

重力多体系の緩和過程

京大・基研 阪上 雅 昭

§ 1 Introduction

球状星団・楕円銀河は互いに Newton 力で相互作用している質点系と見ることができる。これらの重力多体系はプラズマ等の通常統計力学で取り扱われている系と比べると 1) 相互作用が遠距離力である, 2) 重力が引力であるため Debye screening が無い, という著しい特徴をもっており, そのふるまいは本質的に非線形・非平衡になる。従ってこのような系の (準) 定常状態, あるいはそこへの緩和を調べるのは非常に興味深い問題である。

重力多体系の緩和については 2 つの過程が知られている。ひとつは星どうしの近距離での散乱, つまり binary encounter による緩和である¹⁾ 対応する緩和時間は

$$\tau_b = \frac{v^3}{32\pi G^2 m^2 n \ln N} \quad (1)$$

で与えられる。ここで G : 重力定数, v^2 : 速度分散, m : 星の平均質量, n : 星の数密度, N : 星の総数である。緩和時間 τ_b は球状星団ではおよそ $10^6 \sim 10^8$ 年であるが, 楕円銀河の場合 10^{13} 年となり宇宙年齢を超えてしまう。つまり楕円銀河では binary encounter による緩和は起こらないことを意味する。

ところが楕円銀河の surface luminosity には $r^{1/4}$ 則と呼ばれる不変的性質があることが知られておりこれは close encounter より速い緩和があることを示唆している。そこで登場したのが violent relaxation という概念である²⁾ τ_b より短い time scale では重力多体系の時間発展は collisionless Boltzmann 方程式 (Vlasov 方程式) に従う。

$$\partial_t f(x, v) + V \cdot \partial_x f(x, v) + \partial_x \phi \cdot \partial_v f(x, v) = 0 \quad (2)$$

binary encounter による (1) の計算ではポテンシャル ϕ はゆるやかに変化する平均場と考え, 2 体散乱による緩和だけをとり扱った。しかし重力が遠距離力でしかも Debye screening が無いことを考慮すると, この仮定は正しくない。系が定常状態に近くない限り ϕ は個々の星の運動の影響を強く受け非常に速く変動する。そのため一粒子のエネルギーが保存しなくなり phase space での激しい mixing が生じる。この phase mixing により生じる緩和を violent relaxation という。

上の議論から violent relaxation の time scale は個々の星の運動の time scale つまり free fall time

$$\tau_f = (4\pi G \rho_{av})^{-1/2} \quad (3)$$

の order になることがわかる。しかし残念ながら violent relaxation に関してこれ以上詳細な議論は現在のところ存在しないといってよい。唯一つ Lynden-Bell が phase mixing が充分に進み粗視化されたエントロピーが極値をとると仮定して Lynden-Bell 統計と呼ばれる分布を導いているが, 重力多体系の力学

的進化において上の仮定の正当性は明らかではない。実際、一次元重力多体系の数値シミュレーションでは初期条件によって終状態が大きく異なり、限られた初期条件のときに Lynden-Bell 統計が実現されることが示されている³⁾

このように violent relaxation に関する精密な理論はないが、phase mixing という立場で重力多体系の緩和過程を一般的にとり扱うことは非常に有用であると思われる。phase mixing の過程を理解し、それにより重力系の終状態の分類、あるいは Lynden-Bell 統計の基礎づけ、さらにそれらの状態に緩和する time scale を議論するという立場が、violent relaxation の理論を精密化する最つとも有望な方法と考えられる。そこでまず第2章では phase mixing の time scale を与えると期待される2つの物理量、リヤプノフ数と geodesic deviation について紹介する。第3章では1次元重力多体系での数値シミュレーションの結果を報告する。

§2 Time Scales for Phase Mixing

2-1 リヤプノフ数

まず直観的なリヤプノフ数の説明から始めよう。N体重力系の時間発展は6N次元 phase space (一次元重力系なら2N次元)内の軌道 $u^\alpha(t) = (q^\alpha(t), p^\alpha(t))$, $\alpha=1, 3N$ で表わされる。時刻 $t=0$ に phase space で非常に近くにある2つの軌道 $u^\alpha(t)$, $\bar{u}^\alpha(t)$ を考えよう。この系が chaotic な場合、2つの軌道間の距離 $\delta u(t) = \|\bar{u}^\alpha(t) - u^\alpha(t)\|$ は時間とともに指数函数的に増大する。

$$\delta u(t) \propto e^{\chi t} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4)$$

この指数 χ をリヤプノフ数という。従って系が chaotic でなく δu が高々 t の巾乗でしか大きくならない時はリヤプノフ数は zero である。

軌道が近くにあるという表現はあいまいなので、もう少しきちんと定義しよう。正確には δu は2つの軌道間の距離ではなく、ある軌道 $u^\alpha(t)$ を考えた時のそのまわりの perturbation である。つまりある初期条件を与え運動方程式を解いて軌道 $u^\alpha(t)$ を求めながら、運動方程式を $u^\alpha(t)$ のまわりの perturbation δu について線形化した linearized eq. を解き δu の時間発展を調べるわけである。この $\delta u(t)$ について(4)式でリヤプノフ数を定義する。

ここまでの直観的なリヤプノフ数の定義を数学的に整理しておこう。まず力学系 (M, μ, ϕ^t) を考える。 M は phase space, μ は Liouville measure そして ϕ^t は measure preserving 1-parameter map つまり時間発展を表わす map である。まず phase space の各点 $Z \in M$ で Tangent space $T_Z M$ を用意する。これは phase space の各点で linear perturbation δu のはる6N次元空間を考えることに対応する。次に map $z \rightarrow \phi^t(z)$ に対応して tangent map

$$D\phi_z^t : T_Z M \rightarrow T_{\phi^t(z)} M \quad (5)$$

を定義する。この tangent map が linear perturbation の時間発展を表わす。つまり linearized eq. を解くことにあたる。

研究会報告

リヤプノフ数はほとんどすべての $z \in M$, $\omega \in T_z M$ に対して存在する。^{4, 5)}

$$\chi(z, \omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \{ \|D\phi_z^t(\omega)\| / \|\omega\| \} \quad (6)$$

ここで $\| \cdot \|$ は tangent space $T_z M$ での Euclidean norm である。(6) 式からわかるようにリヤプノフ数は軌道および perturbation に対する初期条件 z, ω を引数としてもつ。tangent vector ω を変えることによってリヤプノフ数は一般に $6N$ 個の異なった値をとる。これを大きい順に並べたものをリヤプノフスペクトルという。リヤプノフスペクトルの特徴は、1) 運動の方向およびエネルギー保存に対応して zero になるものが 2 つ存在する、2) phase space の体積を一定にするため (Liouville の定理) 大きさが同じで符号が逆のリヤプノフ数が対で現われる、という 2 点である。従って一般にリヤプノフスペクトルは

$$\{ \chi_k(z) \} = \{ \chi_1(z), \dots, \chi_{3N-1}(z), 0, 0, -\chi_{3N-1}(z), \dots, -\chi_1(z) \} \quad (7)$$

となる。⁵⁾

さて、ここまでのリヤプノフ数の定義からわかる様にリヤプノフ数が正であると phase space で局在している分布があっても、それを拡散させるように働く。従ってリヤプノフ数は phase mixing の情報をもっていると思われる。力学系の理論では phase mixing の度合を表わす物理量として K-S エントロピー (Kolmogorov-Sinai entropy) が知られており、これは単位時間あたりのエントロピーの増分を示している。⁶⁾ さらにこの K-S エントロピー $h(\phi^t)$ は正のリヤプノフ数を用いて

$$h(\phi^t) = \int d\mu(z) \sum_{i=1}^{3N-1} \chi_i(z) \quad (8)$$

と表わせる。^{5, 7)} (8) 式から phase mixing の time scale とリヤプノフ数が密接に関係していることがわかる。

2-2 Geodesic Deviation

Geodesic deviation による緩和時間の評価も基本的な考え方はリヤプノフ数の場合と同じで、近接する軌道が互いに離れていく time scale と緩和時間を対応させる。⁸⁾ この方法は力学を幾何学化することにより統計力学の基礎づけ、エルゴード性の証明をしようとした Krylov の試みに始まるものである。⁹⁾

全エネルギーが

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} (\dot{q}^i)^2 + U(q) \quad (9)$$

で与えられるとき、この系の運動方程式は metric

$$\begin{aligned} ds^2 &= W \sum_{i=1}^M (dq^i)^2 \\ &= (E - U(q)) \sum_{i=1}^M (dq^i)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

から導かれる Geodesic として表わすことができる。^{8, 10)} 従って軌道のまわりの perturbation のふるまいは geodesic deviation のみたす式

$$\frac{D^2}{Ds^2} \delta q^i = -R_{ijk}^i \frac{dq^i}{ds} \delta q^k \frac{dq^k}{ds} \quad (11)$$

で記述される。metric (10) から求まる曲率 R_{ijkl} の性質から geodesic deviation の時間発展さらに緩和時間を知ることができる。リーマン多様体上の geodesic flow の研究によれば、負曲率なら geodesic は互いに指数函数的に離れ、この系は強い統計性をもつことが示されている。^{10,11)}

3次元N体重力系の場合を考えよう。r 逆乗則に従うポテンシャルを用いて metric (10) から曲率を計算すると残念ながら negative definite ではない。⁸⁾ しかしNが充分大きく、perturbationやvelocityの球対称性が仮定できるなら geodesic deviation のふるまいは

$$\frac{d^2}{ds^2} |\delta q|^2 \sim -\frac{R}{9N^2} |\delta q|^2 \quad (12)$$

とスカラー曲率Rで記述される。さらにこの系はスカラー曲率は negative definite なので緩和時間は

$$\begin{aligned} \tau &\sim \frac{3N}{2} (-RW^2)^{-1/2} \\ &\sim 6 \times 10^8 \text{ year} \left(\frac{v}{10 \text{ km/s}} \right) \left(\frac{n}{1 \text{ pc}^{-3}} \right)^{-2/3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

で与えられる。⁸⁾ 従ってここで述べた geodesic deviation による緩和時間の評価が正しければ、重力多体系には free fall time よりおよそ1ケタ遅い程度の緩和が存在することになる。

§ 3 Numerical Simulation in One-dimensional Gravitational Systems

第2章では phase mixing の time scale を示すと思われる物理量として 1) リヤプノフ数, 2) Curvature の2つを紹介した。ともに phase space で分布の非一様性が軌道の指数函数的不安定性により緩和するという考え方である。しかし緩和時間を導く処法はまったく違っている。(6)式からわかるようにリヤプノフ数は $t \rightarrow \infty$ で定義されており phase space の大域的な情報をもっている。ただし数値計算をしないでリヤプノフ数の情報を得るのはほとんど不可能である。geodesic deviation についても(11)式を数値的に解いて $\delta q(t)$ のふるまいを調べるならリヤプノフ数と事情はまったく同じである。しかし2-2で紹介した Ref. 8 のように、力学を幾何学化し曲率の性質から緩和時間を求めるのが geodesic deviation のやり方である。従って phase space の局所的な情報しか反映していない可能性がある。

ここまで述べてきた phase mixing による緩和過程のとり扱いで不明な点は

- 1) リヤプノフ数と観測量の関係
- 2) curvature と観測量の関係
- 3) リヤプノフ数と curvature の関係

が挙げられる。特に2)は2-2章で紹介した様に geodesic deviation の方法で非常に速い緩和の存在が示唆されているので、これが violent relaxation と関連しているか?、どのような物理量の緩和として見えるか調べるのは非常に興味深い。従って2)について一次元N体重力系の simulation の結果を報告する。

一次元N体重力系のハミルトニアンは

$$H = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N u_i^2 + 2\pi G m^2 \sum_{i>j} |x_i - x_j| \quad (14)$$

で与えられ、一次元的に並んだ sheet の運動を表している。 x_i , u_i は i th sheet の位置と速度, m は面密度, G は重力定数である。このモデルは sheet の衝突と次の衝突の間の解が時間 t の 2 次式で表わせるので、衝突の時に sheet を入れ換え解をつないでゆくことにより非常に高い精度で時間発展を追いかけることができる¹²⁾

代表的な時間発展のようすを第 1 図に示す。初期条件は図にあるように phase space の領域 I ($0 < x < x_0$, $0 < v < v_0$ 又は $-x_0 < x < 0$, $-v_0 < v < 0$)、領域 II ($0 < x < x_0$, $-v_0 < v < 0$ 又は $-x_0 < x < 0$, $0 < v < v_0$) での phase density がそれぞれ一定で、領域 II の phase density f_{II} が領域 I のそれ f_I の 2 倍

$$RI = f_{II}/f_I = 2 \quad (15)$$

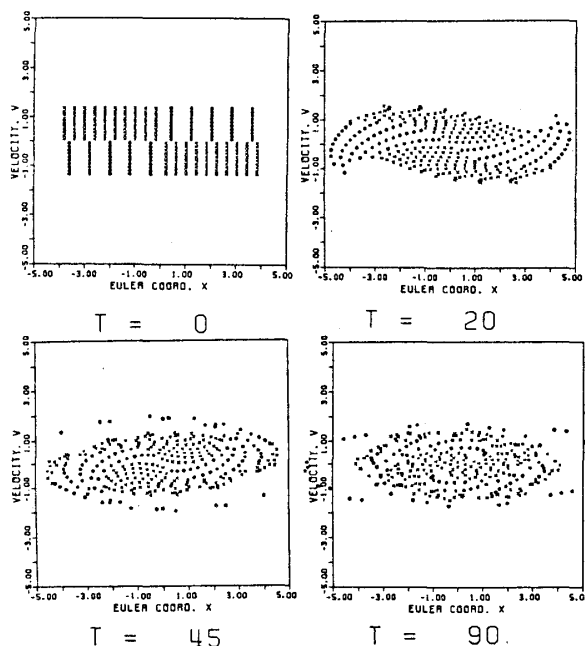
になるように設定してある。又 $t = 0$ での virial ratio は 1 ($VR = 2E_{kin}/E_{pot} = 1$ at $t = 0$)、sheet 数 $N = 300$ そして時間は free fall time を単位としている。図から phase space でのまきこみが起こっていることがわかる。領域 I, II は互いに交差せず、まきこみによって面積を変えず引き伸ばされている。これは Vlasov 方程式による時間発展と定性的に一致している。まきこみにより phase mixing が進んでいると思われる。

violent relaxation により実現すると期待される Lynden-Bell 統計では、第 1 図のように初期に phase density が一定で値の異なる 2 つの領域があると、それぞれの領域が phase density に逆比例する異なった温度をもつ²⁾。従って、それぞれの領域の粒子の速度分散の比は violent relation が完了すれば

$$K = \langle v^2 \rangle_I / \langle v^2 \rangle_{II} = 2 \quad (16)$$

となる。 K を mixing ratio という。第 2 図に $N = 36, 90$ の場合の K の時間発展を示す。両方とも初期の mixing ratio K の激しい振動が $t = 60$ のあたりで $K \sim 2$ あたりに落ちついているのが判る。これは phase space でのまきこみによる phase mixing つまり violent relaxation の結果であると考えられる。しかし $K \sim 2$ は終状態ではなく過渡的状态である。mixing ratio はその後しだいに $K \sim 1$ に近づいていく。ここで $K \sim 2$ に近づく過程つまり violent relaxation の time scale は sheet 数 N に依らないが、 $K \sim 1$ に近づく time scale は N とともに長くなっていることに注目しなければならない。

(12)式では対称性を仮定してスカラー曲率から緩和時間を導いたが、(11)式からわかるようにリーマン曲率



第 1 図

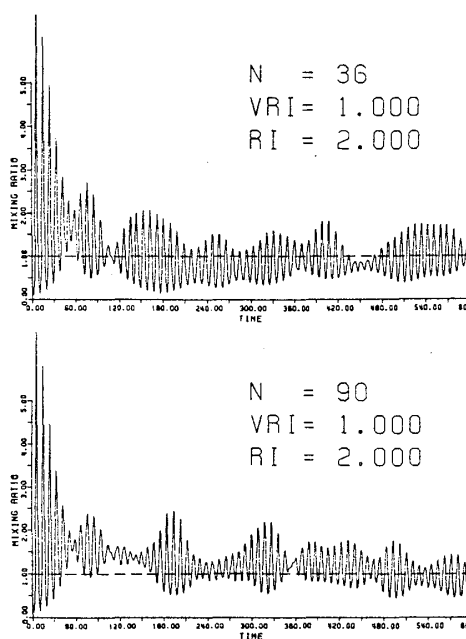
を速度について縮約して得られる $N \times N$ 行列

$$S_{ij} = -R_{ikjl} \frac{dq^k}{ds} \frac{dq^l}{ds} \quad (17)$$

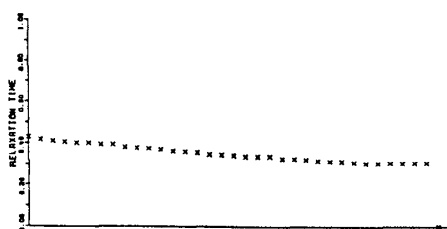
が軌道の局所的な拡大率の情報をもっている。従って S_{ij} の固有値, 固有ベクトルを調べればよい。数値計算の結果によれば S_{ij} の固有値は負, ゼロがそれぞれ一つずつある以外はすべて正になっている。緩和時間の逆数に対応する S_{ij} の固有値の平方根 $\sqrt{\lambda_i}$ を第3図に示す。これは $N=36$, $t=10$ での $\sqrt{\lambda_i}$ を大きい順に並べたもので, 固有値が負の場合はゼロにとってある。第3図からわかる様に $\sqrt{\lambda_i}$ の値は大きさがほとんど変わらず, しかもこれらから導びかれる緩和時間は free fall time の order で, 残念ながら mixing ratio の時間発展で現われたいずれの time scale よりもかなり短い。他の時刻で調べても S_{ij} の固有値の分布はほとんど変わらない。これは geodesic deviation の方法で曲率の値から直接導かれる time scale は物理量の緩和時間と無関係であること, 従って 2-2 章で紹介した 3 次元重力系の非常に速い緩和も存在しないことを意味していると思われる。

次に固有ベクトルについて考えよう。 $N=36$, $t=15$ での大きい方から 1, 10 番目の固有値に対応するベクトルを第4図に示す。1 番目のベクトル (a) は phase space の内側での mixing を表わしている。10 番目 (b) は phase space の巻きこみのため外側の腕の部分が引き伸ばされているが, 同時に腕の部分と phase space の内側の間でも mixing が起こっている。この固有ベクトルで見た phase mixing のようすが mixing ratio K のふるまいを説明する鍵になる。

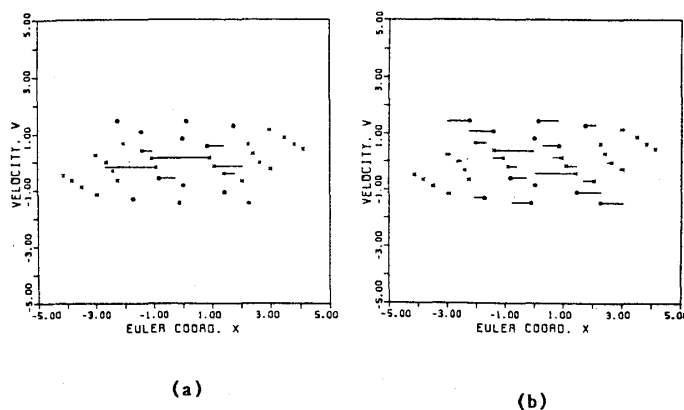
Lynden-Bell 統計の基礎には Vlasov 方程式に従う phase mixing, つまり第1図からわかるように傾



第2図



第3図



第4図

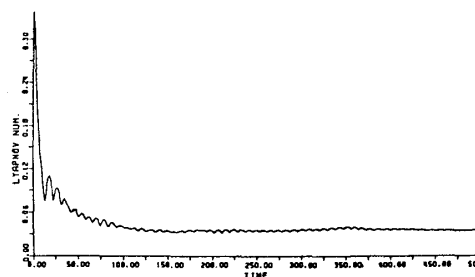
領域 I, II が phase density, 面積を変えず, 互いに交差することなくそれぞれ巻きこみのため引き伸ばされて mixing が進むという考えがある。数値計算の結果を見れば $t \sim 60$ まではこの見かたが正しく Lynden-Bell 統計に近い状態が実現されていると思われる。Vlasov 方程式に従う場合 phase density が変化しないので, 領域 I, II は phase density で区別される。ところが sheet 数 N が有限であるため, まき込みによる引き伸ばしが進むとこのような区別ができなくなる。第 4 図 (b) を見てみよう。最っとも上および下で横に 3 つ並んだ $\bigcirc$ で表わされた sheet はもともと領域 I にあったが, それを phase density から示すことは困難で, それぞれ自分が領域 I にあったことを忘れて phase space の内側の別の sheet との間で mixing を起こしている。この phase space での引き伸ばしによりどちらの領域に属していたか忘れる過程は, それぞれの領域の境界付近で起こる。これから mixing ratio K が 1 に近づく time scale が N とともに長くなることが理解できる。

§ 4 Summary and Discussion

phase mixing という立場で violent relaxation 等の重力多体系の緩和過程をとらえようとするとき重要になると期待される 2 つの方法 (1) リヤプノフ数, (2) geodesic deviation について説明した。また第 3 章では 1 次元重力系での数値シミュレーションの結果を報告した。

初期条件として phase density の異なる 2 つの領域からなる状態をとると, mixing ratio は $t \sim 60$ あたりで Lynden-Bell 統計で予想されるのに近い値をとり, その後 1 に近づいてゆく。これは, mixing ratio に関しては, violent relaxation の他に time scale の異なる緩和が存在することを示している。geodesic deviation がこの mixing ratio の時間発展の time scale を導びけるか調べたが, 残念ながら曲率を対角化して得られる固有値は, いずれの time scale よりもかなり短いものばかりであった。これは geodesic deviation の方程式に現われる曲率が phase space の局所的情報しか持っていないためだと思われる。この事情は geodesic deviation とリヤプノフ数の関係を調べるとよくわかる。第 5 図を見てみよう。これはリヤプノフ数の定義式 (6) で $t \rightarrow \infty$ の

極限をとる前のもの, いわば有限時間でのリヤプノフ数の時間変化である。最初に現われる最っとも高い peak の値が, 曲率を対角化した時の固有値の大きさにほぼ等しい。第 5 図は軌道のまわりの perturbation が最初は曲率に対応する速さで成長しても, 成長する方向が時間とともに変化し相殺しあう等の理由でリヤプノフ数は 1 桁位小さな値に落ちつくこ



第 5 図

とを示している。これは geodesic deviation における曲率が直接リヤプノフ数に関係するのではなく, 何らかの平均操作が必要であることを意味している。mixing ratio の緩和時間と曲率の関係についても同様である。

この様に geodesic deviation の方法で曲率の値から直接に緩和時間も評価するのは現在のところ困難である。しかし第 3 章で示した様に曲率を対角化して得られる固有ベクトルの情報は, 緩和過程を定性的

に理解するのに役立つ。

Phase mixingという立場で重力系の緩和過程をとらえるという試みは最近始まったばかりであり成果は上がっていないが、重力系のDynamicsの性質を一般的に理解するのに有用であると思われる。そのためにも、まずリヤプノフ数、geodesic deviationが表わしている軌道の指数函数的不安定性が緩和過程にどの様に効くのか明らかにしなければならない。

References

- (1) Chandrasekhar, S. "Principles of Stellar Dynamics" (Dover, 1942)
- (2) Lynden-Bell, D. 1967, M. N. R. A. S., **136**, 101.
- (3) Reidel, Jr, C. G., and Miller, B. N. 1987, Ap. J., **318**, 248.
- (4) Benettin, G., Galgani, L., and Strelcyn, J. -M. 1976, Phys. Rev. A, **14**, 2338
- (5) Benettin, G., Froeschle, C., and Scheidecker, J. P. 1979,
Phys. Rev. A, **19**, 2454.
- (6) Arnold, V. I., and Avez, A. "古典力学のエルゴード問題" (吉岡書店、1972)
- (7) Piesin, Ya. B. 1976, Math. Dokl. **17**, 196.
- (8) Gurzadyan, V. G., and Savvidy, G. K. 1986, Astr. Ap., **160**, 203.
- (9) Krylov, N. V. "Works on the Foundation of Statistical Physics"
(Princeton Univ. Press, 1979)
- (10) Arnold, V. I. "古典力学の数学的方法" (岩波書店、1980)
- (11) Anosov, D. V. "Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifold with
Negative Curvature" (Proc. of the Steklov Inst. of Mathematics,
90(1967), AMS.)
- (12) Ref. 3 and references therein