))} \leq \frac{(n-1) + M\alpha(\rho)}{\rho} (1 + 2M\alpha(\rho)) \leq \frac{n-\beta}{\rho}$$

そこで

$$k_1(\rho) = \frac{n-\beta}{\rho}$$

とあけは

$$g_1(r) \sim r^{\alpha-n}$$

文献

[1] R.M. Blumenthal - R.H. Gettoor, Markov processes and potential theory, Academic Press, 1968.

[2] N.V. Krylov, The first boundary value problem for elliptic equations of second order, Differential'nye Uravnenija 3 (1967), 315-325

[3] E.M. Lanolis, S-capacity and its application to the study of solutions of second order elliptic differential equations with discontinuous coefficients, Math. USSR Sbornik, Vol. 5 (1968), No. 2, 197-214.

[4] H. Miller, Exceptional boundary points for the nondivergence equation which are regular for the Laplace equation - and vice-versa. Ann. Mat. Pura Appl.,