

Écalle の再生関数と複素力学系

京都大学大学院 人間・環境学研究科
宇敷重広 (Shigehiro Ushiki)

Écalle の再生関数は [1] において導入された。Écalle の再生関数は、ある種の超関数で、Borel-Laplace 変換を通じて、複素関数の漸近挙動を解析するのに強力な道具となる。Écalle の論文においては、複素力学系の解析不変量などへの応用とともに、微分方程式の解の漸近解析など、様々な方面への応用が記述されている。こうした応用のうち、微分方程式の漸近解析の方面では、[4] にも紹介されているように、超局所解析の手法と関連して、大いに研究が進んでいる。しかし、離散時間の複素力学系の方面への Écalle の再生関数の応用については、いまのところ、Écalle 自身の画期的な研究の他には見るべきものがない。複素力学系の研究者のあいだで、この研究があまり知られていないようなので、もっとも簡単な部分に限定して、この講演で紹介を試みた。

Écalle の論文 [1] は極めて読みにくく、また証明にギャップがある。Malgrange による解説 [3] では、1 次元複素力学系の放物型不動点の標準形の問題に限っているが、証明のギャップは埋められている。

複素平面 $\mathbb{C}$ の無限遠点の近傍で定義された $f(z) = z + 1 + h(z)$ を考える。 $h(z) = O(z^{-2})$ は無限遠点の近傍で正則な関数とする。無限遠点は f の放物型不動点である。

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} e^{\xi z} h(z) dz$$

を $h(z)$ の Borel 変換という。ただし、 C_R は原点を中心とする、十分大きな半径 R の円とする。(Borel 変換は Laplace 変換の逆変換である。) $\{|z| \geq M\}$ において $h(z)$ が正則なら、

$$|\hat{h}(\xi)| \leq e^{M|\xi|} \sup_{|z|=M} |h(z)|$$

を満たすので、 $\hat{h}(\xi)$ は $\mathbb{C}_\xi$ 上 entire である。 $h(z) = O(z^{-2})$ より、 $\hat{h}(0) = 0$ である。さて、

$$f^*(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{\circ n}(z) - n) = z + \sum_{n=0}^{\infty} h \circ f^{\circ n}(z)$$

は、ある $A > 0$ と $B > 0$ について、

$$S = \{\Re z > A\} \cup \{|\Im z| > B\}$$

で広義一様収束し、Abel の方程式

$$f^* \circ f = f^* + 1$$

を満たすことが、古くから知られている。無限遠の近傍で正則な関数 $\varphi(z)$ にたいし、

$$\varphi \circ f(z) = \varphi(z+1+h(z)) = \varphi(z+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (h(z))^k \varphi^{(k)}(z+1)$$

と展開できるので、その Borel 変換は、

$$\widehat{\varphi \circ f}(\xi) = e^{-\xi} \hat{\varphi}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{h}(\xi))^{*k} * \frac{(-\xi)^k}{k!} e^{-\xi} \hat{\varphi}(\xi)$$

となる。よって、同様に計算して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{h \circ f^{\circ n}}(\xi) = \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \sum_{n_i \geq 1, r \geq 0} H_{n_r} \cdots H_{n_1} \hat{h}$$

が得られる。ただしここで、

$$H_k \varphi = (\hat{h}(\xi))^{*k} * \frac{(-\xi)^k}{k!} \frac{1}{1 - e^{-\xi}} \varphi$$

である。このことから、 $\hat{f}^*(\xi)$ は、 $\Omega = 2\pi i \mathbb{Z}$ において、極または対数型の特異性を持つ、 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ の普遍被覆空間において正則な関数になる。(このような関数を Écalte は再生関数と呼んでいる。) 上の式を使って、評価することによって、 $\hat{f}^*$ は、虚軸方向以外では高々指数関数型の増大度であることが示せて、 $\hat{f}^*$ の Laplace 変換

$$f^*(z) = \int_0^{\infty e^{-\theta}} e^{-\xi z} \hat{f}^*(\xi) d\xi$$

は領域 S で収束する。 f^* は Fatou 座標を与える関数であるが、これが、Écalte の再生関数 $\hat{f}^*$ の Laplace 変換として表示された。再生関数 $\hat{f}^*$ の特異点の留数たちが元の力学系の解析不変量を与えることなど、Écalte の理論が、複素力学系の研究に不可欠なものであることを示唆している。

References

- [1] J.Écalle, Les Fonctions Résurgentes, I, II, III. Publications Mathématiques d'Orsay, Paris, 1981-1985.
- [2] B.Malgrange, Travaux de Écalle et de Martinet-Ramis sur le systèmes dynamiques, Astérisque 92-93, pp59-73, 1982.
- [3] B.Malgrange, Introduction aux travaux de J.Écalle, L'enseignement Mathématique, 31, 1985, pp261-282.
- [4] B.Y.Sternin & V.E.Shatalov, Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory — Introduction to Resurgent Analysis, CRC Press 1996.