

コンパクト Kähler 多様体の偏極族のモジュライ空間

京大 数理研 藤木 明

1. コンパクトな $\mathbb{C}^\infty$ 多様体 X で (実) 次元が偶数 $2n$ であるものを固定する. $\mathcal{C}(X)$ で X に underlying な $\mathbb{C}^\infty$ 多様体を持つようなコンパクト複素多様体の全体を, $M(X)$ で, $\mathcal{C}(X)$ に属するコンパクト複素多様体の複素解析的同値類を表す.

問題: $M(X)$ に自然な (Hausdorff) 複素空間の構造がはいるか?

但しここで '自然な' は次の意味に解釈する.

1) $f: X \rightarrow S$ を固有 ^{かつ smooth} 正則写像で, $x_s := f^{-1}(s)$ が $\mathcal{C}(X)$ に属するものとする時, $s \in S$ に対し x_s の同値類を対応させて得られる自然写像 $\rho = \rho_f: S \rightarrow M(X)$ は正則.

2) 1) を満たす複素構造の中で maximal, i.e., $M(X)' \in M(X)$ に 1) を満たす別の複素構造を入れたものとするとき, 恒等写像 $M(X) \rightarrow M(X)'$ は正則.

3) より自然な複素構造は若し存在すれば一意のである.

2. 上のような定式化のもとでは 上記の問題は一般には

否定的である。

あ) 複素構造の jumping. $f: X \rightarrow D = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$ は固有かつ smooth な正則写像で $x_s \cong x_{s'}$, $s, s' \neq 0$, $x_s \neq x_0$, $s \neq 0$, なるものとする。もし $\sigma \in \mathcal{C}(X)$ なる自然写像 $p_f: D \rightarrow M(X)$ に関し, $p_f(D') = 1 \text{ 点} \neq p_f(0)$, $D' = D - \{0\}$, となり $M(X)$ は $p_f(0)$ の近傍で複素(空間の)構造を持ち得る。

例としては x_0 が ruled, ある... は Hopf の場合が知られてゐる (cf. [10][11])

一般に jumping があつる x_0 は何か? という問題に関して次の事実に注意しておく。

jumping $\longrightarrow \dim \text{Aut } x_s < \dim \text{Aut } x_0$, $s \neq 0$, 特に $\dim \text{Aut } x_0 > 0$ ([8, Prop. 5.6]). 従つて x_0 が Kähler なら x_0 は i) ruled か ii) $\text{Aut } x_0$ は複素トーラス (従つて x_0 は正則 Seifert fibering 空間 cf. [18]). (cf. [4]). 但し iii) の場合の jumping の例は i) に属すぬものの例を筆者は知らない。ここで $\text{Aut } Y$ は一般に Y の双正則自己同形群のなす複素 Lie 群 (Y compact), $\text{Aut}_0 Y$ はその連結成分を表わす。また, ruled とは代数幾何では $\mathbb{P}^1 \times Z$ の形の多様体と双有理な多様体をさすものであるが一般の複素多様体に対しては次のように定義する。

定義 X はコンパクト複素多様体とする。この時 X が ruled であるとは、あるコンパクト複素多様体 Z と Z 上の正則ベク

トル束 $E \rightarrow Z$ が存在し X が E に同様の射影バンドル $P(E) := E \otimes \mathbb{C}^*/\mathbb{C}^*$ と双有理形 (birational) になる時をいう。但し E の階数 > 1 とする。

ii) 極限の非一意性. $f_i: X_i \rightarrow D$, $i=1, 2$, を固有かつ smooth な正則写像で, $X_{1s} \cong X_{2s}$, $s \neq 0$, $X_{10} \not\cong X_{20}$ なるものとする。この時, $M(X)$ は $\text{Aut } P_i(0)$ にあいて Hausdorff でない。つまり $(P_1(0), P_2(0)) \in M(X) \times M(X)$ は対角集合 $\Delta \subseteq M(X) \times M(X)$ の閉包に含まれるが Δ 自身には含まれない。jumping はこの特例の場合と異なることに注意する。実際 f_1 と (2.6) の f を f_2 として自然写像 $X_3 \times D \rightarrow D$, $s \neq 0$ をとればよい。従って (ii) の例として X_0 : ruled, Hopf なるものが存在することになる。また X_0 が $P(E)$ の形の場合は 'elementary transformation' を用いて (ii) に属する。(ii) の例が比較的簡単に構成できる例がある。jumping と異なり, X_0 が general type の Moishezon 多様体でも (ii) の現象がある例がある。例 15, 最後の例

iii) 無限自己同形群 compact 複素多様体 X に対し $\overline{\text{Aut } X} = \text{Aut } X / \text{Aut}_0 X$ とおく。一般に $\# \overline{\text{Aut } X} = \infty$ の時は X に対応する点で $M(X)$ は複素構造を持たない。^(例 14.1) X が複素トーラス, $K=3$ 曲面の時にこのような現象が生じる。今, 簡単のため $\text{Aut}_0 X = \{e\}$ とすると, X の Kuranishi 族 $\psi: X \rightarrow S$, $X_0 \cong X$ (fixed isomorphism) $0 \in S$, において $\text{Aut } X \cong \text{Aut } X_0$ (但し右辺は X_0 に沿う

germ として, x_0 を x_0 にうつす x の自己同形群を考えたもの) であり [17], これと自然準同形 $\alpha: \text{Aut } x \rightarrow \text{Aut } S$ を合成して $\beta: \text{Aut } X \rightarrow \text{Aut } S$ を得る. $\# \text{Aut } X = \infty$ の時, β の像 H に対しても一般に $\# H = \infty$ であり, 自然写像 $p_f: S \rightarrow M(X)$ は S/H を経由することと合わせて最初に述べた事実が得られる.

注 $\# \overline{\text{Aut}} X = \infty$ を回避する方法として rigidification という考え方がある. すなわち X と X 上の代数的な構造, 例えばコホモロジー群 $H^i(X, \mathbb{Z})$, の対 $(X, H^i(X, \mathbb{Z}))$ を考えよと $\overline{\text{Aut}}(X, H^i(X, \mathbb{Z})) < +\infty$ になる場合がある. 複素トーラス, k -3 曲面の時, $i=2$ とすれば, $\overline{\text{Aut}}(X, H^2) = \{e\}$ となること知られている. さらにこれらを用いてこれらの対全体に自然な複素多様体の構造がはいることが示されている. (k -3 曲面について [1] を参照, また rigidification の統一的な取り扱いについては [9, exposé 7])

3.2 以後式ではコンパクト Kähler 多様体のみを ^{主眼} 考察の対象とする.

定義 偏極 Kähler 多様体 とは, compact 複素多様体 X と X 上の Kähler 類 $\omega \in H^2(X, \mathbb{R})$ の対である. 2 つの偏極 Kähler 多様体 (X, ω) と (X', ω') が 同値 であるとは, $f: X \rightarrow X'$ なる双正則写像が存在し $f^*\omega' = \omega$ となることと可なり.

$M(X)_\omega$ で (X, ω) , $X \in \mathcal{C}(X)$, の同値類の集合を表す。

定義 コムパクト Kähler 多様体の偏極族とは, properかつ smooth な正則写像 $f: X \rightarrow S$ と, 元 $\tilde{\omega} \in \Gamma(S, R^2 f_* \mathbb{R})$ の対 $(f, \tilde{\omega})$ により^{*} 2つの偏極族 $(f, \tilde{\omega})$ と $(f', \tilde{\omega}')$ が同値とは双正則写像 $g: X \rightarrow X'$, $f = f'g$, $(f': X' \rightarrow S)$, かつ $g^* \tilde{\omega}' = \tilde{\omega}$ となるものがある時をいう。^{*} さらに各 $s \in S$ に対し $\tilde{\omega}$ の誘導する類 $\tilde{\omega}_s \in H^2(X_s, \mathbb{R})$ が Kähler 類にある: と仮定する。

今 $(f, \tilde{\omega})$, $f: X \rightarrow S$, と Kähler 多様体の偏極族とする時, $s \in S$ に対し, 対 $(X_s, \tilde{\omega}_s)$ の属する同値類と対応させることにより自然写像 $p_{(f, \tilde{\omega})}: S \rightarrow M(X)_\omega$ が得られる。(但し $X_s \in \mathcal{C}(X)$ と仮定する)。

定義 $\mathcal{F} \subseteq M(X)_\omega$ 部分集合とする。 $\mathcal{F}$ は 自然な複素(空間の)構造 があるとは次の2条件が満たされる時をいう。
よって複素構造が $\mathcal{F}$ に決まる

- i) 任意の $s \in S$ に対して $(f, \tilde{\omega})$ に対し, $p_{(f, \tilde{\omega})}(S) \subseteq \mathcal{F}$ なら $p_{(f, \tilde{\omega})}: S \rightarrow \mathcal{F}$ は正則。 ii) i) をみたす複素構造の中で最大 (1. 参照)。

主定理の前に次の定義が必要である。

定義 X はコムパクト複素多様体とする。 X は quasi-ruled とは, コムパクト複素多様体 Z , 正則ベクトル束 $E \rightarrow Z$, (階数 $E > 1$) と 上の 有理形写像 $\lambda: \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ で Z を経由したものがある時をいう。

$$R = \{(X, \omega) \in M(X)_\omega; X: \text{ruled}\}$$

$$QR = \{(X, \omega) \in M(X)_\omega; X: \text{quasi-ruled}\}, \quad \text{と置く。}$$

定理 1) $M(X)_\omega - QR$ に自然の Hausdorff 複素構造がはいり。
 2) $\exists B \subseteq R$, 部分集合 B , $M(X)_\omega - B$ 上に自然の複素構造がはいり。

系 $f: X \rightarrow D$ がコンパクト Kähler 多様体の偏極族から来ている時, もし f が複素構造の jumping を与えるなら (叶. 2.6b)) X_0 は ruled である。

注 一般に $M(X)_\omega$ には, 複素構造のあるなしに拘らず, 自然の位相が導入できる。この位相に関して QR は $M(X)_\omega$ の連結成分の和集合になっている。また自然写像 (f, ω) は常に連続である。後者は次節における位相の定義から従う。前者は, これと次の定理よりの帰結である。

定理 [6] $(f, \omega) = (f: X \rightarrow S, \omega)$ を Kähler 多様体の偏極族とする。 S は連結かつ, X_0 が quasi-ruled, $0 \in S$, とする。この時任意の $s \in S$ に対し X_s は quasi-ruled。すなわち quasi-ruled の変形は quasi-ruled である。

さて以下で定理の証明をいくつかの特殊な定理に帰着させる方法を述べる。

4. $X \in \mathcal{C}(X)$ に対し X の同値類を対応させる自然写像を

$\pi: \mathcal{C}(X) \rightarrow M(X)$ を表す. さらに $\mathcal{A}\mathcal{C}(X)$ は X 上の概複素構造の全体を表わそう. T は X の接束とする時, X 上の概複素構造とは, C^∞ ベクトル束 $End T$ の X 上の切断 σ で $\sigma^2 = -(\text{identity})$ を満たすものに他ならない. 考えを明確にするための σ としては C^∞ のもののみ考えることにする: $\mathcal{A}\mathcal{C}(X) = \{\sigma \in \Gamma_0(X, End T); \sigma^2 = -id_T\}$

さて $\mathcal{C}(X)$ の元をより正確に, 複素多様体 X と C^∞ -diffeomorphism $\varphi: X \rightarrow X$ の対と考える. すると $(X, \varphi) \in \mathcal{C}(X)$ に対し, X の定める概複素構造を φ が X へうつしたものを対応させることにより, 自然な inclusion $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{A}\mathcal{C}(X)$ が得られる. 但し対 (X, φ) と (X', φ') は双正則写像 $h: X \rightarrow X'$ が存在して $h\varphi = \varphi'$ となる時 $\mathcal{C}(X)$ の同じ元と定めると考えている.

さてここでも詳しく述べないが $\mathcal{A}\mathcal{C}(X)$ には自然な位相が導入される. ([2][12] 参照, 但し位相が一意的ではない) $\mathcal{C}(X)$ に $\mathcal{A}\mathcal{C}(X)$ の部分空間としての位相, さらに $M(X)$ には $\mathcal{C}(X)$ から π により誘導される等化位相をいれる. この位相を $M(X)$ の自然位相と呼ぼう. 実際 $M(X)$ は上記のような $\mathcal{A}\mathcal{C}(X)$ の位相のとり方によらず一意的に上の方法で位相が定まることが示される.

(点の補題参照)

一方 π は次のように解釈される. $Diff X$ は X の diffeomorphism 群とすると $Diff X$ は自然に集合 $\mathcal{A}\mathcal{C}(X)$ に作用しその作用で $\mathcal{C}(X)$ は不変である. すなわち $\varphi \in Diff X$ に対し $\sigma \cdot \varphi$ は標準同形

$\varphi^* \text{End} T \cong \text{End} T$ により $\text{End} T$ の切断とみなされる. ($\alpha \in \mathcal{A} \ell(X)$)
作用の定義よりただちに

補題 i) $M(X) = \mathcal{A} \ell(X) / \text{Diff}(X)$ ii) $X = (X, \alpha) \in \mathcal{A} \ell(X)$ に対し
 $\pi(X, \alpha) \cong \text{Diff} X / \text{Aut} X$.

従って π は群 n による商空間 n の軌道 (orbit) 写像であり, 各点
の isotropy 群が複素解析的 n 自己同形群になることがわかる。

5. 補題の i) を考慮して述べた問題を一般化する. 3.1
述べた偏極族 n による定式化は一般化された問題の特殊な場合
であることが従う。

まず $\text{Diff} X$ の部分群 G $G \subseteq \text{Diff} X$ なるものを固定する.
これは $\text{Diff} X$ の $\text{Diff} X$ の適当な位相 n 関り e の連結成分を
表わす. $M(X, G) = \mathcal{A} \ell(X) / G$ とおく. 従って $(X, \varphi) \sim (X', \varphi')$
は $M(X, G) \longleftrightarrow \exists h: X \rightarrow X'$ 双正則同形 s.t. $\varphi' h = \varphi \in G$, である.

定義 G -族 (複素多様体の) とは, properかつ smooth な正則写
像 $\pi: X \rightarrow S$ $\varphi \in \mathcal{A} \ell(X)$, $s \in S$, なる s と, C^∞ -ファイバー束としての π
の構造群 n の G の reduction μ 対 (π, μ) である. 対 (π, μ) と (π', μ')
が同形とは. 双正則同形 $g: X \rightarrow X'$ で, $\pi' g = \pi$ となり また g が μ ,
 μ' n より定められた G -ファイバー束としての同形を与えていよ
うなものがある時をいう。

定義より (π, μ) が G -族であれば各 s に対し s の G -同値類が自

然に定まり, S にこれに対応させることにより自然写像 $p_{(f,\mu)}:$

$S \rightarrow M(X, G)$ が定まる。

定義 $M(X, G)$ に自然な複素構造がはいるとは次の条件をみたす複素構造 μ $\underbrace{M(X, G)}_{\mu}$ にはいる時をいう。

i) 上のような任意の (f, μ) に対し自然写像 $p_{(f,\mu)}$ は正則。

ii) i) を満たす複素構造の中で最大。

さらに一般に $\mathcal{F}$ が $M(X, G)$ の部分集合である場合, $\mathcal{F}$ に自然な複素構造がはいるということと同様にして定義される。(i) において (f, μ) と $p_{(f,\mu)}(S) \subseteq \mathcal{F}$ なるものに話を限る.)

G の例 1) $A \in \mathbb{C}$ の任意の代数構造とする。たとえば $A = \pi_1(X)$, (基本群) $H^*(X)$ 等々。この時 $G = \text{Ker}(D: \text{ff}X \rightarrow \text{Aut}(A))$ とおく。この場合 $M(X, G) = \{(X, A_X)\} / \sim$, $(X, A_X) \sim (X', A_{X'})$ といふ双正則同形 $h: X \rightarrow X'$ s.t. $h^* A_{X'} = A_X$ (or $h_* A_X = A_{X'}$) を意味する。

2) $\omega \in H^2(X, \mathbb{R})$ を固定し, $G = G_\omega = \{g \in D: \text{ff}X; g^* \omega = \omega\}$ とする。この時 $M(X, G) = \{(X, \omega_X); \omega_X \in H^2(X, \mathbb{R})\} / \sim$, (同値類は 3. の定義と同様の意味) となる。

今, 部分集合 $\mathcal{F} \subseteq M(X, G)$ を固定する。G-族 (f, μ) において $p_{(f,\mu)}(S) \subseteq \mathcal{F}$, $(f: X \rightarrow S)$, となる時, (f, μ) を $\mathcal{F}$ -族とこのことにする。

G 以上の例の $G_{\text{K\"ah}} \in \mathcal{I} = \{(X, \omega_X), \omega_X: \text{K\"ahler class}\}$ とすると,
 $\mathcal{I}$ 族とは, コンパクト K\"ahler 多様体の偏極族 (3. 定義) に他ならぬ。

6. $\mathcal{I} \subseteq M(X, G)$, $G \subseteq \text{Diff}(X)$ と固定する。

定義 $\mathcal{I}$ が analytic $\longleftrightarrow$ 任意の G -族 (f, μ) に対し $S_{\mathcal{I}} := p_{(f, \mu)}^{-1}(\mathcal{I})$ は S 内の解析的部分集合。

一般に $p_{(f, \mu)}|_{S_{\mathcal{I}}}: S_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{I} \subset \bar{p}_{(f, \mu)}$ と書く。以後 $\mathcal{I}$ は analytic と仮定する。さて $X \in \pi_G^{-1}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{C}(X)$ と固定する。ここから $\pi_G: \mathcal{C}(X) \rightarrow M(X, G)$ は自然の射影。 $f: X \rightarrow S$, $X_0 \cong X$, $0 \in S$, $\varepsilon \in \mathcal{I}$ (被約) Kuramishi 族とする。 $\text{Diff}(X) \subset G$ により f は自然に G -族 (f, μ) となる。従って $S_{\mathcal{I}} \subseteq S$ が定義され仮定によりこれは解析的部分集合である。

補題 1) $\bar{p}_{(f, \mu)}: S_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{I}$ は開写像, 2) $\bar{p}_{(f, \mu)}^{-1}(\bar{p}_{(f, \mu)}(0)) = \{0\}$ 。

実際 1) は Kuramishi 族の構成 [12] からただちに従う。2) については [13] を参照。もっとも 2) は versality の開性から形式的にも従う。

系 $R_{\mathcal{I}} = \{(s_1, s_2) \in S_{\mathcal{I}} \times S_{\mathcal{I}}; x_{s_1} \cong x_{s_2}: G\text{-同形}\}$ とおく。 $R_{\mathcal{I}}$ は $S_{\mathcal{I}}$ 上の同値関係であるか。次が成り立つ。 $\bar{0} = \bar{p}_{(f, \mu)}(0) \in \mathcal{I}$ とおく。すると $\bar{0}$ の近傍 U が存在して $U = S_{\mathcal{I}}/R_{\mathcal{I}}$ となる。

命題 J が自然な複素構造を持つ $\longleftrightarrow$ 任意の $X \in \pi_G^{-1}(J)$ に対し, 対応する Kuramishi 族において R_J は $S_J \times S_J$ の解析的部分集合.

$\longrightarrow$ は自然な複素構造の定義よりただちに従う. $\longleftarrow$ は, まず R_J が解析的であると, 上記補題の 2) より R_J の定義する同値関係は有限かつ固有になることがわかる. よって S/R_J に自然な複素構造を導入しうる. Kuramishi 族の versality の開性と合わせて J に自然な複素構造がはいることがわかる. (参考照)

これより得られたこととすると次のようになる.

命題 $J \subseteq M(X, G)$ とする. J が自然な複素構造を持つための必要十分条件は, 1) J が analytic であり, 任意の $X \in \pi_G^{-1}(J)$ に対し R_J が解析的であること. さらに J が Hausdorff であるための必要十分条件は, 2) $(f_i: X_i \rightarrow S_i, i=1, 2) \in J$ -族とする. $\{S_k^i\}$ は S_i の系列 ($k=1, 2, \dots$) で S_0^i に収束するものとし, $X_{S_k^i}^i \cong X_{S_k^j}^j$, G -同形, かつ任意の k に関し成立するものとする. この時常に $\exists G$ -同形 $X_{S_0^i}^i \cong X_{S_0^j}^j$ が成立することである.

例 $G = G_\omega$, $\omega \in H^2(X, \mathbb{R})$ と 5 例目の通りとする. $J = J_\omega^0 = \{X, \omega \in M(X, G); \omega_X \text{ Kähler class on } X, X: \text{not quasi-ruled}\}$ とする. 5 の最後の注意により定理の 1) のためには J に自然な複素構造がはいることを示せばよい. 上の命題を考慮するとまず

示すべきことは:

命題 J は analytic.

事実そのものは, implicit には知られている ([16, Chap. IX] 参照.)
 ここで T は, $X \in \pi_Q^{-1}(J)$ に対し Kuranishi 族 (微分) $\varphi: X \rightarrow S, X \simeq X_0, 0 \in S$,
 とする時 S_J をどのように定義するかということのみ述べる.
 $\omega_X \in H^2(X, \mathbb{R})$ を標準類とすると $R^2 f_* \mathbb{R}$ は定数層であるから一意的に切断 $\tilde{\omega} \in \Gamma(S, R^2 f_* \mathbb{R})$ が定まり $\tilde{\omega}_s = \omega_{X_s}$ となる. $\mathbb{R} = \mathbb{R}_X \rightarrow 0_X$ (自然の
 包含写像) により誘導される写像 $\Gamma(S, R^2 f_* \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma(S, R^2 f_* 0_X)$ による $\tilde{\omega}$
 の像を $\tilde{\omega}$ とする. この時, $S_J = \{s \in S \mid \tilde{\omega}(s) = 0\}$ である. 言い
 かえれば S_J は $\tilde{\omega}_s$ が表上 (1.1) 型になるような点 s の集合に他ならない.

5. の最後の命題の 2) と 3) は同じ 1 つの定理からの帰結である.
 まず記号の準備をする.

a). $f_i: X_i \rightarrow S, i=1, 2$, を固有かつ smooth な正則写像とする. この
 時 複素空間 $\text{Isom}_S(X_1, X_2)$ と正則写像 $p: \text{Isom}_S(X_1, X_2) \rightarrow S$ が存在し
 次の性質をみることができる. 各 $h \in \text{Isom}_S(X_1, X_2)$, $s = p(h)$ に対し, 同形 $h: X_{1s} \xrightarrow{\sim} X_{2s}$
 (同じ文字 h で表わす) が対応し, この対応は '正則', かつ任意の同
 形 $X_{1s} \simeq X_{2s}, s \in S$, は上の形に表わされる. さらに f_i のもとに G -族
 の場合 G -同形全体の部分集合 $\text{Isom}_S(X_1, X_2)_G \subseteq \text{Isom}_S(X_1, X_2)$ と表す.
 $G \geq D_{16}^*$ より $\text{Isom}_S(X_1, X_2)_G$ は $\text{Isom}_S(X_1, X_2)$ の連結成分の和集合で
 あることがわかる. ($\text{Isom}_S(X_1, X_2)$ については [17] 参照)

b) $g: Y \rightarrow S$ は固有正則写像である。 $\gamma: D_{Y/S} \rightarrow S$ は g に同伴の相対 Deodary 空間である。従って $d \in D_{Y/S}$ には $Y_d, s = \gamma(d)$ の部分空間 Z_d が対応するわけである (cf. [3])

c) a) において $Y = X_1 \times_S X_2$, $g: Y \rightarrow S$ は自然写像である。この時 $\text{Isom}_S(X_1, X_2)$ は 各 d に対応する graph $\Gamma_d \subseteq Y_{\beta(d)} \cong X_{1\beta(d)} \times X_{2\beta(d)}$ と対応させることにより自然に $D_{Y/S}$ の部分空間とみられる。実際 $\text{Isom}_S(X_1, X_2) \subseteq D_{Y/S}$ は Zariski open, である。また φ_i から G -族の時, a) の最後の注意により $\text{Isom}_S(X_1, X_2)_G$ は $D_{Y/S}$ 内の Zariski 開集合である。

以下上の記号で, 次を示せる。

定理 $\varphi_i: X_i \rightarrow \underbrace{S}_{i=1,2}$ は J -族とする。この時 $\text{Isom}_S(X_1, X_2)_G$ は S 上固有である。

系 $S_0 = \{s \in S; X_{1s} \cong X_{2s} \text{ } G\text{-同形}\}$ である。 S_0 は S 内で解析的。

実際 $S_0 = \beta(\text{Isom}_S(X_1, X_2)_G)$ であり 系は Remmert により従う。

上の定理から上に述べた 2) 3) のようにしてできる, とみておく。

2) $\tilde{S}_J = S_J \times S_J$, $P_i: S_J \times S_J \rightarrow S_J$ は各 i 成分への射影とする ($i=1, 2$). $\tilde{\varphi}_i: \tilde{X}_i \rightarrow \tilde{S}_J$ は, $\varphi_j: X_{S_J} \rightarrow S_J$ は P_i により引き上げられた族である。ここに φ_j は Kuranishi 族 X_J の制限したものである。

$\tilde{f}_i$ は子族であるから系により $\tilde{S}_1 = \{(s_1, s_2); x_{s_1} \cong x_{s_2} \text{ G-同形}\} = R_T$ は解析的である。

3) $f_i: X_i \rightarrow S_i, i=1, 2$, の条件の如くとする。 $S = S_1 \times S_2$, $p_i: S \rightarrow S_i$ と射影とする。 $\tilde{f}_i: \tilde{X}_i \rightarrow S$ と p_i により f_i を S 上に引き上げて得られる子族とする。系により $S_1 = \{(s_1, s_2); x_{s_1} \cong x_{s_2}\}$ G-同形は解析的, 特に S_1 は S の閉集合である。従って $(s_1^0, s_2^0) \in S_1$ より $(s_1^0, s_2^0) \in S_1$ が従う。

さて定理は次の 2 つの定理からの容易な結論である。

定理 A. $\text{Isom}_G(X_1, X_2)_{G_T}^- \in D_{Y/S}$ (上の c) の記号) 内での $\text{Isom}_G(X_1, X_2)_{G_T}$ の閉包とする。この時 $\text{Isom}_G(X_1, X_2)_{G_T}^-$ は S 上固有である。

定理 B (松阪-Mumford の定理 [4, Theorem 2] のケーラー-analogue)

$f_i: X_i \rightarrow D = \{t \mid |t| < 1\}, i=1, 2$, を固有かつ smooth な正則写像とする。 X_i は Kähler で $\omega_i \in H^2(X_i, \mathbb{R})$ と対応する Kähler 類とする。今 $\Phi: X_1 \rightarrow X_2$ なる D 上の双有理写像で, $D' = D - \{0\}$ 上は $X_1' = \Phi^{-1}(D')$ の間の同形を与えるものが存在するとする。この時 Φ は X_1 から X_2 への $(X_1 \text{ covered by } X_2)$ の間の同形を与えるものが存在するとする。この時 Φ は X_1 から X_2 への同形である。

ここに $\Phi_s: X_{1s} \rightarrow X_{2s}$ は Φ の誘導する同形, $\omega_{1s} \in H^2(X_{1s}, \mathbb{R})$ は ω_1 により誘導される X_{1s} 上の Kähler 類。

定理 B は [5] にあって, Kähler 多様体の双有理写像に関する一定理の応用として示された。定理 A は $h \in \text{Isom}_G(X_1, X_2)_{G_T}$ の元に対応する $Y_{\text{red}} = X_{1\text{red}} \times X_{2\text{red}}$ の部分空間 $\rightarrow$ より h のグラフ

の体積が ϵ により十分小さく ϵ と [3] の結果 (命題 2.10.4.11) から
導かれる。以上の詳細については [7] を参照されたい。

又 附

1. Burns, D., and Rapoport, M., On the Torelli problem for Kählerian K3 surfaces, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* 8 (1975), 235-274
2. Douady, A., Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes, *Seminaire Bourbaki*, 17^e année, 1964/65
3. Fujiki, A., Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces, *Publ. RI MS, Kyoto Univ.*, 14 (1978), 1-52
4. Fujiki, A., On automorphism groups of compact Kähler manifolds, *Inventiones math.* 44 (1978), 225-258
5. Fujiki, A., A theorem on biholomorphic maps of Kähler manifolds, to appear
6. Fujiki, A., On deformation of ruled varieties, to appear
7. Fujiki, A., Coarse moduli for polarized family of compact Kähler manifolds, to appear.
8. Griffiths, Ph. A., Extension problem in complex analysis, In: *complex analysis in Minneapolis*, 113-142. 1965
9. Grothendieck, A., Technique de construction en géométrie analytique, *Sem. H. Cartan*, 1960/1
10. Kodaira, K., and Spencer, D. C., On deformations of complex analytic structures, II,

- Ann. of Math.* 67 (1958), 463-466.
- 11 Kodaira, K. and Morrow, *Complex manifolds*, Holt, Rinehart and Winston, 1971
 - 12 Kuranishi, M., *Deformations of compact complex manifolds*, Les presses de l'Universite de Montreal 1971
 - 13 Kuranishi, M., *A note on families of complex structures*, *Global analysis, papers in honor of Kodaira*, 309-313 (1969).
 - 14 Matsuoaka, T., and Mumford, D., *Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties*, *Amer. J. Math.*, 86 (1964), 668-684
 - 15 Moishezon, B., *On n -dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions*, *II. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. mat.* 30 (1966), 621-656
 - 16 Savarevic, I.R. et al., *Algebraic surfaces*, Steklov Institute of Math 75, English translation, Providence, Amer. Math. Soc. 1967
 - 17 Schuster, H.W., *Zur Theorie der Deformationen kompakter komplexer Räume*, *Inventiones math.* 9 (1970), 284-294
 - 18 Sumi, T., *Deformations of holomorphic Seifert fiber spaces*, *Inventiones math.*, 51 (1979), 77-102.
 - 19 Wavrik, J.J., *Obstructions to the existence of a space of moduli*, *Global Analysis, papers in honor of Kodaira* (1969) 403-414