

DEFORMATION THEORY OF ALGEBRAIC STACKS AND ITS APPLICATIONS

青木 昌雄

1. INTRODUCTION

S を excellent Deedkind 環上の noetherian scheme とし, S 上の noetherian scheme の圏を $\mathcal{C}$ で表す. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ を S 上 separated かつ of finite type な algebraic stack とする. Contravariant 2-functor $\mathcal{HOM}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \mathcal{C} \rightarrow (\text{groupoids})$ を次で定義する.

$$\mathcal{HOM}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})(T) = \text{HOM}_T(\mathcal{X} \times_S T, \mathcal{Y} \times_S T).$$

右辺は 1-morphism のなす groupoid である.

次の定理を証明することを目標とする.

定理 1. $\mathcal{X}$ が S 上 proper かつ flat ならば $\mathcal{H} = \mathcal{HOM}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ は Artin の意味での algebraic stack である.

ここで "Artin の意味で" とは, 対角射 $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times_S \mathcal{H}$ が representable かつ locally of finite type であるが, separated, quasicompact とは限らないことを意味する¹[Ar, 5.1].

また, line bundle を乗法群 $\mathbb{G}_m$ の分類空間 $B\mathbb{G}_m$ への morphism と同一視することにより, 次が得られる.

系 2. $\mathcal{X}$ が S 上 proper かつ flat のとき, contravariant 2-functor

$$\text{Pic}_{\mathcal{X}}(T) = (\mathcal{X}_T \text{ 上の line bundle}).$$

は Artin の意味での algebraic stack である.

定理 1 で $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ が quasiprojective scheme や algebraic space の場合は既によく知られている. これらの場合, 関手の間の自然変換

$$\mathcal{HOM}(X, Y) \rightarrow \text{Hilb}(X \times Y)$$

$$f \mapsto f \text{ のグラフ}$$

¹ $\mathcal{H}$ が [LM] の意味でも algebraic であることを示すことは容易ではなく, 今後の課題である.

が open immersion で表現される [Ol1, 2.1].

しかし, algebraic stack の場合には Hilb にあたるものは (まだ) ない. Olsson と Staar の Quot-functor ([OS],[Ol3]) はこの目的には使えない. $\text{Quot}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}}}$ によって $\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}$ の closed substack をパラメタライズすることはできるが, 1-morphism のグラフは一般には $\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}$ の closed substack にはならない. 例えば, 対角射 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ は恒等射 $\text{id}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ のグラフであるが, これが closed immersion になるのは $\mathcal{X}$ が algebraic space で表現される場合のみである.

Olsson はこの問題を $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ が Deligne-Mumford stack の場合に考えた. この場合, 1-morphism f に coarse moduli space の射を対応させる写像

$$\mathcal{H}\mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{M}(\underline{\mathcal{X}}, \underline{\mathcal{Y}})$$

を考えることにより, algebraic space の場合に帰着させることができる. しかし, 一般の algebraic stack に対しては coarse moduli space は存在するとは限らない.

以下では, Artin[Ar] の条件を使って定理 1 を証明する. 証明の鍵になるのは algebraic stack の morphism の変形理論である.

スキームや algebraic space, simplicial algebraic space² の morphism の変形は cotangent complex の Ext-群を使って記述できることが Illusie[Il] によって知られている. ここで $X \rightarrow S$ をスキーム等としたとき, その cotangent complex $L_{X/S}$ とは導来圏 $D_{\text{qcoh}}^{[-\infty, 0]}(\mathcal{O}_X)$ の元であり, $H_0(L_{X/S}) = \Omega_{X/S}$ をみたす. 特に X が S 上 smooth なときは $L_{X/S} \cong \Omega_{X/S}$ である.

第 3 節でこの結果が algebraic stack の場合に拡張できることを示し, 第 4 節で 2-functor $\mathcal{H}\mathcal{M}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が Artin の条件をみたすことを確かめる.

表記. 本稿ではスキームや algebraic space など X, Y, T などの文字で表し, algebraic stack は $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ などで表す. 矢印 $\Rightarrow$ は 2-morphism を表すのに使う. また添字 $\mathcal{X}_T$ などはファイバー積 $\mathcal{X} \times_S T$ を意味する.

2. ALGEBRAIC STACKS AND MORPHISMS OF ALGEBRAIC STACKS

本節では algebraic stack やその morphism について簡単に紹介する. 正確な定義や性質は [LM] を参照されたい.

²より一般には環付 topoi

スキーム X は反変関手

$$\begin{aligned} X : (\text{Sch}) &\rightarrow (\text{Sets}) \\ T &\mapsto X(T) = \text{Hom}(T, X) \end{aligned}$$

によって特徴づけられた. 圏 (Sch) に étale 位相を入れると, X は層になっている (descent 理論). Algebraic stack はスキームをこの観点から拡張したものである. 集合の圏を groupoid (すべての射が同型であるような圏) のなす 2-category におきかえた contravariant 2-functor

$$\mathcal{X} : (\text{Sch}) \rightarrow (\text{groupoids})$$

で descent の公理をみたすものを stack と呼び, さらに幾何的構造を与えるための公理をみたすものを algebraic stack と呼ぶ. 特にスキームや algebraic space は algebraic stack である. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ が algebraic stack のとき, $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への 2-functor としての自然変換の全体は groupoid をなす. その対象を $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への 1-morphism と呼び, 射を 2-morphism と呼ぶ.

$\mathcal{X}$ が algebraic stack のとき, presentation と呼ばれるスキームからの smooth な全射 $X^0 \rightarrow \mathcal{X}$ が存在する. このとき

$$X^n = \underbrace{X^0 \times_{\mathcal{X}} X^0 \times_{\mathcal{X}} \dots \times_{\mathcal{X}} X^0}_{n+1}$$

とすることにより, simplicial algebraic space

$$X^\bullet = (\dots \rightrightarrows X^2 \rightrightarrows X^1 \rightrightarrows X^0)$$

が定まる. これを $\text{cosq}_0(X^0 \rightarrow \mathcal{X})$ と書く [De, 5].

このような simplicial algebraic space は algebraic stack の研究によく使われる. たとえば, $\mathcal{Y}$ を algebraic stack としたとき $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への 1-morphism のなす groupoid は $\mathcal{Y}$ の $X^\bullet$ -valued point のなす groupoid と圏同値である. 特に $\mathcal{Y}$ の presentation をとって simplicial algebraic space $Y^\bullet$ を作ったとき, $X^\bullet$ から $Y^\bullet$ への morphism $f^\bullet$ が与えられれば³ algebraic stack の 1-morphism $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が一つ定まる. 逆に図式

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \xrightarrow{f^0} & Y^0 \\ \downarrow & \swarrow \sigma & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

³ $f^\bullet$ は f^0, f^1 が与えられれば一意に決まる

から simplicial algebraic space の morphism $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ を構成することができる. これを $\cosq_0(f^\bullet, \sigma)$ と書く.

また, $P_X^\bullet : X^\bullet \rightarrow \mathcal{X}$ による層の引き戻しは導来圏の同値

$$P_X^{\bullet*} : D_{\text{qcoh}}^+(O_{X^\bullet}) \xrightarrow{\sim} D_{\text{qcoh}}^+(O_{X^\bullet})$$

を与える (cohomological descent). Algebraic stack の cotangent complex はこの圏同値を使って simplicial algebraic space の cotangent complex から定義できる [LM, 17].

3. DEFORMATION OF MORPHISMS OF ALGEBRAIC STACKS

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ をスキーム T 上の algebraic stack, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を T 上の morphism として, 次のような図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{i} & \widetilde{\mathcal{X}} \\ \downarrow f & \searrow \lambda & \downarrow \widetilde{f} \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{j} & \widetilde{\mathcal{Y}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{k} & \widetilde{T} \end{array}$$

ここで i, j, k はそれぞれ square-zero ideal I, J, K で定義される closed immersion である.

このとき f の変形とは $\widetilde{T}$ 上の 1-morphism $\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{X}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{Y}}$ と 2-isomorphism $\lambda : \widetilde{f} \circ i \Rightarrow j \circ f$ の組 $(\widetilde{f}, \lambda)$ のことである. また変形 $(\widetilde{f}, \lambda)$ から $(\widetilde{f}', \lambda')$ への射とは $\tau : \widetilde{f} \Rightarrow \widetilde{f}'$ であって, 2つの 2-morphism

$$i^* \tau \circ \lambda', \lambda : \widetilde{f} \circ i \Rightarrow j \circ f$$

が等しくなるようなものとする. f の変形の圏を $\text{Defm}_T(f)$, その同型類の集合を $\overline{\text{Defm}}_T(f)$ と書くことにする.

- 定理 3.** (1) 変形の障害 $o \in \text{Ext}^1(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I)$ が存在し, $o = 0$ となることと変形が存在することが同値である.
- (2) $o = 0$ のとき, 集合 $\overline{\text{Defm}}_T(f)$ には群 $\text{Ext}^0(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I)$ が作用して *torsor* になっている.
- (3) f の任意の変形の自己同型群は $\text{Ext}^{-1}(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I)$ と同型である.

定理3の(1)と(2)は $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ が scheme や algebraic space, simplicial algebraic space の場合には成り立つことが知られている [II, III 2.2.4].

もう一つ別の変形の問題を考える.

$\mathcal{X}$ を quasicompact algebraic stack とし, $x: X \rightarrow \mathcal{X}$ と $y: Y \rightarrow \mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ 上のスキーム, $f: X \rightarrow Y$ を $y \circ f = x$ となる morphism として, 以下の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i} & \tilde{X} & & \\
 \searrow f & & \searrow \tilde{f} & & \\
 & & & \tilde{Y} & \\
 & & & \swarrow \sigma & \\
 Y & \xrightarrow{j} & \tilde{Y} & & \\
 \downarrow y & & \downarrow \tilde{y} & & \\
 \mathcal{X} & \xrightarrow{k} & \tilde{\mathcal{X}} & &
 \end{array}$$

ここで i, j, k はそれぞれ square-zero ideal I, J, K で定義される closed immersion である.

このとき f の変形とは, $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ で $\tilde{f} \circ i = j \circ f$ となるものと, 2-morphism $\sigma: \tilde{y} \circ \tilde{f} \Rightarrow \tilde{x}$ で $y \circ f \Rightarrow x$ に制限すれば id になっているものの組 $(\tilde{f}, \sigma)$ である.

f の変形の集合を $\text{Defm}_{\mathcal{X}}(f)$ と書くことにする.

- 命題 4. (1) 変形の障害 $o \in \text{Ext}^1(Lf^*L_{Y/\mathcal{X}}, I)$ が存在し, $o = 0$ となることと変形が存在することが同値である.
- (2) $o = 0$ のとき, 集合 $\text{Defm}_{\mathcal{X}}(f)$ には群 $\text{Ext}^0(Lf^*L_{Y/\mathcal{X}}, I)$ が作用して *torsor* になっている.

定理3や命題4は [Ol2] や [Ao] で使われているものと同様のアイデアで証明できる.

Step 1: Algebraic stack のよい presentation を選び, associated simplicial algebraic space を作る.

Step 2: Algebraic stack の morphism の変形と, Step 1 で作った simplicial algebraic spaces の morphism の変形を比較する.

Step 3: Ext 群を比較する.

まず命題4を証明し, それを使って定理3を証明する.

命題 4 の証明. $\mathcal{X}$ の presentation $Z^0 \rightarrow \mathcal{X}$ を Z^0 が affine になるようにとる. [Ol2, 1.4] により, Z^0 の $\mathcal{X}$ 上への変形 $\tilde{Z}^0$ が存在する. $Z^\bullet = \text{cosq}_0(Z^0 \rightarrow \mathcal{X})$, $\tilde{Z}^\bullet = \text{cosq}_0(\tilde{Z}^0 \rightarrow \mathcal{X})$ とする. $Z^\bullet \rightarrow \mathcal{X}$, $\tilde{Z}^\bullet \rightarrow \mathcal{X}$ による base change で得られる次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 X^\bullet & \xrightarrow{\quad} & \tilde{X}^\bullet \\
 \downarrow f^\bullet & \nearrow i^\bullet & \downarrow \tilde{f}^\bullet \\
 Y^\bullet & \xrightarrow{j^\bullet} & \tilde{Y}^\bullet \\
 \downarrow y^\bullet & & \downarrow \tilde{y}^\bullet \\
 Z^\bullet & \xrightarrow{k^\bullet} & \tilde{Z}^\bullet
 \end{array}$$

Base change により, 写像

$$\text{Defm}_{\mathcal{X}}(f) \rightarrow \text{Defm}_{Z^\bullet}(f^\bullet)$$

が定まる. これは全単射である. 逆写像は simplicial algebraic space の morphism $\tilde{f}^\bullet : \tilde{X}^\bullet \rightarrow \tilde{Y}^\bullet$ を associated stack の morphism $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ に移すことで定まる.

$I^\bullet = \ker(O_{\tilde{X}^\bullet} \rightarrow O_{X^\bullet})$ とする. Simplicial algebraic space の場合の結果から, 変形の障害 $o \in \text{Ext}^1(f^{\bullet\bullet} L_{X^\bullet/Z^\bullet}, I^\bullet)$ が存在し, $o = 0$ のとき集合 $\text{Defm}(f^\bullet)$ は $\text{Ext}^0(f^{\bullet\bullet} L_{X^\bullet/Z^\bullet}, I^\bullet)$ -torsor である.

一方 cohomological descent により, すべての i に対して

$$P_X^{\bullet\bullet} : \text{Ext}^i(Lf^* L_{X/\mathcal{X}}, I) \rightarrow \text{Ext}^i(f^{\bullet\bullet} L_{X^\bullet/Z^\bullet}, I^\bullet)$$

は同型である. □

定理 3 の証明: **Step1.** $\mathcal{Y}$ の presentation $P_Y : Y^0 \rightarrow \mathcal{Y}$ をとり, $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} Y^0$ とし, さらに $\mathcal{X}'$ の presentation $X^0 \rightarrow \mathcal{X}'$ をとる. このとき合成 $P_X : X^0 \rightarrow \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ は $\mathcal{X}$ の presentation である. X^0, Y^0 は affine と仮定してよい. すると命題 4 の場合と同様 $X^0 \rightarrow \mathcal{X}$, $Y^0 \rightarrow \mathcal{Y}$ の変形 $\tilde{X}^0 \rightarrow \mathcal{X}$, $\tilde{Y}^0 \rightarrow \mathcal{Y}$ が存

在する. $X^\bullet = \text{cosq}_0(X^0 \rightarrow \mathcal{X})$ 等とし $I^\bullet = \ker(O_{\widetilde{X}^\bullet} \rightarrow O_{X^\bullet}) \cong P_X^\bullet * I$ とする.

$$\begin{array}{ccccc}
 X^\bullet & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{X}^\bullet & & \\
 \downarrow P_X^\bullet & \searrow f^\bullet & \downarrow \widetilde{P}_X^\bullet & \searrow \widetilde{f}^\bullet & \\
 & & Y^\bullet & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{Y}^\bullet \\
 & & \downarrow P_Y^\bullet & & \downarrow \widetilde{P}_Y^\bullet \\
 \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{\mathcal{X}} & & \\
 \downarrow x & \searrow f & \downarrow \widetilde{x} & \searrow \widetilde{f} & \\
 & & \mathcal{Y} & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{\mathcal{Y}} \\
 & & \downarrow y & & \downarrow \widetilde{y} \\
 T & \xrightarrow{\quad} & \widetilde{T} & &
 \end{array}$$

定理 3 の証明: Step 2. 写像

$$A : \text{Defm}_T(f^\bullet) \rightarrow \overline{\text{Defm}_T(f)}$$

を, $\widetilde{f}^\bullet : \widetilde{X}^\bullet \rightarrow \widetilde{Y}^\bullet$ を associated stack の morphism $\widetilde{f} : \widetilde{\mathcal{X}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{Y}}$ に移すことで定める.

主張. A は全射である.

証明. $[\widetilde{f}] \in \overline{\text{Defm}_T(f)}$ をとり, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{X}^0 & \xrightarrow{\widetilde{f}^0} & \widetilde{Y}^0 \\
 \downarrow & \searrow \sigma & \downarrow \\
 \widetilde{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{\mathcal{Y}}
 \end{array}$$

命題 4 より, $(\widetilde{f}^0, \sigma)$ が存在するための障害は $\text{Ext}^1(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathcal{Y}}, I^0)$ にあるが, X^0 が affine で $Y^0 \rightarrow \mathcal{Y}$ が smooth なのでこの群は自明である.

$f^\bullet = \text{cosq}_0(\widetilde{f}^0, \sigma)$ とすれば $A(f^\bullet) = [\widetilde{f}]$ となる. □

これから, f の変形が存在するための障害 $\mathfrak{o}$ は $\text{Ext}^1(f^{**}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet)$ にあることが分かる. また, 上記のような $(\widetilde{f}^0, \sigma)$ の集合は $\text{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathcal{Y}}, I^0)$ -torsor だから, 集合 $\overline{\text{Defm}_T(f)}$ は $\text{Defm}_T(f^\bullet)$ 内の $\text{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathcal{Y}}, I^0)$ -軌道の集合である.

次に変形の自己同型群を見る.

主張. f の変形 $\tilde{f}$ と $A(\tilde{f}^\bullet) = [\tilde{f}]$ となる $\tilde{f}^\bullet \in \text{Defm}_T(f^\bullet)$ を固定する. このとき $\text{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathcal{Y}}, I^0)$ の作用による $\tilde{f}^\bullet$ の固定部分群は変形の自己同型群 $\text{Aut}(\tilde{f})$ と同型である.

証明. $\text{cosq}_0(\tilde{f}^0, \sigma) = \tilde{f}^\bullet$ となる $(\tilde{f}^0, \sigma) \in \text{Defm}_{\mathcal{Y}}(f^0)$ をとる. $(\tilde{g}^0, \tau)$ を $\text{Defm}_{\mathcal{Y}}(f^0)$ の別の元とし $\tilde{g}^\bullet = \text{cosq}_0(\tilde{g}^0, \tau)$ とする. このとき $\tilde{f}^\bullet = \tilde{g}^\bullet$ となるための必要十分条件は $\tilde{f}^0 = \tilde{g}^0$ かつ $\tilde{f}^1 = \tilde{g}^1$ となることである. さらにファイバー積の構成から, $\tilde{f}^1 = \tilde{g}^1$ となることは $p_1^*(\sigma^{-1} \circ \tau) = p_2^*(\sigma^{-1} \circ \tau)$ となること, すなわち $\sigma^{-1} \circ \tau$ が $\tilde{f}$ の自己同型に descent することと同値である. $\square$

注意. これで得られた固定部分群と $\text{Aut}(\tilde{f})$ の間の全単射が群同型であることを示さなければならないが, この部分は省略する.

定理 3 の証明: Step 3. Algebraic stack の morphism

$$Y^\bullet \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow T$$

から導来圏 $D(\mathcal{O}_{Y^\bullet})$ の三角形

$$LP_Y^{\bullet*}L_{\mathcal{Y}/T} \rightarrow L_{Y^\bullet/T} \rightarrow L_{Y^\bullet/\mathcal{Y}} \rightarrow LP_Y^{\bullet*}L_{\mathcal{Y}/T}[1],$$

が得られ, さらに長完全列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & \rightarrow & \text{Ext}^{-1}(Lf^{\bullet*}LP_Y^{\bullet*}L_{\mathcal{Y}/T}, I^\bullet) & \rightarrow & & \\ \text{Ext}^0(Lf^{\bullet*}L_{Y^\bullet/\mathcal{Y}}, I^\bullet) & \rightarrow & \text{Ext}^0(f^{\bullet*}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet) & \rightarrow & \text{Ext}^0(Lf^{\bullet*}LP_Y^{\bullet*}L_{\mathcal{Y}/T}, I^\bullet) & \rightarrow & \\ \text{Ext}^1(Lf^{\bullet*}L_{Y^\bullet/\mathcal{Y}}, I^\bullet) & \rightarrow & \text{Ext}^1(f^{\bullet*}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet) & \rightarrow & \text{Ext}^1(Lf^{\bullet*}LP_Y^{\bullet*}L_{\mathcal{Y}/T}, I^\bullet) & \rightarrow & \\ \text{Ext}^2(Lf^{\bullet*}L_{Y^\bullet/\mathcal{Y}}, I^\bullet) & \rightarrow & \dots & & & & \end{array}$$

が得られる. ここで

$$\text{Ext}^i(Lf^{\bullet*}L_{Y^\bullet/\mathcal{Y}}, I^\bullet) \cong \text{Ext}^i(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathcal{Y}}, I^0)$$

であり, $i > 0$ のとき右辺は 0 になる. また, cohomological descent により

$$\text{Ext}^i(Lf^{\bullet*}LP_Y^{\bullet*}L_{\mathcal{Y}/T}, I^\bullet) \cong \text{Ext}^i(LP_X^{\bullet*}Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I^\bullet) \cong \text{Ext}^i(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I).$$

である. これらより

$$\text{Ext}^1(f^{\bullet*}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I).$$

であるから, 定理の (1) が従う. また

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Ext}^{-1}(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I) \rightarrow \text{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathcal{Y}}, I^0) \rightarrow \\ &\text{Ext}^0(f^{\bullet*}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet) \rightarrow \text{Ext}^0(Lf^*L_{\mathcal{Y}/T}, I) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が完全列であることから定理の (2), (3) が従う. $\square$

注意. ここでも群準同型 $\mathrm{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathcal{Y}}, I^0) \rightarrow \mathrm{Ext}^0(f^{**}L_{Y^0/T}, I^0)$ と写像 A が可換であることを示さなければならないが^s, 省略する.

4. ARTIN'S CRITERION

定理 1 は次の Artin の条件 [Ar, 5.3] を確かめることで証明できる.

(0) $\mathcal{H}$ は limit-preserving stack である.

(1) Schlessinger の条件.

(1-1) $A' \rightarrow A$ と $B \rightarrow A$ が S 上のネーター環の準同型で $A' \rightarrow A$ は small extension とする. 任意の $f \in \mathcal{H}(A)$ に対し, 関手

$$\mathcal{H}_f(A' \times_A B) \rightarrow \mathcal{H}_f(A') \times \mathcal{H}_f(B)$$

は圏同値である.

(1-2) M が有限 A -加群で $f \in \mathcal{H}(A)$ なら, $D_f(M) = \mathcal{H}_f(A + M)/\sim$ は有限 A -加群である.

(2) 完備化と可換.

A が完備局所 noether 環で極大イデアルが m とする. 関手

$$\mathcal{H}(A) \rightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}(A/m^{n+1})$$

は圏同値である.

(3) 変形理論.

任意の $f \in \mathcal{H}(A)$ に対し, f の $A + M$ への変形の障害の空間 $O_f(M)$, 変形の同型類の集合 $D_f(M)$, 変形の自己同型群 $\mathrm{Aut}_f(M)$ は M について functorial な A -加群であり, étale 局所化, 完備化と可換で constructible である.

(4) 対角射の quasi-separation.

任意の $f \in \mathcal{H}(A)$ と $\alpha \in \mathrm{Aut}(f)$ について, もし $\alpha|_k = \mathrm{id}$ をみたす点 $A \rightarrow k$ が稠密に存在するなら, $\alpha = \mathrm{id}$ である.

次の補題により $\mathcal{H}$ の T -valued point は $\mathcal{Y}$ の $\mathcal{X}_T$ -valued point と同一視できる.

補題 5. $\mathcal{Y} \rightarrow S$ をスキーム S 上の algebraic stack とし, $T \rightarrow S$ をスキームの morphism, $\mathcal{X}_T \rightarrow T$ を T 上の algebraic stack とする. このとき関手

$$\mathrm{HOM}_T(\mathcal{X}_T, \mathcal{Y}_T) \rightarrow \mathrm{HOM}_S(\mathcal{X}_T, \mathcal{Y})$$

は圏同値である.

証明. ファイバー積の構成から容易に分かる. $\square$

この同一視により条件 (0), (1-1) は $\mathcal{X}$ が (0), (1-1)⁴ をみたすことから従う. 条件 (2) は容易. 条件 (3) は定理 3 から, (1-2) は定理 3 と proper stack の coherent cohomology の有限性 ([Fa],[Ol3]) から従う. 条件 (4) は $\mathcal{X}$ が quasi-separated であることから従う.

REFERENCES

- [Ao] M. Aoki, *Deformation Theory of Algebraic Stacks*, Compositio Mathematica **141** (2005) 19-34
- [Ar] M. Artin, *Versal deformation and algebraic stacks*, Inventiones **27** (1974) 165-189
- [De] P. Deligne, *Theorie de Hodge III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **44** (1974) 237-250
- [Fa] G. Faltings, *Finiteness of coherent cohomology for proper fppf stacks*, J. Alg. Geom. **12** (2003) 357-366
- [Il] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Mathematics **239**, Springer-Verlag (1971)
- [LM] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik **39**, Springer-Verlag (2000)
- [Ol1] M. Olsson, *Hom-stacks and restriction of scalars*, preprint,
<http://www.math.ias.edu/~molsson/homstack.pdf>
- [Ol2] M. Olsson, *Deformation theory of 1-morphisms to algebraic stacks*, preprint (2002),
<http://www-math.ias.edu/~molsson/ldef.ps>
- [Ol3] M. Olsson, *On proper coverings of Artin stacks*, To appear in Advances in Mathematics
- [OS] M. Olsson, J. Starr, *Quot functors for Deligne-Mumford stacks*, Comm. Alg. **31** (2003) 4069-4096

京都大学理学研究科 数学教室

E-mail address: aoki@math.kyoto-u.ac.jp

URL: <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~aoki/>

⁴(1-1) の証明には $\mathcal{X}$ が flat であることを使う.