

超幾何的黑写像*

9 州大学を退職した 吉田正章

抽象：超幾何関数に関する黒写像の進化の様子を私の視点から眺めてみる。

目次

1	超幾何関数	2
1.1	冪級数	2
1.2	積分表示	2
1.3	微分方程式	2
2	黒写像	3
3	一般化	5
3.1	一般超幾何関数	5
3.2	Appell F_1 , Lauricella F_D	5
3.3	更なる一般化	6
3.4	草男同型	6
3.5	(3, 6)-型	8
3.6	$E(3, 6; 1/2)$	9
4	亜黒写像	10
5	純虚指数差黒写像	10
6	又黒写像	11
6.1	又曲空間	11
6.2	又黒写像の定義	12
6.3	又黒写像の性質	13
6.4	絵有の又黒写像の離散版	15
7	最後に	16

*2013 年 6 月 24-26 日 数理研集会 部分多様体の微分幾何学の深化

1 超幾何関数

1.1 冪級数

進化の様子：

$$\begin{aligned}
 & \sum x^n && \text{幾何級数} && (1-x)^{-1} && \text{何故幾何と言うのか不明,} \\
 \rightarrow & \sum \frac{(a)_n}{n!} x^n && \text{二項級数} && (1-x)^{-a} && (a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a), \\
 \rightarrow & \sum \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n && \text{超幾何級数} && F(a, b, c; x), \\
 \rightarrow & \dots
 \end{aligned}$$

1.2 積分表示

進化の様子：

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 t^{1-p} (1-t)^{1-q} dt && \text{Beta 積分,} \\
 \rightarrow & \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt && \text{超幾何積分,} \\
 \rightarrow & \dots
 \end{aligned}$$

1.3 微分方程式

$$x(1-x)u'' + \{c - (a+b+1)x\}u' - abu = 0.$$

何やら、理由もなく特殊な方程式を書いたと思われるかもしれないが、この方程式は以下の普遍的意味を持つ。独立変数も従属変数も一個が一番簡単。非線形より線形の方が易しい。一階単独線型方程式は求積出来てしまう。一番穏やかな特異点を確定特異点という（英語・仏語では正則特異点と言う位である）。確定特異点二個の方程式は、冪関数で解けてしまう。と言う訳で、高校数学で解けてしまわない一番簡単な方程式は単独二階線形常微分方程式で確定特異点が三個の物である。三つの特異点を $0, 1, \infty$ に持って来れば、三つの径数を持つこの方程式になってしまうのである。式が長くなるので、進化の様子は省略。

2 黒写像

19世紀までに超幾何関数に関して色々の研究がされてきたが、名前が超幾何にかかわらず、そこには幾何は無かった。初めて幾何にしたのが、19世紀の終わり頃の黒氏（彼 H.A.Schwarz はこの集会の表題にぴったりの、極小曲面の人である）による黒写像

$$\text{Sch} : X := \mathbf{C} - \{0, 1\} \ni x \mapsto u_1(x) : u_2(x) \in \mathbf{P}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

である、ここで $\{u_1, u_2\}$ は微分方程式の基本解。 a, b, c が実なら、 x -平面の上半分の像は黒三角形と呼ばれる円弧三角形になる。この三角形の各辺で黒鏡像原理を適用すると、Sch の全体の様子分かる。この時上半分の像を黒、下半分の像を白と塗り分ける事が肝心である。黒三角形だからと言って、全ての三角形を黒く塗ると、像は真っ黒になり、何も見えなくなる：闇夜に烏である。典型例の $a = b = 1/2, c = 1$ では上記積分は楕円積分であり、 $0, 1, 1/x, \infty$ で分岐する楕円曲線の族

$$C_x : s^2 = t(1-t)(1-xt)$$

の周期積分と（思いたければ）思える。像は黒白三角形で過不足なく一様に円盤を覆い、国際数学会議の紋章になる。こういう代数幾何的解釈が唯一の解釈でないと私は思う。物を提供するときには出来るだけ素朴に見せて、解釈は各自に任せるべきである。代数幾何学者には一神教信者が少なからず居て、上記微分方程式（確定特異点が三つの二階線形常微分方程式）を代数多様体（この例では楕円曲線）の保持構造の変形を記述する Gauss-Manin 系等と言う（光°狐¹系と言う人も居る、何れも私には何の事か分からない）見方だけが正しいと思っているようである；困った人達です。

まあ（一部の）代数幾何学者の悪口はこの位にして、この場合黒写像の（射影的）測多価群は上半平面 $\mathbf{H}$ に働く主合同部分群 $\Gamma(2)$ に相似なので、黒写像は同型

$$X = \mathbf{C} - \{0, 1\} \longrightarrow \mathbf{H}/\Gamma(2)$$

を引き起こす。逆写像は定義から保形関数である、この場合は有名な乱舞だ関数。

¹保持 = Hodge, 光° = Picard, 狐 = Fuchs, 乱舞だ = lambda

左辺の黒写像の定義域は（思いたければ）射影直線 P^1 上の相異なる四点の配置空間 $(X(2,4))$ と記す）の不変式複比による実現と思える。正確な定義は後程。

以上見たように、級数、積分表示、微分方程式、代数多様体の族、対称空間とそれに働く離散群、保形関数、配置空間とその実現と色々の物が出てきて、楽しそうでしょう。こういう楽しい数学を他に思いつけばいいのだけど、何も思いつかなければ、悲しいけど、これの一般化、高次元化とか一寸した変更等を考えることになる。

一般化・高次元化という言葉で私はいつも剃刀の事を思い出す：古来刃物の柄は刃と平行に付いていた、床屋さんの使う剃刀は今でもそうになっている。いつの頃か分からないが、安全剃刀と言うものが発明された。私の子供のころには既に存在していた。それは柄が刃に対して直角に付いているのである。今までの物だと喉をかき切ったり、手首を切ったり出来たが、安全剃刀では精々かすり傷ぐらいしか出来ない、本当に安全なのだ。大発明だと思う。私が大学生の頃だろうか、二枚刃の剃刀が出現した。古来刃物は常に一枚刃であった、宮本武蔵はどうかと言われるかもしれないが、彼は一枚刃の刀を二本持っていたのであって、二枚刃の刀を持っていた訳ではない。これも相当の発明ではあるが、これ以降剃刀刃は使い捨てられるようになった。私はそれが嫌で、昔の剃刀を買ってきた。買うまでが大変だった。私は何でも洋物が嫌い、和式の物がいい、江戸時代に使っていたような奴が欲しいと探し回り、やっと手に入れて、さんざん努力してみたものの、うまく使えるようにはならなかった。剃刀の宣伝で「理想の角度」等と言っている理由がよく分かった。いくら研いでよく切れるようにしても、当たる角度が悪いとうまく剃れないし、危なくてしょうがない、左手に持ち替えないと角度がうまく行かないからと持ち替えると、怖くて手が震えて全く駄目。そうこうするうちに三枚刃の剃刀が出現した。数年前に町を歩いていると、剃刀の試供品を配っていて、見ると五枚刃だった。五枚刃の剃刀を手にとって、嗚呼この多刃化は、私のやってきた数学だなあと来し方を思った。私だけではない、多くの数学は三枚刃五枚刃の剃刀なのだ。この思いは君府（Istanbul）の軍事博物館でも味わった。鉄砲が発明される、弾を込めるのに時間がかか

るから、二連発銃が出来る、それは殆ど単発銃を二つ引っ付けたような物だった、三つ引っ付けたのもある、四つ引っ付けたのもある、五つ引っ付けたのもある、六つ引っ付けたのもある、もうその大きさは大砲の様だ。その次に遂に回転弾倉式銃が発明されるのである。私のやってきた数学は…と考えると悲しい。

3 一般化

3.1 一般超幾何関数

冒頭の超幾何級数を見て下さい。二項級数から超幾何級数に進化する時に分母分子に一つずつ $(b)_n$ のような項を付け足しましたね、それを更に続けると

$$\sum \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_{p-1})_n n!} x^n = {}_pF_{p-1}(a, b; x)$$

という形になり、それを一般超幾何関数と言います。普通名詞みたいな変な名前ではありますが、固有名詞です。山陽新幹線の小倉駅周辺の町に北九州市という変な名前を付けたのに似てませんか。よく（私の居る）福岡市と混同されますが、50km も離れています。九州の北の方を意味したいときは北部九州と言わなくてははいけません。超幾何関数の一般化は沢山ありますが、これ以外の物を一般超幾何関数と言っでははいけません。兎も角、この級数は p 階の微分方程式を満たします。 $p = 2$ の時が元祖超幾何、 $p = 3$ の時、黒写像の像は射影平面内の曲線になる、この曲線に興味を持てばすることは色々ある。

3.2 Appell F_1 , Lauricella F_D

冒頭の積分表示を見て下さい。Beta 積分から超幾何積分に進化する時に $(1 - xt)^{-b}$ を付け加えましたね、それをさらに続けると

$$\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-x_1 t)^{-b_1} \cdots (1-x_n t)^{-b_n} dt$$

となり、 $n = 1$ の時は元祖超幾何、 $n = 2$ の時 Appell F_1 , $n \geq 3$ の時 Lauricella F_D と称する（なぜ 1 が D になったのか不明）。これは $\mathbf{P}^1$

上の相異なる $n+3$ 点の配置空間 $X(2, n+3)$ 上定義された階数 $n+1$ の線型方程式系を満たす。黒写像の像が n -次元複素球

$$\{z_0 : z_1 : \cdots : z_n \in \mathbf{P}^n \mid |z_0|^2 - |z_1|^2 - \cdots - |z_n|^2 > 0\}$$

を稠密に埋め、逆写像が一価になる場合を光^oが一例を作り、寺田俊明氏が調べ上げた。

3.3 更なる一般化

上の積分表示を見て下さい。中身は t に関する一次式の或冪の何個かの積です。それを $t_1, \dots, t_k$ の一次式（幾何的には $\mathbf{P}^k$ の超平面）の或冪の n 個の積に一般化したものも考えられる、いつその事一次式でなく高次式にしてもいい、定義するだけならいくらでも出来る、ある種の有限性定理ならその一般化の下でも成立するだろう、だが、何かよく分かるのは上の小節で述べた $(k, n) = (2, n)$ 型の時と次に述べる $(k, n) = (3, 6)$ の時だけの様である。 $(3, 5)$ の時は次小節で復習する草男同型で $(2, 5)$ の時に帰すからである。

今迄いい加減にしてきた配置空間の定義をきちんとしておこう： $\mathbf{P}^{k-1}$ 内の一般の位置にある n ($\geq k+1$) 点（超平面）の配置空間とは

$$X(k, n) = \mathrm{GL}_k \backslash \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \mid k \times k \text{ 小行列式非零} \right\} / (\mathbf{C}^\times)^n$$

の事である。行列の各列は点の同次座標（或いは超平面の定義式の係数）を、左の群は射影座標変換を、右のは同次座標の常数倍を表す。一般の位置とはどんな k 点も超平面に乗っていない、あるいはどんな k 枚の超平面も一点で交わらぬこととする。 $k=2$ の時は二点が 0 次元射影空間即ち点に載っていない、二点は異なることを意味する。

3.4 草男同型

ここで草男同型を復習しておこう。これは去年まで毎年私が 9 大で学部一年生の線形代数で演習問題として出していたものである。 3×5 -行列を与えて、階数を求めさせる（階数は 3 にしてある）、次にその

行列が5次元線形空間から3次元線形空間への線形写像を定義していると考えると、その核の次元はと問う： $5 - 3 = 2$ 。次に核の基底を一組求めさせる。この基底を並べて 2×5 -行列を作る。与えた 3×5 -行列からこの 2×5 -行列を対応させるのが草男（同型）対応である。発展問題として、 3×5 -行列の（例えば）左端の 3×3 行列式が消えることと対応する 2×5 -行列の右端の 2×2 行列式が消えることは同値であることを示させる。これで一般の位置に在る者同士が対応することが分かる。ここで、 $3 \rightarrow k, 5 \rightarrow n, 2 \rightarrow n - k$ と置き換えると、一般の草男同型 $X(k, n) \cong X(n - k, n)$ が示される。

$X(2, 4), X(3, 6), \dots$ 等の $2k = n$ の時は草男同型はどうなるのであろうか。 $X(3, 6)$ の時は後出。多くの本では $X(2, 4)$ の時は例外的に恒等写像になると書いてあるけど、完全には正しくない、このことを説明しよう。直線上の四点を x_1, x_2, x_3, x_4 とする、相異なる四点の配置空間 $X(2, 4)$ は射影直線に三つ穴があいた物である。一方退化の程度が一番低い退化図形は四点のうち二点だけが等しいものであるそれらは

$$x_1 = x_4, x_2 = x_3; \quad x_1 = x_3, x_2 = x_4; \quad x_1 = x_2, x_3 = x_4$$

の六通りである。 $X(2, 4)$ の自然で正直な compact 化はこれらの六点を付け加えたものの筈である；一つの穴を二点で塞ぐことになるが、それ程変な物でなく、「前代数多様体」の構造が自然に入る。この空間に草男同型変換が非自明に働く； $X(2, 4)$ では恒等写像だが、退化図形 $x_1 = x_2$ と $x_3 = x_4$ を、 $x_1 = x_3$ と $x_2 = x_4$ を、 $x_1 = x_4$ と $x_2 = x_3$ を入れ替える。この変換で移るものを同一視したもの（変換での商空間）は三穴を三点で埋めたものになり、これがよく使われる。実際、複比（定義は六通りあり、文献によって異なる）

$$\lambda(x_1, \dots, x_4) = \frac{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}{(x_2 - x_4)(x_1 - x_3)}$$

はこの同一視を実現している。この複比は P^1 の座標変換で x_1 を 0 に、 x_2 を ∞ に、 x_3 を 1 に移した（必然性のない正規化をした）時の x_4 の行先である。同じことを行列の言葉で言い替えると

$$\begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & x_{03} & x_{04} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \end{pmatrix}$$

の左から GL_2 の、右から $(C^*)^4$ の、適当な元をかけて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

としたことになっている。

3.5 (3, 6)-型

(3, 6)-型の超幾何関数とは射影平面 P^2 上の一般の位置に在る 6 直線のなす配置空間 $X(3, 6)$ の上の、以下の積分で定義された関数である。

$$f_{\Delta}(x, \alpha) = \int \int_{\Delta} \prod_{j=1}^6 \ell_j(x, s, t)^{\alpha_j-1} ds dt.$$

ここで (s, t) は P^2 の非同次座標、

$$\ell_j(x, s, t) = x_{0j} + x_{1j}s + x_{2j}t, \quad j = 1, \dots, 6$$

は直線 L_j の方程式、 x は $X(3, 6)$ の点を代表する 3×6 -行列で（したければ正規化して）

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

と思ってい、 α_j は径数で $\alpha_1 + \dots + \alpha_6 = 3$ を満たし、 Δ は $P^2 - \cup L_j$ 内の閉曲面でその上で積分の中身が一価になるものとする。これらの関数は階数 6 の微分方程式系 $E(3, 6; \alpha)$ を満たす。黒写像は基本解系 $u_1, \dots, u_6$ を使って

$$X(3, 6) \ni x \longmapsto u_1(x) : \dots : u_6(x) \in P^5$$

と定義される。径数 α を適当に採って、この黒写像がよく分かって面白い場合が色々あれば元祖超幾何の時のように遊びたいのであるが、よく分かったのは $\alpha_j = 1/2$ の時だけなのを残念に思っている。測多価群が有限群（黒像が代数多様体になることと同値）になるのは α_j の分数部分が $1/6$ になるときだけで、その時、測多価群は最大の非実複素鏡映群（ST 分類番号 34）になることは分かったのであるが、像は見当がつかない。その他に α_j の分数部分が $1/3$ になるときが面白そうなのであるが、未だ殆ど何も分かっていない。悔しい。

3.6 $E(3, 6; 1/2)$

径数 α_j が総て $1/2$ の時、積分は $\mathbf{P}^2$ 内の六線で分岐する二重被覆である曲面の周期と（思いたければ）思える。この曲面は色々のことが計算できてしまうので、計算曲面と言われている。慶應大学を面倒だからと言って KO 大学と略記する人が居るように、この曲面を K3 曲面と書く人もいる。(2, 4) の場合の典型例で、楕円曲線の周期が出てきたが、それと平行である。線形独立な積分は六つあり、それらを並べて比をとって黒写像を定義する。六つの積分の間に二次関係があり、黒像は、 $\mathbf{P}^5$ の二次超曲面内の領域、所謂 IV 型領域と言われる古典対称領域に稠密に入り、逆が一価写像となる。測多価群 Γ も数論的群としてきちんと決まる。これらの事は計算曲面に関する代数幾何の結果を使わないでも、計算すれば分かる。横一列に並べていた基本解を折りたたんで像領域をそれと同値な上半空間

$$\mathbf{H}_2 = \left\{ z \in M_{2 \times 2}(\mathbf{C}) \mid \frac{z - z^*}{2i} > 0 \right\}$$

に移せば、結局、黒写像は同型

$$X(3, 6) \longrightarrow \mathbf{H}_2/\Gamma$$

を与える。この時左側の空間の草男変換は右側では 2×2 -行列の転置に対応していて、それで止まるところは、左側では六線が或二次曲線に接するような直線配置（それは二次曲線上の六点で決まり、射影直線上の六点配置の空間 $X(2, 6)$ と同型）であり、右側では茂空間²とそれに働く高さ 2 の茂主合同部分群となり、1960 年代の井草先生の仕事を再現する。

以上の事は松本圭司氏と佐々木武氏との共同作業である。この様な事が (4, 8) の場合でも (5, 10) の場合でも、一般に $k \geq 4$ で黒写像が

$$X(k, 2k) \longrightarrow \mathbf{H}_{k-1}/\Gamma, \quad \mathbf{H}_{k-1} = \left\{ z \in M_{(k-1) \times (k-1)}(\mathbf{C}) \mid \frac{z - z^*}{2i} > 0 \right\}$$

のような同型を与えれば、詰まらない（ある特殊な場合だけに面白いことが起こるのが楽しいのであって、一般に成立する様な事は詰まらんでしょ、こういう考えは和算の伝統かなあ）。そんなうまい話（詰ま

²茂 = Siegel

らん話か) はないことを山口佳三さんの協力で示せた。こういうことは彼にしかできないのに、今年(2013年)彼は北大の学長になってしまった; 健闘を祈るとしか言いようがない。上に述べたことが出来た時には(2, 4)での典型例が自然な形で(3, 6)の時に一般化され、嬉しくて本まで書いてしまったけど、これは剃刀で言えば三枚刃四枚刃だろう、今となっては恥ずかしい。

4 亜黒写像

平成18年、9大の修士の院生であった西坂龍哉君が、黒写像の定義で、何故比をとるのかと問うた。実際、100年以上、何故人は何も疑問を持たずに(黒さんにならって)比をとっていたのだろう。

$$C \ni x \mapsto (u_0(x), u_1(x)) \in C^2$$

を亜黒写像 (affine Schwarz map) と言う。少し考えると分かるが、比をとることによって失われた情報が多いことに驚きます。

5 純虚指数差黒写像

超幾何級数にしても、関数にしても、微分方程式にしても、径数 a, b, c は複素数である(全ての教科書にそう書いてある)のに、黒三角形が出て来るあたりになると、どの教科書も、以下径数は実数とすると何食わぬ顔で言っているのである。微分方程式の係数が実数でないと実区間の像が円弧にならず、黒鏡像原理がうまく働かないのは分かる、しかし黒写像は比をとるのだから、未知関数に何を掛けてもいい訳で、 x と $1-x$ の冪を適当にかけて、所謂SL型(蒸気機関車のことではない、微分方程式で u' の係数が0のこと、同じことだが、基本解の論好庵が定数になること)に変換すれば以下の形(黒微分の説明のところで必ず出て来る有名な式)に直る。

$$u'' + Q(x)u = 0, \quad Q = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1 - \mu_0^2}{x^2} + \frac{1 - \mu_1^2}{(1-x)^2} + \frac{1 + \mu_\infty^2 - \mu_0^2 - \mu_1^2}{x(1-x)} \right\}.$$

ここで、 μ_0, μ_1, μ_∞ は特異点 $0, 1, \infty$ での指数差 $1-c, c-a-b, b-a$ である。係数に出て来るのは指数差の二乗ばかりだから、この方程式の

係数が実数であるためには μ_0, μ_1, μ_∞ は実数でなくても、純虚数でもいいのである。全部の指数差が純虚の場合は測多価群が（種数 2 の）一寸来群になる。実数と純虚が混じった場合も面白いことがあるだろう；やってない。

6 又黒写像

私は昔から、黒氏の黒写像の定義で、源が $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ なのはいいとして、的 $\mathbb{P}^1$ がおかしいと思っていた。一般に、測多価群は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である。この群が自然に働く空間は $\mathbb{P}^1$ ではない、 $\mathbb{P}^1$ は理満球面と言われることもあるように球面である。この群が自然に働くのは中身の球体である。金柑じゃああるまいし、黒写像の的が皮なのはおかしい、中身であるべきだ。群を変えて、説明する：馴染の深い群 $SL_2(\mathbb{R})$ を考えよう。この群は勿論実数直線にも働くが、代表的な離散部分群 $SL_2(\mathbb{Z})$ はその上ではぐちゃぐちゃである、それを境界とする上半平面でこそ綺麗に働くのである、下半でもいいが。それと同じで、例えば見た目も美しい離散群 $GL_2(\mathbb{Z}[i])$ （白頭絡み群と呼ばれている）は球面 $\mathbb{P}^1$ 上ではぐちゃぐちゃであるが、中身の球体には綺麗に働く。

6.1 又曲空間

子供の時に習う反比例の graph は双曲線とは言わない、負の数を習って曲線が二つでてきたところで、双曲線と言う。双とは二という意味だからである。であるから、上に出てきた上半平面は双曲空間と言っても間違いである、上半と下半と同時に考えれば双曲でもいいが、一方しか考えないときには、又曲空間と言うべきである。更にいいことに、この空間の距離の様子は、股をおっぴろげた感じであるので幾何的意味も内在しているのである。因みに、西洋語には股や腋に当たる言葉が無い、日本人の（偉大な？）発明である；該当するところに体の部分が無いのに言葉があるのに感心する西洋人も居る。これで思い出したが、西洋語には腰に当たる言葉が無い、だから西洋には腰痛が無いらしい。ゆめゆめ言葉を疎かにしてはいけなことが分かる、軽々しく双曲空間等と言ってはいけなのである。

実三次元又曲空間 $\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$ の模型の一つに 2×2 正値 Hermite 行列（常数倍は同一視）の空間 $\text{Her}_2^+/\mathbf{R}_{>0}$ が在る。それと（三次元）上半空間模型との対応は

$$\text{Her}_2^+/\mathbf{R}_{>0} \ni \begin{pmatrix} s & z \\ \bar{z} & t \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left(\frac{z}{t}, \frac{\sqrt{st - |z|^2}}{t} \right) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}_{>0}$$

で与えられる。 Her_2^+ の元 h に $\text{GL}_2(\mathbf{C})$ の元 g は ghg^* で働く。上半空間模型では境界が $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbf{P}^1$ であることが見やすい。

6.2 又黒写像の定義

A を 2×2 の行列関数とするとき、行列方程式

$$\frac{d(u, v)}{dx} = (u, v)A$$

の基本解 $U(x)$ から正値 Hermite 行列 $U(x)U(x)^*$ を作り、写像

$$\text{hSch} : x \mapsto U(x)U(x)^* \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$$

を上の方方程式の又黒写像 (hyperbolic Schwarz map) と言う。又曲黒は発音しにくいから又黒とした。さて、二階の微分方程式

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$$

を行列方程式に変換する仕方は無限の自由度がある。余り必然性はないが、先ず上の方方程式の未知関数に適当な関数を掛けて、SL 型に変換して、 (u, u') を未知として 2×2 -行列方程式を作る；すなわち、SL 型方程式の基本解 u_1, u_2 に対して、行列方程式の基本解を

$$U(x) = \begin{pmatrix} u_1 & u_1' \\ u_2 & u_2' \end{pmatrix}$$

とするのである。超幾何微分方程式の場合の SL 型は前節に書いておいた。

SL 型にする必然性はないが、そうしないで、 (u, u') を未知として同じことをやると、又黒写像の特異点は孤立しているのに対して、SL 型にすると又黒写像の特異点が一次元的に現れるのである。特異点とは、通常点より情報（不変量と言ってもいい）を多く含んでいる点であるので、このような点は大歓迎なのである。という（多少苦しい）理由であるがこの SL 型を経由する定義で以下話を進める。

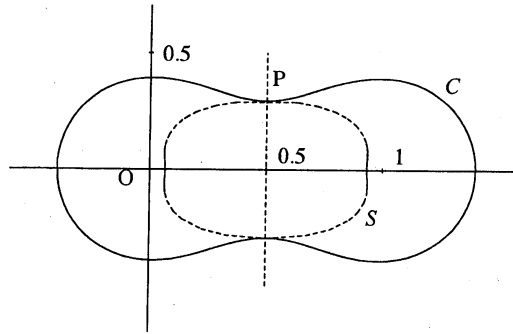


図 1: 冬瓜風の C 、点線は像曲面の自己交叉曲線の原像

6.3 又黒写像の性質

超幾何微分方程式を SL 型

$$u'' + Q(x) = 0$$

に変換して、その基本解 $\{u_1, u_2\}$ を用いて上のように又黒写像

$$\text{hSch} : X(2, 4) \ni x \mapsto U(x)U(x)^* \in \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^3$$

を定義する。

- $|Q(x)| = 1$ で定義される x 平面上の曲線 C に沿って又黒写像は特異（写像の微分の階数が落ちる）。像曲面は曲線 C の像 $\text{hSch}(C)$ に沿って特異点が走っている。像曲線 $\text{hSch}(C)$ が（空間曲線として）非特異な所では像曲面はそれに沿って $(2, 3)$ -型の尖点と区間の直積に微分同型である。この曲線を尖線と呼ぶ。
- 像曲線 $\text{hSch}(C)$ が（空間曲線として）特異点を持つところでは像曲面はもっと悪い特異点を持つが、代表的なのは燕尾である。例えば何度も出て来る典型例 $(a = b = 1/2, c = 1)$ では、曲線 C は二点 $\{0, 1\}$ を囲む（直線 $\Re x = 1/2$ に関して対称な）冬瓜のような形（図 1 参照）をしていて、くびれたところの二点（その直線との交点）の行先で像曲面は燕尾を持つ（図 2 参照）。この典型例に於いては黒写像は、方程式の三つの特異点 $\{0, 1, \infty\}$ は全く対称であるが、又黒写像の対称性は $\{0, 1\}$ に関してだけである。このことは二階の微分方程式の対称性が、直ちに又黒写像の対称性に遺伝しないことを示している。

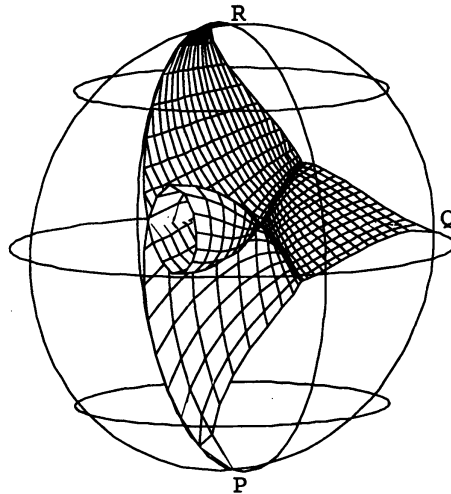


図 2: 燕尾

- 像曲面上の点から測地的法線（特異点に於いても定義される）を立てると、一方の行く先は理想境界の理満球面に到達し、その点は黒写像を回復する。他方の行く先は理想境界の理満球面に到達し以下の裏黒写像 (derived Schwarz map) を与える：

$$\text{dSch} : X(2, x) \ni x \longmapsto u'_1(x) : u'_2(x) \in \mathbf{P}^1.$$

- x -平面の上半部分の像曲面の平行曲面族を作ると、一方では理想境界で黒像。他方で裏黒像に収束する。

上の典型例で燕尾が出て来ることを書いたが、そこから径数を動かして行って、二つの燕尾をぶつけてより複雑な特異点を作ったりして遊ぶことが出来る、それを燕尾の交尾と呼んでいる。二つの燕尾が別々の尖線に載っている出会い系交尾、二つの燕尾が同じ尖線に載っている近親交尾、三つの燕尾がかかわる三つ巴交尾等が出て来る。

超幾何微分方程式には合流と言う操作があり、色々有用な方程式・関数がそれから出て来るのであるが、黒写像に於いては合流が論じられたことはない（径数を実に限っても、黒三角形はぐちゃぐちゃになり、何が起きているのか追跡不能）。しかし、又黒では自然に論じられるのである。ここでは究極の合流型の絵有方程式

$$u'' - xu = 0$$

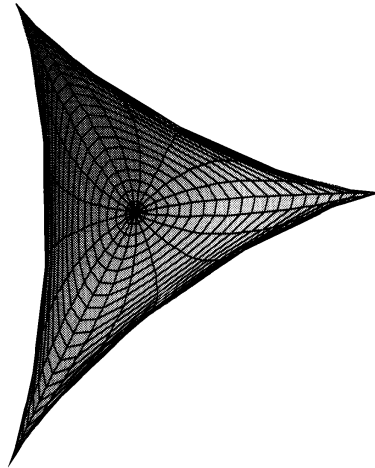


図 3: 絵有の又黒写像による単位円盤の像

(初めから SL になってますね) の時の又黒像の絵をお見せしましょう。すべての解は一価で有限平面では正則で、有限な所では一見とらえどころがない。しかし、 $Q = x$ なので曲線 $C = \{|x| = 1\}$ は単位円周で、1 の立方根の三点の像で像曲面は燕尾を持つ、尖線 (C の像) は三つの尖点を持つ閉曲線 (図 3 参照)。

6.4 絵有の又黒写像の離散版

上に述べた絵有の又黒写像には離散版がある。 $Q = x$ と極端に単純だから可能になったようである。これ以外の時も離散又黒が定義される日を夢見ている。

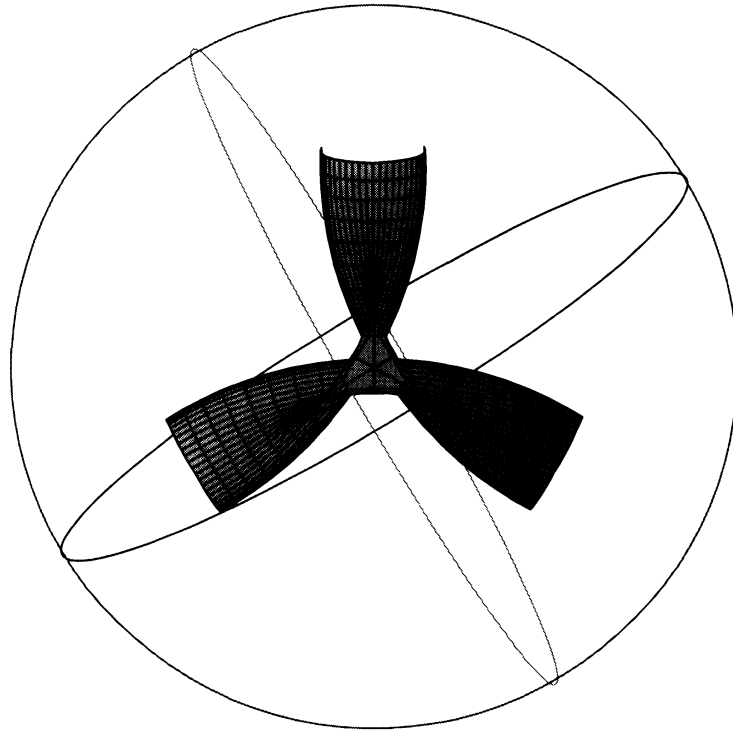


図 4: 絵有の又黒写像による像、 H_R^3 の球模型内で

7 最後に

以上の事はずっと一緒にやってきた佐々木武さんだけでなく、(3,6)型超幾何関係では松本圭司、高山信毅、山口佳三、超幾何的又黒関係では、微分幾何で山田光太郎、特異点で佐治健太郎、計算機で野呂正行、不確定特異点で小池達也、離散微分幾何で T. Hoffmann, W. Rossman 達との共同作業である。兎も角、今や黒写像は（元祖黒写像を地黒、多変数のそれを多黒とよぶことにする）、その親戚縁者が

地黒、多黒、亜黒、又黒、裏黒、離黒

と増えた訳である。

最近、佐治君と佐々木さんが黒の的を弩叱咤 (de Sitter) 空間にしても、面白いと言い出したが、本研究集会の Rossman 氏の話聴いて、複数の空間型を統合する形の普遍黒写像と言うべきものが定義できるのではないかと思い始めた。