

柱状物体を過ぎる流れ場中の波動の伝播と振動の発生源

SIMULIA Corp. 武本 幸生 (Yukio Takemoto)
同志社大学理工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

1. はじめに

角柱や円柱などの柱状物体後方に美しい渦列が生じることは太古の昔から知られていたと想像され、16 世紀初頭にはレオナルド・ダ・ビンチによって観察された記録がある。渦列の本格的な研究はおおよそ 100 年前に Bénard[1] の実験により始まり、Kármán[2] の明快な理論的研究に触発されて、この 100 年間に多くの研究が行われてきた。現在では、この渦列はカルマン (ベナール・カルマン) 渦列と呼ばれ、物体後流の流体力学的な不安定性によって誘起された波動が下流へと伝播することによって形成されると考えられている。しかし、この一見単純に見える流れについては、まだまだ未解明の点が多く、流れの安定性理論の基盤に関わる疑問を投げかけている。これまでのカルマン渦列の研究で議論されてきた主な点は、渦の安定な配置、渦が放出されるきっかけとなる振動の発生の機構、臨界レイノルズ数、渦放出振動数の決定機構の 4 点である。これらについて、これまでの研究で明らかにされた点と未解決の問題について整理をし、その後この報告の目的と目標について説明を行う。

物体後流に生じる渦列についての実験結果を最初に報告したのは Bénard[1] であるとされている。Bénard は渦ができたときの流体表面のくぼみをスケッチすることにより、渦が 2 列の互い違いの配置をすることを明らかにした。Kármán [2] は、非粘性の流体中ではこのような 2 列の互い違いの渦の配置はある条件の下で (中立) 安定になることを示し、その条件を求めた。

物体後部から交互に渦が剥がれ出るのはおそらく流れの不安定性によるものだろうということは多くの研究者によって予想されていたが (Kovasznyay(1949)[3])、後流を 2 次元平行流近似して、オア・ゾンマーフェルト方程式を解くことにより後流が不安定となることを示したのは McKoen(1956)[4] である。McKoen はウェイク (物体後流を平行流近似したときはウェイクと呼ぶことにする) の速度分布として、Goldstein(1933)[5] が平板を用いた実験から求めた指数関数型の速度分布を近似として用いたが、臨界レイノルズ数を決めるには至らなかった。Sato and Kuriki[6] は平板後流にスピーカーを用いて攪乱を与えてその成長を調べ、平行流近似したウェイクの非粘性線形増幅率 (レイリー方程式の解) との比較を行った。その結果、実験結果は計算による線形増幅率最大モードの攪乱で説明できることが示された。実際に、2 次元後流の臨界レイノルズ数をオア・ゾンマーフェルト方程式から求めたのは Taneda(1963)[7] である。Taneda も指数関数型のウェイクを近似として用い、臨界レイノルズ数 $Re_b = 4.51$ を求めた。ここで、 Re_b は物体後流の速度欠損が $1/e$ になるときのウェイクの半値幅を代表長さとするレイノルズ数であり、

Taneda の評価によれば、円柱直径を代表長さとするレイノルズ数 Re_d に換算すれば臨界レイノルズ数は $Re_d = 3.2$ となる。ただし、実験で円柱を加振し続けたときに攪乱が成長するときの臨界レイノルズ数は $Re_d = 1.0$ となった。現在では円柱を過ぎる流れが振動流へ(非加振)自然遷移する臨界レイノルズ数は $Re_d \sim 47$ とされているが、当時の実験結果でも臨界レイノルズ数は $Re_d = 30$ 程度と考えられていたので、オア・ゾンマーフェルト方程式による線形安定性理論はずいぶん低いレイノルズ数を与えることになり、理論と実験との大きな相違はこの時点で明らかになったことになる。

理論と実験結果との違いを説明するために、いろいろな仮説や新しい理論が提案されてきた。その中でも大切なのは流れの非平行性である。角柱や円柱などの後流は比較的低いレイノルズ数において物体近傍流れにおいて不安定性が発生するので、流れ場は非平行流である。しかし、非平行流を解析的に直接に扱うのは困難なので、これまでの物体後流の安定性に関する多くの研究では、流れ方向の各位置における垂直方向の速度分布を平行流近似した系の安定性(局所安定性)を調べ、流れ場全体の安定性(全体安定性)を推定するという研究方法が採用されてきた。局所安定性では速度分布は流れ方向に変化せず一様であると仮定しており、このような局所安定性は絶対不安定性と対流不安定性に分類できることがプラズマ物理学における研究から明らかになった(Briggs(1964)[8], 山田(1991)[9] 参照)。外部から局所的に加えられたパルス状攪乱が、流れ場中のある静止した一点で観測しているときに成長する場合、流れは(局所)絶対不安定であり、攪乱とともに動く座標系で観測すると攪乱は成長するが、流れ場中のある固定した一点で観測すれば攪乱が減衰する場合、流れは(局所)対流不安定である。1本の円柱を過ぎる流れの場合には円柱より上流においては流れは安定であると考えられる。したがって、円柱後方のごく近傍に振動源がない限り、カルマン渦列は発生しないことになり、持続して円柱近傍から渦放出が行われるためには、円柱近傍に振動源が必要である。このとき、流れのある領域が絶対不安定であれば、一度この領域に攪乱が加えられると持続的に振動が生じ、渦放出が行われることとなる。

流れが対流不安定から絶対不安定へ遷移するときには、不安定波の分散関係に特異性が現れる。この特異性に初めて気づいたのは、Betchov and Criminale(1966)[10]であり、彼らはウェイクとジェットの線形安定性における時間発展モードと空間発展モードの関係を調べるため、簡単な速度分布を仮定して、レイリー方程式の固有値問題を解いた。その結果、彼らは偶然にも複素波数と複素位相速度の分散関係に特異性があることを発見した。彼らはその特異性がもつ意味を明らかにしなかったが、Gaster(1968)[11]はこの特異性が群速度が0のモードに相当することを明らかにし、すべての波数を含んだ攪乱を与えると群速度が0のモードは減衰し、波束が下流へと移流する例を示した。このことはプラズマ物理では周知の事実であったが流体力学者にはあまり知られていなかったと思われる。現在では、絶対不安定性の発生は複素波数と複素位相速度の分散関係の特異性により判断できることがわかっている。流体物理の分野ではその後、Nakaya(1976)[12]が線形

安定性解析を行い、 $30 < R_d < 40$ の間で分散関係に特異性が現れ、不安定攪乱の群速度が ∞ (0 ではなく無限大) となることを示した。

流れの安定性解析の分野にプラズマ物理の成果を積極的に取り入れて、ウェイクの対流不安定性から絶対不安定性への遷移を調べたのは、Triantafyllou *et al.*(1986)[13], Kupfer *et al.*(1987)[14] や Huerre and Monkewitz(1985)[15] である。彼らによって、ウェイクが対流不安定性から絶対不安定に遷移する臨界レイノルズ数が求められた。Triantafyllou *et al.* は、レイリー方程式を用いて、円柱後流のいくつかの位置における流速分布を平行流近似してその局所安定性の解析を行ない、対流不安定となる臨界レイノルズ数 R_{dc} と絶対不安定となる臨界レイノルズ数 R_{da} の間には $R_{dc} < 34 < R_{da} < 56$ の関係があることを示した。

物体後流中において絶対不安定となる領域の位置と大きさは、振動源がどの領域にあるのか推定するための指標となる。Betchov and Criminale[10] によれば、後流速度分布の速度欠損が 95% 程度の箇所が (局所) 絶対不安定であるとし、Koch(1985)[16] は双子渦後方において、局所不安定性が絶対不安定から対流不安定に交替することを示した。このことをより具体的に示したのは Triantafyllou *et al.* [13] である。彼らは、全体不安定性に対する臨界レイノルズ数より高いレイノルズ数では円柱に近い領域は (局所) 絶対不安定、下流側では (局所) 対流不安定となることを明らかにした。たとえば、レイノルズ数 $R_d = 56$ のときは、円柱から $3.5d$ の範囲は (局所) 絶対不安定であり、それよりも下流では (局所) 対流不安定である。流れの弱非平行性を考慮した研究も行われ、レイノルズ数 $R_d = 50$ では円柱から $5d \sim 9d$ の範囲が (局所) 絶対不安定であることが Belan and Tordella(2006)[17] によって示された。(局所) 絶対不安定領域の大きさについて研究者により多少の違いがあるが、全体不安定性となる臨界レイノルズ数において円柱の後端から $3.5d$ 下流までの範囲がほぼ (局所) 絶対不安定領域であるというのが現在の研究者の認識である。

(局所) 絶対不安定領域の大きさについてこれとほぼ同等の結果は Chomaz *et al.*[18] によっても得られている。Chomaz *et al.* は 1 次元のモデル方程式 (ギンツブルグ・ランダウ方程式) を用いて、(局所) 絶対不安定領域の存在は全体不安定の十分条件ではないこと、すなわち $R_{dc} < R_{da} < R_{dg}$ であることを示した。ただし、ここで R_{dg} は全体不安定性の臨界レイノルズ数である。Chomaz *et al.* の結果は、Monkewitz[19] によって、さまざまな関数形を仮定してウェイクの線形安定性を調べることによって確かめられた。彼は $R_{dc} = 5$, $R_{da} = 25$ を求め、これらの値は実験的にカルマン渦列が発生するレイノルズ数 $R_{dg} = 47$ よりも小さくなることを示した。

平行流近似を用いることなく全体安定性を直接調べることもできる。Jackson[20] は円柱を過ぎる 2 次元非平行流の全体安定性を数値的に調べ、 $R_{dg} = 46$ を得た。また、Noack and Eckelmann[21] は 3 次元非平行流の全体安定性を数値的に調べ、 $R_{dg} = 54$ を得た。これら研究で使われている手法は有限要素法を用いた固有値解析である。また、差分法やスペクトル法による数値シミュレーションの結果を用

いて固有値解析を行い、全体安定性の判別をすることも可能である [22, 23]

カルマン渦列が生じる際の振動数を調べることも物体後流研究の重要な課題であり、後流が振動流となったときの振動数は、線形増幅率が最大となる振動数になるという予想が、Nishioka and Sato[24]によってなされていた。一方、Koch[16]は全体不安定の振動数は、絶対不安定領域の下流端の振動数であるとし、Monkewitz and Nguyen[25]は絶対不安定領域の上流端の振動数であるとした。これらに対し、Chomaz *et al.*[26]は複素波数平面において複素振動数が鞍点となる場所の振動数によって全体不安定の振動数が決まるとした。Chomaz *et al.*の結論は、弱非平行性を考慮しても変わらないことがPier[27]によって示された。もちろん、現在では実験で観測される振動数は全体不安定性解析による結果と一致するが、平行流近似による振動数の決定方法を考えることは後流の遷移のメカニズムや振動源の特定にもつながる重要な課題でもある。

2. 問題の設定と基礎方程式

ここでは、カルマン渦列が発生するシナリオとして、物体後流においては物体直後に存在する絶対不安定領域において自己維持的な振動が生じ、その振動が対流不安定領域へ波となって伝わり、カルマン渦列が形成されると考えることにする。角柱を過ぎる流れを例にとり、定常流が振動流へ遷移するときの条件を調べ、振動源の位置と大きさを推定することを試みる。そのために、これまでの平行流近似における対流不安定性と絶対不安定性の概念を非平行な流れの安定性に拡張する。

Oertel[28]が行ったように、ナビエ・ストークス方程式を直接に数値的に解く数値シミュレーションを用いれば、攪乱の成長の様子を評価できるが、単に数値解を求めるだけでは平行流近似との関係や後流の振動源を特定することは不可能である。ここでは、いくつかの仮定と工夫をすることにより角柱を過ぎる流れの安定性を調べる。最初に、角柱を過ぎる定常対称流を数値的に求める。角柱後方の各位置における速度分布を用いて平行流の局所安定性を調べる。これはオア・ゾンマーフェルト方程式を解くのことと同じことである。次に非線形方程式であるナビエ・ストークス方程式を数値シミュレーションで解き、角柱後流の全体不安定性を調べる。また、流れ場を定常流と攪乱との和で表し、ナビエ・ストークス方程式を攪乱について線形化して得られる線形攪乱方程式を発展方程式として数値的に解く。すなわち、2次元対称流の角柱後流においてパルス型の攪乱を加えたときの微小攪乱の伝播と成長を調べ、非平行流の対流不安定性と絶対不安定性を調べる。最後に、後流の一部を対流不安定である平行な速度分布で置き換えて数値シミュレーションを行うことにより、カルマン渦形成の振動源の位置と大きさを推定する。

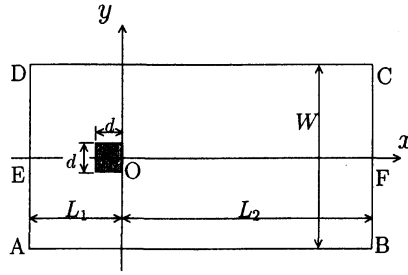


図 1: 計算領域と座標系

2.1 基礎方程式と境界条件

図1のように、流速 U の一様流中におかれた1辺の長さが d の正方形断面をもつ角柱を過ぎる流れを考える。角柱の後端辺の中点を原点 O として、流れ方向に x 軸をとり、 x 軸と垂直に y 軸をとる。流れは非圧縮2次元流であると仮定し、流れ関数 $\psi(x, y, t)$ と渦度 $\omega(x, y, t)$ を導入する。 x 軸方向と y 軸方向の流速は、それぞれ $u = \partial\psi/\partial y$ と $v = -\partial\psi/\partial x$ となる。流れを支配する基礎方程式は、 ω と ψ に関する渦度輸送方程式とポアソン方程式であり、

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = J(\psi, \omega) + \frac{1}{Re}\Delta\omega, \quad (1)$$

$$\Delta\psi = -\omega, \quad (2)$$

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

と表すことができる。ここで、代表速度に一様流速 U を用い、代表長さに角柱の1辺の長さ d を用いて、全ての変数を無次元化した。また、流体の動粘性係数を ν として、レイノルズ数を $Re \equiv Ud/\nu$ と定義した。

数値計算においては、無限に広い流れ場を図1の有限領域 ABCD で近似する。角柱表面における境界条件はすべりなし条件

$$\psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2} \quad (3)$$

を用いる。ここで n は角柱表面の法線方向である。上流境界 (AD) では一様流速 U (無次元流速で $u = 1$) であるとし、

$$\psi = y, \quad \omega = 0 \quad (4)$$

を境界条件とする。両端の境界 (AB, DC) は角柱から十分に遠く、そこでは一様流であるとして、

$$\psi = \psi_1 \quad (AB), \quad \psi = \psi_2, \quad \omega = 0 \quad (AB, DC) \quad (5)$$

を課す。下流境界 (BC) には速度勾配一定の流出条件あるいは必要に応じてゾンマーフェルト放射条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + c \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

を用いる。このとき、位相速度 c には下流境界における時間平均流速 $\langle u \rangle$ を採る。

非定常な流れ場 (ψ, ω) を求めるときは、渦度輸送方程式 (1) とポアソン方程式 (2) を境界条件 (3)–(6) のもとで適当な初期条件を与えることにより数値シミュレーションにより解く。

角柱を過ぎる流れは小さなレイノルズ数においては対称定常流になる。対称定常流はある臨界レイノルズ数で不安定となり、振動流へと遷移するが、臨界レイノルズ数より大きなレイノルズ数においても対称定常流は定常渦度方程式 (式 (1) において $\partial \omega / \partial t = 0$ とおいた式) および (2) と境界条件 (3)–(6) を満たす解である。定常対称流を主流と呼び、その安定性と攪乱の振る舞いを調べるために、主流を $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ 、攪乱を $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ と表わし、流れ関数と渦度をそれぞれ $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}$ 、 $\omega = \bar{\omega} + \hat{\omega}$ と表す。定常対称流を求めるときは下流境界 (BC) で流出条件

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

を用いる。

攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ に関する方程式を求めるため、 $\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}$ と $\omega = \bar{\omega} + \hat{\omega}$ を渦度輸送方程式 (1) に代入し、定常渦度方程式を引き去ると、 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ についての非線形攪乱方程式

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} = J(\bar{\psi}, \hat{\omega}) + J(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + J(\hat{\psi}, \hat{\omega}) + \frac{1}{Re} \Delta \hat{\omega} \quad (8)$$

を得る。ここで、攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ に関する非線形項を無視すると、次の線形攪乱方程式

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} = J(\bar{\psi}, \hat{\omega}) + J(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{Re} \Delta \hat{\omega} \quad (9)$$

が求められる。微小な攪乱の振る舞いは、この線形攪乱方程式とポアソン方程式 (2) を解くことで得られる。角柱表面の境界条件は、すべりなし条件 (3) において ψ と ω をそれぞれ $\hat{\psi}$ と $\hat{\omega}$ に置き換えた式である。計算流域の両端境界 (AB, DC) と上流境界 (AD) では攪乱の大きさは 0 であるとし、境界条件を

$$\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\omega} = 0 \quad (10)$$

とする。下流境界 (BC) の流出条件にはゾンマーフェルト放射条件、

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} + c \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + c \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

を用いる。ここで、位相速度 c には下流境界における主流速度 $\bar{u} = \partial \bar{\psi} / \partial y$ を採る。

2.3 数値計算法

角柱を過ぎる流れの全体不安定性・対称定常流の波束型攪乱に対する対流不安定性および絶対不安定性を調べるため、ここでは非定常流 (ψ, ω) の数値シミュレーション・対称定常流 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ の数値計算・波束型攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ の数値シミュレーションを行う。全ての数値計算において、計算領域は図1の計算領域ABCDのようにとり、その大きさは $d = 1, L_1 = 10, L_2 = 40, W = 19$ と採る。この計算領域を有限間隔 $\Delta x = 0.1$ と $\Delta y = 0.1$ で x 方向および y 方向にそれぞれ離散化し、空間微分を2次精度の中心差分で近似する。また、数値シミュレーションにおいては、時間 t を有限間隔 Δt で離散化し、流れ場の時間発展を求める。

非定常解 (ψ, ω) の数値シミュレーションでは、渦度輸送方程式(1)とポアソン方程式(2)を初期値・境界値問題として数値的に解く。渦度輸送方程式の時間微分項は2次精度のアダムス・バッシュフォース法で近似する。時間間隔 Δt は $\Delta t = 10^{-3}$ とする。ポアソン方程式の解法には加速緩和法(SOR法)を用いる。ポアソン方程式の解は、連続する2回の反復計算において各格子点での $\psi_{i,j}$ の相対誤差が計算領域の全ての領域で 10^{-6} 以下になったときに収束したと判定する。

安定性解析の主流である定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ は、定常渦度方程式とポアソン方程式をSOR法を用いて数値的に解いて求める。定常渦度方程式の解は、連続する2回の反復計算において各格子点での $\bar{\omega}_{i,j}$ の相対誤差が計算領域の全ての領域で 10^{-8} 以下になったときに収束したと判定する。また、ポアソン方程式の解は、連続する2回の反復計算の $\bar{\psi}_{i,j}$ の相対誤差が計算領域の全ての領域で 10^{-7} 以下になったときに収束したと判定する。

攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ の時間的・空間的变化を調べるために、線形攪乱方程式(9)とポアソン方程式を数値的に解く。線形攪乱方程式の時間微分項は2次精度のアダムス・バッシュフォース法で近似する。時間増分 Δt は $\Delta t = 10^{-3}$ とする。ポアソン方程式の解は、連続する2回の反復計算において $\hat{\psi}_{i,j}$ の相対誤差が計算領域の全ての領域で 10^{-14} 以下になったときに収束したと判定する。

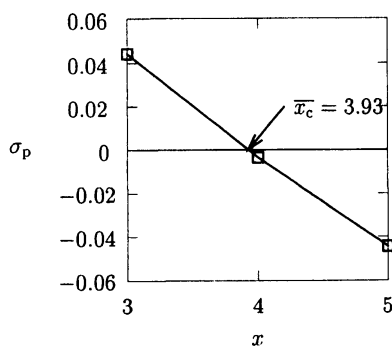
3. 計算結果

3.1 局所安定性

物体後流の安定性に関するこれまでの多くの研究では、実験や数値計算で求めた円柱または角柱後流 $3d \lesssim x \lesssim 5d$ の範囲の速度分布を用いて、平行流近似した流れをオア・ゾンマーフェルト方程式に代入してその安定性が調べられてきた。このとき、通常は実数の波数 k を与え、複素角振動数 ω を求める。複素角振動数 ω と複素線形増幅率 σ との間には $\sigma = -i\omega$ の関係がある。流れが絶対不安定となるのは、 $\text{Im}[\omega] > 0$ で、 $d\text{Re}[\omega]/dk = 0$ (群速度が0)となるときである。ここでも、後で述べる全体安定性やインパルス応答との比較のため、数値的に求め

た定常解 $(\bar{\psi}, \bar{w})$ の角柱後方の各位置 x_1 における流れ $\bar{u}(x_1, y)$ の y 方向速度分布 $U(y) \equiv \bar{u}(x_1, y)$ を主流としてその線形安定性を調べる. ただし, 解くのはオア・ゾンマーフェルト方程式ではなく, 線形攪乱方程式 (9) であり, 初期攪乱 (初期条件) としては, ある 1 点 $P_0 = (30, 0)$ において $t = [0, 0.001]$ の間だけパルス的な外乱 $\hat{\psi} = 0.01$ (この点では対称流は $\bar{\psi} = 0$ である) を与え, 観測点 $P_1 = (10, 0)$ において攪乱の時間発展を調べる. このように, 観測点よりも下流側に攪乱を与えるのは流れの対流不安定性ではなく絶対不安定性を調べるためである. 攪乱は波束を形成し, 増幅または減衰しながら下流だけでなく, 上流へも伝播する. その波束の振幅の変化より攪乱の絶対不安定増幅率 σ_p を評価し, ウェイクの局所安定性を判定する.

(a)



(b)

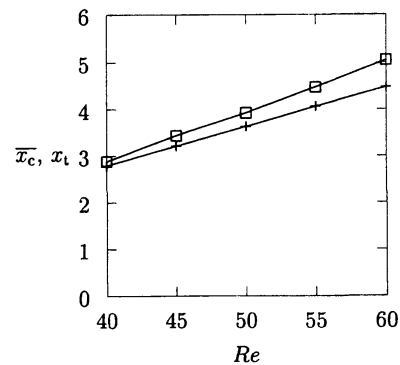


図 2: 局所不安定性. (a) 線形時間増幅率 σ_p , $Re = 50$. (b) 絶対不安定領域と対流不安定領域の境界. $\square$: $\bar{x}_c$, 絶対不安定領域と対流不安定領域の境界. $+$: x_t , 双子渦長さ.

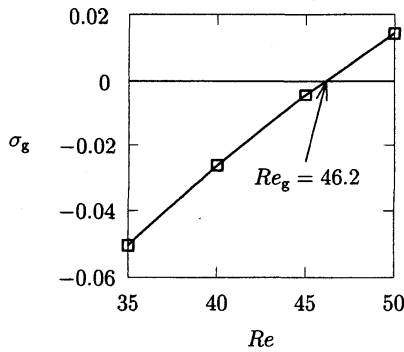
レイノルズ数 $Re = 50$ における攪乱の (局所) 絶対不安定増幅率 σ_p を各位置 x_1 の関数として描くと図 2(a) のようになる. この図より, $Re = 50$ においては角柱直後の領域 $x \leq \bar{x}_c = 3.93d$ は (局所) 絶対不安定領域であり, これより下流では局所対流不安定である. 同様にして, $40 \leq Re \leq 60$ の範囲で, (局所) 絶対不安定領域と (局所) 対流不安定領域の境界位置 $\bar{x}_c$ を評価して図に表すと図 2(b) のようになる. この図には, それぞれのレイノルズ数における角柱後方の双子渦の長さ x_t も合わせて示した. 図 2(b) から, 境界位置 $\bar{x}_c$ は, レイノルズ数の増加とともに下流側へ移動し, (局所) 絶対不安定領域は大きくなることが分かる. また, その大きさは双子渦の大きさより少し大きい. 次節で説明するように流れが全体不安定性となる臨界レイノルズ数 $Re_g = 46.2$ では $\bar{x}_c \sim 3.7d$ であり, オア・ゾンマーフェルト方程式を用いたこれまでの研究 [10, 13] で得られた絶対不安定領域についての結果 ($Re = 56$ で $\bar{x}_c \sim 3.5d$) とほぼ一致している. しかし, 物理的な考察によれば, 絶対不安定領域の出現と全体不安定性の発生が一致すべきと思われるので, 全体安定となるレイノルズ数においても (局所) 絶対不安定領域が存在するの

は、流れの平行性の仮定による誤差であると考えられる。

3.2 全体安定性

前節では、平行流を仮定して絶対不安定増幅率を評価したが、ここでは非平行な対称定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ を主流とし、線形攪乱方程式 (9) を適当な初期条件および境界条件のもとに数値シミュレーションを行い攪乱の増幅率 σ_g を評価する。全体不安定性を調べるには特に外乱を与える必要はなく、適当な初期条件のもとで線形攪乱方程式を解くことにより最大増幅率あるいは最小減衰率をもつモードが生き残り、自然遷移における攪乱の固有関数が得られる。こうして求めた全体不安定攪乱の増幅率 σ_g は図 3(a) のようになり、全体不安定となる臨界レイノルズ数は $Re_g = 46.2$ となる。

(a)



(b)

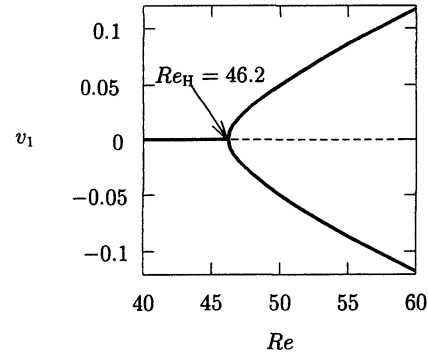


図 3: 全体不安定性. (a) 線形増幅率 σ_g . (b) 分岐図.

流れの分岐を調べるために、元の非線形方程式 (1) と (2) を適当な初期条件と境界条件のもとで解く。こうして求めた分岐図が図 3(b) である。この図では、角柱後方の点 $(x, y) = (1, 0)$ における y 方向流速 v_1 を振動流の振幅を表す物理量として採用し、各レイノルズ数における平衡状態での流速の最大値 $v_{1\max}$ と最小値 $v_{1\min}$ が描かれている。臨界レイノルズ数 Re_H 近傍では $(v_{1\max} - v_{1\min})^2 \propto (Re - Re_H)$ の関係が成り立っており、この分岐は(超臨界)ホップ分岐であると判別できる。また、臨界レイノルズ数は $Re_H = 46.2$ となる。当然ではあるが、渦度輸送方程式を解いて得られた臨界レイノルズ数 Re_H は線形攪乱方程式を解いて得られた Re_g とよく一致する。

3.3 インパルス応答

定常対称流の(非平行)対流不安定性と絶対不安定性を調べるため、平行流近似の場合と同様に定常流中の角柱下流の1点 $P_0 = (35, 0)$ において $t = [0, 0.001]$ の間だけパルス的な外乱 $\hat{\psi} = 0.01$ を与え、攪乱の時間発展を調べる。後で詳しく説明するように、攪乱は初期に音波(音速は無限大)として瞬時に上流へ伝わった後、波束を形成して下流へ伝播する。ここではまず、2つの定点 $P_1 = (10, 0)$ と $P_2 = (20, 0)$ において攪乱の振幅の変化を観察する。図4(a)は全体不安定性の臨界レイノルズ数 Re_g よりも大きなレイノルズ数 $Re = 50$ における、 P_1 点および P_2 点で観測した攪乱 $\hat{\psi}$ の振動振幅 $\hat{\psi}_{a10}$ (実線) と $\hat{\psi}_{a20}$ (破線) である。初期に与えた攪乱が減衰した後(AB および A'B'), $\hat{\psi}_{a10}$ と $\hat{\psi}_{a20}$ は急速に増加し(BC および B'C'), その後一定の増幅率で増加し続ける(CD および C'D')。定点 P_1 と P_2 において振動振幅が指数関数的に増幅するので流れは(非平行)絶対不安定である。なお、初期攪乱を与えた時刻と、攪乱の振幅が一定の増幅率で増加し始める時刻に差があるのは(AC および A'C'), 角柱直後の(非平行)絶対不安定領域で増幅された攪乱が観測点まで移流する時間($\Delta t \sim 6-7$)が必要なためであり、このことは上流側で観測した $\hat{\psi}_{a10}$ よりも下流側で観測した $\hat{\psi}_{a20}$ の方が攪乱の振幅が一定の増幅率で増加し始める時刻が遅いことから明らかである。

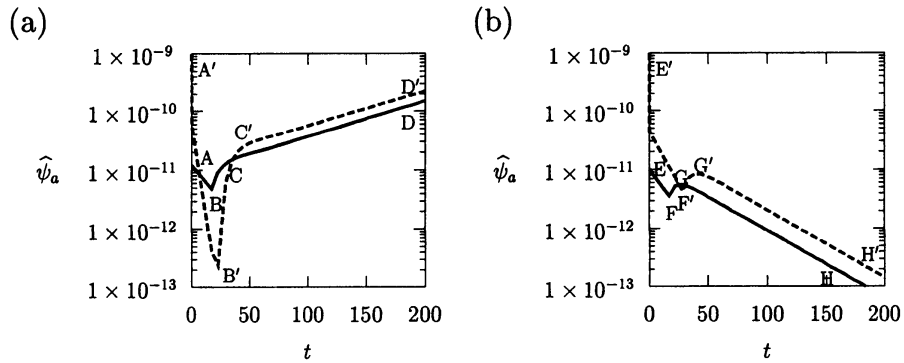


図 4: x 軸上の $\hat{\psi}$ の振幅. $x = 35$ にインパルスを与えた場合. 実線: $\hat{\psi}_{a10}$, $x = 10$. 破線: $\hat{\psi}_{a20}$, $x = 20$. (a) $Re = 50$, 絶対不安定. (b) $Re = 40$, 対流不安定.

一方、図4(b)から明らかなように、亜臨界レイノルズ数 $Re = 40$ では、 $\hat{\psi}_{a10}$ と $\hat{\psi}_{a20}$ は初期に与えた攪乱が減衰した後(EF および E'F'), 攪乱の振幅は増加し(FG および F'G'), その後一定の増幅率で減少し続ける(GH および G'H'). このことは $Re = 40$ のとき P_1 と P_2 で流れは(非平行)絶対安定であることを示している。また、上流側で観測した $\hat{\psi}_{a10}$ と下流側で観測した $\hat{\psi}_{a20}$ を比較すると、 $\hat{\psi}_{a20}$ の方が $\hat{\psi}_{a10}$ より大きく、減少に転じる時刻も遅い。これは、波束の振幅が成長するので(非平行)対流不安定であるが、波束は成長しながら流れ去ることを示している。このような性質は流れ場のすべての点で見られるので、亜臨界レイノルズ数 $Re = 40$ における流れは全ての領域で対流不安定である。

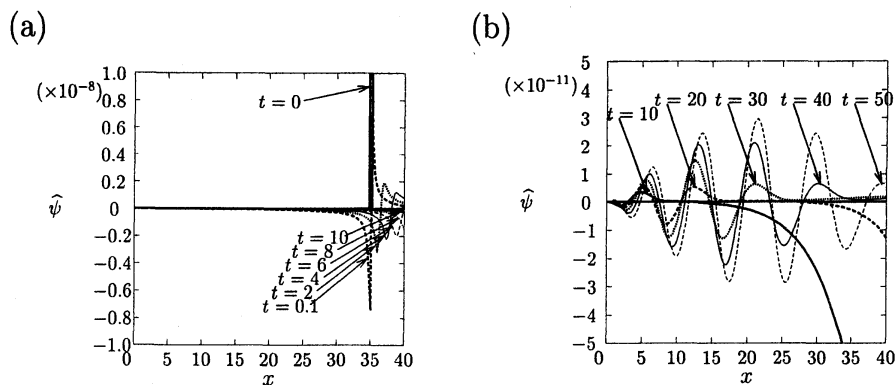


図 5: x 軸上の $\hat{\psi}$ の空間分布. $x = 35$ にインパルスを与えた場合. $Re = 50$. (a) フェーズ 1, $t = [0, 10]$. (b) フェーズ 2, $t = [10, 50]$.

次に、攪乱 $\hat{\psi}$ の空間分布の時間変化を詳しく見るにより、波束の形成と伝播を調べる。超臨界レイノルズ数 $Re = 50$ においては、 x 軸上での $\hat{\psi}$ の空間分布は図 5(a) と 5(b) のようになる。図 5(a) ($t = [0, 10]$: フェーズ 1) のように、攪乱を与えた直後 $t = 0.1$ には、攪乱は下流側だけではなく上流側の角柱近傍にも音波 (無限大の位相速度をもつ圧力波) として伝播し、その後は減衰しながら下流へ移流する。その後、図 5(b) ($t = [10, 200]$: フェーズ 2) のように、 $t = 10$ においては、角柱から離れた領域 ($x \geq 10$) にまだ十分減衰していない初期攪乱が残っているが、角柱近傍 ($x \simeq 5$) には初期攪乱とは別のピークが生じる。この角柱近傍の攪乱の振幅は、時間とともに大きくなっている。これは、(非平行) 絶対不安定領域で攪乱が増幅されているためであり、3.1 節で求めたように、 $Re = 50$ における (局所) 絶対不安定領域は角柱直後に存在し、(局所) 絶対不安定領域と (局所) 対流不安定領域の境界位置が $\bar{x}_c = 3.93$ であったことに対応している。また、 $t = 10$ のとき角柱近傍にある波束の前縁は、時間とともに下流に移流している ($t = 20$ で $x \simeq 17$, $t = 30$ で $x \simeq 26$, $t = 40$ で $x \simeq 35$)。これらの結果より、絶対不安定でない領域に与えられた攪乱は圧力波として瞬時に (非平行) 絶対不安定領域に伝わり、そこで振動が持続的に自己励起し、増幅された攪乱が下流に伝播することにより流れが全体不安定となることが分かった。また、攪乱を与える点や観測点を変えて調べても同様の結果が得られるので、攪乱を与える点の局所安定性は、全体安定性には影響を与えないことも分かった。すなわち、角柱直後に振動を自己励起する絶対不安定領域が存在し、それにより流れが全体不安定となっている構造は平行流近似の結果と同じである。

一方、亜臨界レイノルズ数 $Re = 40$ においては、平行流近似では角柱直後に (局所) 絶対不安定領域が存在する (図 2(b)) にもかかわらず、(局所) 絶対不安定領域で攪乱が増幅され続けることがなく、流れ場全体で攪乱は対流不安定である。このことは、(局所) 絶対不安定領域の存在は全体不安定の十分条件ではないことを示しており、Chomaz *et al.* [18] による 1 次元のモデル方程式による研究や、Monkewitz [19]

による平行流近似による線形安定性の研究結果と一致している。しかし、ここで定義した(非平行)絶対不安定領域の出現は全体不安定性が生じるための必要十分条件となるだろうと推測される。

3.4 振動源の推定

これまでの多くの研究では、カルマン渦列が発生するレイノルズ数では、有限の大きさの(局所)絶対不安定領域が振動源となっていると考えられてきた。しかし、平行流近似によって求めた(局所)絶対不安定領域が、非平行流中におけるカルマン渦列の振動源と一致するかどうかについては十分明らかではない。平行流近似によって求めた(局所)絶対不安定領域は非平行性を考慮しても本当に振動源となっているのだろうか。この節では振動源の領域を推定する。

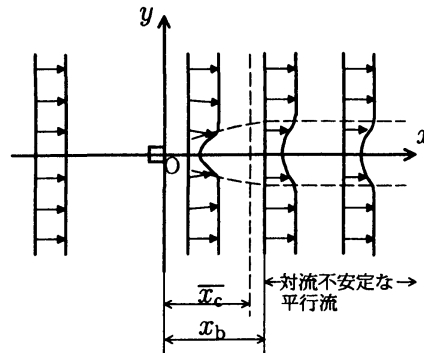


図 6: 下流側の領域を局所対流不安定な平行流で置き換えた流れ

ここでは、図 6 のように、数値計算により求めた定常対称流 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ のうちある位置 x_b より下流側の領域 $x_b \leq x$ を(局所)対流不安定な平行流で置き換えた主流を考える。非平行流が平行流に滑らかに接続するよう、平行流 $U(y)$ の速度分布には非平行流の x_b における y 方向速度分布 $u(x_b, y)$ を用いる。本来非平行流である物体後流では物体直後の速度分布は大きな速度欠損をもち、下流に行くにしたがって速度欠損が回復する。一方、平行流は速度欠損が回復しないので、平行流の増幅率は非平行流の増幅率より大きくなる可能性がある。しかし、ここでの置き換えには対流不安定な平行流を用いるので、この部分の(局所)絶対不安定性の増幅率は負であり振動源となることはない。したがって、 $x_b \leq x$ を平行流で置き換えた流れの全体安定性が絶対不安定であれば $x \leq x_b$ の範囲に振動源があると考えることができる。(局所)絶対不安定領域 $0 \leq x \leq x_c$ に振動源があるかどうかを調べるために、 x_b が x_c にできるだけ近い値となるように、また、平行流が対流不安定となるように、 x_b には $x_b = x_c + \delta x$ を採る(図 2(a) 参照, $\delta x \ll 1$)。

このようにして、全体不安定性に対する臨界レイノルズ数 Re_g よりも大きなレイノルズ数において、 $x_b \leq x$ の領域を対流不安定な平行流で置き換えた流れの全

体安定性を調べると(3.2節参照), この流れ場は絶対不安定であることが分かった. すなわち, $Re \geq Re_g$ では, $x_b \leq x$ には振動源はなく, 平行流近似によって求めた(局所)絶対不安定領域 $0 \leq x \leq \bar{x}_c \simeq x_b$ に振動源が存在すると推定できる. これまでにも説明してきたように, 非平行性を考慮に入れて評価すれば(非平行)絶対不安定性領域の発生が全体不安定性の臨界点を決定すると考えられる. このことを具体的に証明することが今後の課題である.

謝辞

この研究を行うにあたり, 京都大学数理解析研究所山田道夫教授に助言をいただいた. 特に, 流れの対流不安定性と絶対不安定性について議論をしていただいたことについて山田教授に感謝します.

参考文献

- [1] Bénard, H., "Formation des centres de giration á l'arrière d'un obstacle en mouvement", Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, Vol. 147, (1908), pp. 839-842.
- [2] Von Kármán, Th., "Über den Mechanismus des Widerstandes, den einen bewegter Körper in einer Flüssigkeit erzeugt", Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., (1911), pp. 509-517.
- [3] Kovasznay, L. S. G. "Hot wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers", Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 198, (1949) pp. 174-190.
- [4] McKoen, C., H., "On the stability of laminar wake", Aero. Res. Council Current Papers, No. 303, (1956), pp. 1-19.
- [5] Goldstein, S., "On the Two-Dimensional Steady Flow of a Viscous Fluid behind a Solid Body. I", Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 142, (1933), pp. 545-562.
- [6] Sato, H., Kuriki, K., "The mechanism of transision in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow", J. Fluid Mech., Vol. 11, (1961), pp. 321-352.
- [7] Taneda, S., "The stability of two-dimensional laminar wakes at low Reynolds numbers", J. Phys. Soc. Japan., Vol. 18, (1963), pp. 288-296.
- [8] Briggs, R., J., "Electron-stream interaction with plasmas", Cambridge, MIT Press, (1964), chap. 2.

- [9] 山田道夫, “流れとパターン - 流れの安定性理論序論” (“パターン形成” 第3章), (朝倉書店, 1991, 東京), pp. 38-79.
- [10] Betchov, R., Criminale, W. O., “Spatial instability of the inviscid jet and wake”, *Phys. Fluids*, Vol. 9, (1966), pp. 359-362.
- [11] Gaster, M., “Growth of disturbances in both space and time”, *Phys. Fluids*, Vol. 11, (1968), pp. 723-727.
- [12] Nakaya, C., “Instability of the near wake behind a circular cylinder”, *J. Phys. Soc. Japan.*, Vol. 41, (1976), pp. 1087-1088.
- [13] Triantafyllou, G. S., Triantafyllou, M. S., Chrysostomidis, C., “On the formation of vortex streets behind stationary cylinders”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 170, (1986), pp. 461-477.
- [14] Kupfer, K., Bers, A., Ram. A. K., “The cusp map in the complex-frequency plane for absolute instabilities”, *Phys. Fluids*, Vol. 30, (1987), pp. 3075-3082.
- [15] Huerre, P., Monkewitz, P. A., “Absolute and convective instabilities in free shear layers”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 159, (1985), pp. 151-168.
- [16] Koch, W., “Local instability characteristics and frequency determination of self-excited wake flows”, *J. Sound. Vib.*, Vol. 99, (1985), pp. 53-58.
- [17] Belan, M., Tordella, D., “Convective instability in wake intermediate asymptotics”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 552, (2006), pp. 127-136.
- [18] Chomaz, J. M., Huerre, P., Redekopp, L. G., “Bifurcations to local and global modes in spatially-developing flows”, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 60, (1988), pp. 25-28.
- [19] Monkewitz, P. A., “The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers”, *Phys. Fluids*, Vol. 31, (1988), pp. 999-1006.
- [20] Jackson, C. P., “A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 182, (1987), pp. 23-45.
- [21] Noack, B., R., Eckelmann, H., “A low-dimensional Galerkin method for the three-dimensional flow around a circular cylinder”, *Phys. Fluids*, Vol. 6, (1994), pp. 124-143
- [22] 千葉賢, “円柱を過ぎる流れの全体不安定性に関する研究”, *ながれ*, Vol. 15, (1996), pp. 295-307.

- [23] Dauchy, D., Dusek, J., Fraunie, P., "Primary and secondary instabilities in the wake of a cylinder with free ends", J. Fluid Mech., Vol. 332, (1997), pp. 295-339.
- [24] Nishioka, M., Sato, H., "Mechanism of determination of the shedding frequency of vortices behind a cylinder at low Reynolds numbers", J. Fluid Mech., Vol. 89, (1978), pp. 49-60.
- [25] Monkewitz, P. A., Nguyen, L. N., "Absolute instability in the near wake of two-dimensional bluff bodies", J. Fluids Struct., Vol. 1, (1987), pp. 165-184.
- [26] Chomaz, J. M., Huerre, P., Redekopp, L. G., "A frequency selection criterion in spatially developing flows", Stud. Appl. Math., Vol. 84, (1991), pp. 119-144.
- [27] Pier, B., "On the frequency selection of finite-amplitude vortex shedding in the cylinder wake", J. Fluid Mech., Vol. 458, (2002), pp. 407-417.
- [28] Oertel, H. Jr., "Wakes behind blunt bodies", Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 22, (1990), pp. 539-564.